Quaternionen in der Elektrodynamik

André Waser*

Erstellt: 29.07.2000
Letzte Überarbeitung: 03.07.2001

Bei der Entstehung der MAXWELL'schen Elektrodynamik wurde die Quaternion Notation oft benützt, die heutzutage in allen Textbüchern durch die Vektornotation ersetzt wurde. Hätten die Begründer der Elektrodynamik die Quaternionen mit deren wichtigsten Eigenschaft der Vierdimensionalität verwendet, dann wäre die Relativität einige Zeit vor VOIGT, LORENTZ und EINSTEIN erfolgt. Es wird eine neue Quaternion-Notation eingeführt und anhand der Elektrodynamik überprüft. Es folgt daraus ein Set von erweiterten MAXWELL'schen Gleichungen, die für die klassischen LORENTZ-Bedingung übergehen in die heute bekannte Form. Darüber hinaus können Quaternionen auch für die Quantenmechanik und für andere Disziplinen der Physik verwendet werden..

Einleitung

Eine der größten emotionalen Auseinandersetzungen im späten neunzehnten Jahrhundert war über die mathematische Notation für die Gleichungen der Elektrodynamik[1]. Die heutige Vektor-Notation war zu dieser Zeit noch nicht voll entwickelt und einige Physiker – unter ihnen war auch James Clerk MAXWELL – waren von der Quaternion-Notation überzeugt. Das Quaternion wurde 1843 von Sir William Rowan HAMILTON[5] „erfunden". Peter Guthrie TAIT[11] war der größte Verfechter der Quaternionen. Anderseits haben sich Oliver HEAVISIDE[6] und Josiah Willard GIBBS[12] unabhängig voneinander entschieden, dass sie einen Teil des Quaternions besser für Berechnungen nutzen konnten als das gesamte Quaternion, weshalb sie mit dem weitergerechnet haben, was heute als dreidimensionale Vektoralgebra bekannt ist. Vor EINSTEIN wurden praktisch alle Berechnungen mit dreidimensionalen Vektoren durchgeführt. Das Quaternion ist aber eine vierdimensionale Zahl. Um nun das Quaternion für die ursprünglich dreidimensionale Elektrodynamik von MAXWELL brauchbar zu machen, haben Hamilton und Tait vor den skalaren Teil des Quaternions das Zeichen ‚S.' und vor den vektoriellen Teil das Zeichen ‚V.' angebracht. Diese Notation hat dann MAXWELL[8] auch in seiner *Treatise* verwendet, worin er etliche Gleichungen mit dieser Schreibweise publiziert hatte. Doch mit der Anwendung dieser Prefixe wurde der ganze Vorteil der Quaternionen nicht genutzt. Deshalb führte MAXWELL auch keine Berechnungen mit Quaternionen durch sondern präsentierte nur die Schlussergebnisse in der Quaternion Form. Dies entspricht dann eher einer Rechnung mit Skalaren und Vektoren wie es heute meist durchgeführt wird.

* André Waser, Birchli 35, CH-8840 Einsiedeln; andre.waser@aw-verlag.ch

HAMILTON's Quaternionen

Ein allgemeines Quaternion hat einen (realen) Skalarteil und einen (imaginären) Vektorteil. Im unteren Beispiel ist ‚a' der Skalarteil und 'bi + cj + dk' der Vektorteil.

$$\mathbb{Q} = \mathrm{a} + \mathrm{b}i + \mathrm{c}j + \mathrm{d}k \tag{1}$$

Darin sind a, b, c und d reelle Zahlen und i, j, k sind die sogenannten HAMILTON'schen Einheitsvektoren mit dem Betrag von √-1. Diese erfüllen die Gleichungen

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \tag{2}$$

$$ij = k \quad jk = i \quad ki = j$$
$$ij = -ji \quad jk = -kj \quad ki = -ik$$

Eine schöne Erklärung über die Rotationseigenschaften der HAMILTON'schen Einheitsvektoren in einem dreidimensionalen ARGAND Diagram wurde von GOUGH[3] publiziert.

Ein Quaternion ist eine hyperkomplexe Zahl. Der Radius (Betrag) des Quatemions im vierdimensionalen Raum ist ähnlich definiert wie für gewöhnliche komplexe Zahlen:

$$|\mathbb{Q}| \equiv \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \tag{3}$$

oder durch die Einführung eines konjugierten Quaternions

$$\mathbb{Q}^* = \mathrm{a} - \mathrm{b}i - \mathrm{c}j - \mathrm{d}k \tag{4}$$

folgt für den Betrag eines Quaternions auch

$$|\mathbb{Q}| \equiv \sqrt{\mathbb{Q}\mathbb{Q}^*} = \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \; . \tag{5}$$

Das vierdimensionale Quaternion eignet sich gut zur Darstellung eines Ereignisses im Vierdimensionalen Vektorraum†:

$${}^4\mathbf{X} = \left(x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{X} \equiv x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k \; . \tag{6}$$

Erweiterung der Quaternionen mit imaginären Zahlen

Eine Erweiterung der Quaternionen zu achtdimensionalen Zahlen kann dadurch erreicht werden, dass die Variablen a, b, c, d neu nicht reelle sondern komplexe Zahlen sind. Ein komplexes Quaternion ist dann:

$$\mathsf{Q} = (\mathrm{a} + \mathrm{iA}) + (\mathrm{b} + \mathrm{iB})i + (\mathrm{c} + \mathrm{iC})j + (\mathrm{d} + \mathrm{iD})k \tag{7}$$

Diese Zahl unterscheidet sich vom Oktinion (bekannt aus der LIE-Algebra) dadurch, dass weiterhin die HAMILTON'schen Einheiten i, j, k alleine gültig sind und keine weitere vier neue Einheiten hinzugefügt werden. Ein komplexes Quaternion ist eine Zahl in zwei sich durchdringenden Räumen, dem vierdimensionalen Raum des Quaternions und dem zweidimensionalen Raum der komplexen Zahl. Das komplexe Quaternion Q kann in zwei Unterräume aufgeteilt werden gemäß:

$$\begin{aligned}\mathsf{Q} &= \left(X_0 + \mathrm{i}x_0\right) + \left(x_1 + \mathrm{i}X_1\right)i + \left(x_2 + \mathrm{i}X_2\right)j + \left(x_3 + \mathrm{i}X_3\right)k \\ &= \left(\mathrm{i}x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k\right) + \left(X_0 + \mathrm{i}X_1 i + \mathrm{i}X_2 j + \mathrm{i}X_3 k\right) = \mathbb{Q} + \overline{\mathbb{Q}}\end{aligned}$$

Untersuchungen an dieser achtfachen Zahl haben gezeigt, dass sich der erste Term hervorragend zur kompakten Beschreibung der Elektrodynamik und weiterer Gebiete der Physik eignet, wenn gleichzeitig der zweite Term immer Null gesetzt wird.

† Die Einheitsvektoren im dreidimensionalen Raum sind in Fettschrift mit **i**, **j**, **k** bezeichnet, die HAMILTON'schen Einheiten i, j, k in kursiver Schrift und die imaginäre Einheit i in Normalschrift.

Definitionen

Die nachfolgenden Definitionen beziehen sich immer auf das komplexe Quaternion Q.

Definition 1: Ein komplexes Quaternion wird in zwei Teile zerlegt, wobei der Zweite Teil immer Null ist:

$$\begin{aligned} \mathsf{Q} &= (X_0 + \mathrm{i}x_0) + (x_1 + \mathrm{i}X_1)i + (x_2 + \mathrm{i}X_2)j + (x_3 + \mathrm{i}X_3)k \\ &= (\mathrm{i}x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k) + (X_0 + \mathrm{i}X_1 i + \mathrm{i}X_2 j + \mathrm{i}X_3 k) \\ &\equiv (\mathrm{i}x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k) = \mathbb{Q} \end{aligned} \tag{8}$$

Definition 2: Der Quaternion-Nabla Operator ist:

$$\blacktriangledown \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbb{X}} = \frac{\mathrm{i}}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} i + \frac{\partial}{\partial x_2} j + \frac{\partial}{\partial x_3} k \tag{9}$$

Definition 3: Der Quaternion-LAPLACE (oder D'ALEMBERT) Operator ist:

$$\blacksquare \equiv -\left|\blacktriangledown\right|^2 = -\blacktriangledown\blacktriangledown^* = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla \bullet \nabla \tag{10}$$

Definition 4: Das totale Differential nach der Zeit ist:

$$\frac{d}{dt} = -\mathbb{V}\blacktriangledown \tag{11}$$

Das ist analog zur bekannten Gleichung

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla$$

Definition 5: Der Betrag des Quaternions ist:

$$\left|\mathsf{Q}\right| \equiv \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \tag{12}$$

Quaternionen im vierdimensionalen Raum

Aus obiger Darstellung zum flachen, vierdimensionalen Raum kann die analoge Darstellung des gekrümmten vierdimensionalen MINKOWSKI-Raumes dargestellt werden mit

$${}^4\mathbf{X} = (\mathrm{i}ct + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{X} \equiv \mathrm{i}ct + x_1 i + x_2 j + x_3 k \ . \tag{13}$$

Der Betrag (Länge) gemäß (3) führt zu:

$$X = \left|\mathbb{X}\right| = \sqrt{x_1x_1 + x_2x_2 + x_3x_3 - c^2t^2} \tag{14}$$

Dieser Betrag weicht von der Definition 6 ab, ist aber nach Auffassung der speziellen Relativitätstheorie invariant zum Inertialsystem. Das gilt auch für das Differential dX. Eine Division durch ic ergibt eine weitere Invariante:

$$\frac{1}{\mathrm{i}c}dX = \sqrt{dt^2 - \frac{1}{c^2}\left(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2\right)} = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = d\tau \tag{15}$$

Dies stellt die aus der Relativitätstheorie bekannte Zeitdilatation dar. Für das Differential eines Ereignisses gilt ferner

$$d\mathbb{X} = \mathrm{i}cdt + dx_1 i + dx_2 j + dx_3 k \ . \tag{16}$$

so daß daraus die bekannte Vierergeschwindigkeit $\mathbb{U}$ folgt zu:

$$\mathbb{U} = \frac{d\mathbb{X}}{d\tau} = \frac{\mathrm{i}c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{v_1 i + v_2 j + v_3 k}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{17}$$

Die Herleitung der Zeitdilatation erfolgt aus dem Betrag eines Ereignisvektors, während die Herleitung der Vierergeschwindigkeit auf den Vektor allein angewendet wird. Dies ist inkonsistent, wie schon Yong-Gwan YI festgestellt hat. Die Konzepte der Zeitdilatation und der Vierergeschwindigkeit (17) schließen sich nach YI gegenseitig aus.

Ohne diese Betrachtungsweise im gekrümmten Raum kann die Vierergeschwindigkeit auch angegeben werden gemäß. Diese soll für die weiteren Ausführungen als die effektive (absolute) Geschwindigkeit eines Körpers im flachen vierdimensionalen Raum betrachtet werden.

$$\mathbb{V} = \frac{d\mathbb{X}}{dt} = \mathrm{i}c + v_1 i + v_2 j + v_3 k \tag{18}$$

Die Quaternion Elektrodynamik

Analog zur Geschwindigkeit setzen wir die Quaternion-Potentiale an zu:

$$\mathbb{A} \equiv \mathrm{i}\frac{\varphi}{c} + A_1 i + A_2 j + A_3 k \tag{19}$$

Die Quaternion-Ströme sind demnach:

$$\mathbb{J} \equiv \mathrm{i}c\rho + J_1 i + J_2 j + J_3 k \tag{20}$$

Dann gilt für das Potential:

$$\blacktriangledown\mathbb{A} = -\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}\right) + \left(\frac{\mathrm{i}}{c}\frac{\partial A_1}{\partial t} + \frac{\mathrm{i}}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}\right) i$$
$$+ \left(\frac{\mathrm{i}}{c}\frac{\partial A_2}{\partial t} + \frac{\mathrm{i}}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}\right) j + \left(\frac{\mathrm{i}}{c}\frac{\partial A_3}{\partial t} + \frac{\mathrm{i}}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial x_3} + \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right) k$$

Daraus folgt mit den Substitutionen

$$-\mathbf{E} = \nabla\varphi + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \qquad \mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A} \tag{21)a, b}$$

die komprimierte Schreibweise

$$\blacktriangledown\mathbb{A} = -\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \nabla\bullet\mathbf{A}\right) + \left(\frac{-\mathrm{i}}{c}E_1 + B_1\right) i + \left(\frac{-\mathrm{i}}{c}E_2 + B_2\right) j + \left(\frac{-\mathrm{i}}{c}E_3 + B_3\right) k \tag{22}$$

Nach Definition 1 ist der reelle skalare Teil gleich Null und nach Definition 1 ist der imaginäre vektorielle Teil gleich Null. Dies entspricht der bekannten LORENTZ-Bedingung (Eichung) und ist:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \nabla\bullet\mathbf{A} = 0 \tag{23}$$

$$\text{bei} \quad \mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A} \quad \text{und} \quad \mathbf{E} = 0$$

Diese LORENTZ-Bedingung gilt nach Definition 1 nur für $\mathbf{E} = 0$ immer, sonst ist sie frei wählbar. Aus der Definition der Felder aus den Potentialen gemäß (21) ist für die Divergenz des Vektorpotentials $\mathbf{A}$ zwar eine beliebige Annahme möglich, doch für $\mathbf{E} = 0$ ist die LORENTZ-Bedingung (23) zwingend. Ebenso gilt für die Stromdichte:

$$\blacktriangledown\mathbb{J} = -\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial J_1}{\partial x_1}+\frac{\partial J_2}{\partial x_2}+\frac{\partial J_3}{\partial x_3}\right)+\left(\frac{i}{c}\frac{\partial J_1}{\partial t}+ic\frac{\partial\rho}{\partial x_1}+\frac{\partial J_3}{\partial x_2}-\frac{\partial J_2}{\partial x_3}\right)i$$
$$+\left(\frac{i}{c}\frac{\partial J_2}{\partial t}+ic\frac{\partial\rho}{\partial x_2}+\frac{\partial J_1}{\partial x_3}-\frac{\partial J_3}{\partial x_1}\right)j+\left(\frac{i}{c}\frac{\partial J_3}{\partial t}+ic\frac{\partial\rho}{\partial x_3}+\frac{\partial J_2}{\partial x_1}-\frac{\partial J_1}{\partial x_2}\right)k \quad (24)$$

Auch hier können zwei neue Substitutionen durchgeführt werden

$$-\mathbf{G} = c^2\nabla\rho+\frac{\partial\mathbf{J}}{\partial t}, \qquad \mathbf{C} = \nabla\times\mathbf{J} \quad (25)a, b$$

womit die komprimierte Schreibweise

$$\blacktriangledown\mathbb{J} = -\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\bullet\mathbf{J}\right)+\left(\frac{-i}{c}G_1+C_1\right)i+\left(\frac{-i}{c}G_2+C_2\right)j+\left(\frac{-i}{c}G_3+C_3\right)k \quad (26)$$

möglich wird. Nach Definition 1 ist der reelle skalare Teil gleich Null und der imaginäre vektorielle Teil gleich Null. Dies entspricht der bekannten Kontinuitätsbedingung (Erhalt der Ladung) und ist:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\bullet\mathbf{J} = 0 \quad (27)$$

$$\text{bei} \quad \mathbf{C} = \nabla\times\mathbf{J} \quad \text{und} \quad \mathbf{G} = 0$$

Neu an dieser Formulierung ist, dass die Kontinuitätsbedingung – ähnlich wie die LORENTZ-Bedingung – nur bei $\mathbf{G} = 0$ zwingend gilt, sonst aber wegen $\mathbf{C} = \nabla\times\mathbf{J}$ weitere Interpretationen zuläßt.

Die LORENTZ-Kraft

Definieren wir den Quaternion-Impuls mit

$$\mathbb{P} \equiv \frac{i}{c}W + p_1 i + p_2 j + p_3 k \quad (28)$$

so gilt für den Quaternion-Impuls eines Potentialfeldes auf eine elektrische Ladung q:

$$\mathbb{P}_q = -q\mathbb{A} \quad (29)$$

Daraus berechnet sich die gesamte elektrische Energie W_q einer Ladung q

$$W_q = -q\varphi \quad (30)$$

und der dreidimensionale Impuls mit

$$\mathbf{p}_q = -q\mathbf{A} \quad (31)$$

Definieren wir die Vierer-Kraft mit

$$\mathbb{F} \equiv \frac{i}{c}P + F_1 i + F_2 j + F_3 k \quad (32)$$

so folgt für die Kraft des Potentialfeldes auf eine Ladung q:

$$\mathbb{F}_q = q\frac{d\mathbb{A}}{dt} = q(\mathbb{V}\blacktriangledown)\mathbb{A} \quad (33)$$

Das ergibt für den vektoriellen Teil

$$\mathbf{F}_q = V.\mathbb{P}_q = q\left[(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})-\mathbf{v}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\nabla\bullet\mathbf{A}\right)+i\left(c\mathbf{B}-\frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{E}\right)\right] \quad (34)$$

Der erste und zweite Term entspricht gemäß Definition 1 einer physikalisch reellen Kraft. Der erste Term beschreibt die bekannte LORENTZ-Kraft auf eine freie Ladung

$$\mathbf{F}_q = q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}) \quad (35)$$

Der zweite Term entspricht der LORENTZ-Bedingung (23) und ist nicht zwingend Null. Der dritte Term in (34) ist gemäß Definition 1 gleich Null. Daraus folgt der bekannte Zusammenhang:

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{E} \tag{36}$$

Der skalare Teil von (33) ist

$$P_q = S.\mathbb{P}_q = q\left[-\mathbf{v}\bullet\mathbf{B} + \frac{i}{c}\mathbf{v}\bullet\mathbf{E} - ic\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \nabla\bullet\mathbf{A}\right)\right] \tag{37}$$

Nach der Definition 1 ist der erste und zweite Term physikalisch existent, während für den dritten Term gilt:

$$\mathbf{v}\bullet\mathbf{B} = 0 \tag{38}$$

Folgt die Bahnkurve einer elektrische Ladung genau den Feldlinien von **B**, so wird auf diese Ladung keine Kraft ausgeübt. Der zweite Term ist abhängig von der LORENTZ-Bedingung (23) gilt. Der erste Term entspricht der Energieaufnahme- bez. –abgabe (Leistung) $P_q = dW_q/dt$ einer Ladung, welche sich in einem elektrischen Feld bewegt:

$$P_q = \frac{dW_q}{dt} = q\mathbf{v}\bullet\mathbf{E} \tag{39}$$

Die Transformation der Felder

Will man die LORENTZ-Gleichung (35) ohne das magnetische Feld schreiben, so kann dazu (36) in (35) eingesetzt werden:

$$\mathbf{F}_q = q\left[\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c^2}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{E})\right] \tag{40}$$

Ist die Leistung $P_q = 0$ so ist $\mathbf{v}\cdot\mathbf{E} = 0$, und aus (40) wird

$$\mathbf{F}_q = q\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\mathbf{E} \tag{41}$$

Dieser Zusammenhang wurde auch von MEYL[9] aufgestellt, er ist aber, wie oben gezeigt, nicht allgemein gültig.

Die MAXWELL'schen Gleichungen

Wird der LAPLACE-Operator auf das Quaternion-Potential angewendet, so folgt mit (21) nach etwas Algebra für den Skalarteil

$$S.\blacksquare\mathbb{A} = -\nabla\bullet\mathbf{B} + \frac{i}{c}\left[\nabla\bullet\mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \nabla\bullet\mathbf{A}\right)\right] \tag{42}$$

und für den Vektorteil

$$V.\blacksquare\mathbb{A} = \nabla\times\mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} - \nabla\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \nabla\bullet\mathbf{A}\right) - \frac{i}{c}\left(\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} + \nabla\times\mathbf{E}\right) \tag{43}$$

Ähnliche Gleichungen wurden bereits von HONIG[7] vorgestellt. Aus dem Imaginärteil folgt mit Definition 1 direkt das AMPÈRE'sche Gesetz

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} + \nabla\times\mathbf{E} = 0 \tag{44}$$

Wählen wir nun den Ansatz

$$\blacksquare \mathbb{A} = \mu \mathbb{J} \tag{45}$$

so folgt mit (42) das erweiterte COULOMB'sche Gesetz

$$\nabla \bullet \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \bullet \mathbf{A} \right) = \frac{\rho}{\varepsilon} \tag{46}$$

welches mit der LORENTZ-Bedingung (23) übergeht zur bekannten MAXWELL'schen Gleichung

$$\varepsilon \nabla \bullet \mathbf{E} = \nabla \bullet \mathbf{D} = \rho \tag{47}$$

Der gleiche Ansatz mit (43) liefert das erweiterte FARADAY'sche Gesetz mit

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \bullet \mathbf{A} \right) = \mu \mathbf{J} \tag{48}$$

was mit der LORENTZ-Bedingung (23) übergeht in die bekannte MAXWELL'sche Gleichung

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu \mathbf{J} \tag{49}$$

Die letzte MAXWELL'sche Gleichung folgt aus dem realen Skalarteil und ist

$$\nabla \bullet \mathbf{B} = 0 \tag{50}$$

Die erweiterten MAXWELL'schen Gleichungen ohne Einführung der LORENTZ-Bedingung für lineare Medien sind somit:

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu \mathbf{J} - \nabla \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \bullet \mathbf{A} \right) \tag{48}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \tag{44}$$

$$\nabla \bullet \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \bullet \mathbf{A} \right) \tag{46}$$

$$\nabla \bullet \mathbf{B} = 0 \tag{50}$$

Mit der klassischen und meist verwendeten LORENTZ-Bedingung gehen die oben vorgestellten erweiterten MAXWELL'schen Gleichungen über in die heute gebräuchliche Form.

Betrachten wir nun die Quaternion-Stromdichte, so kann diese auch mit der Quatemion-Ge schwindigkeit definiert werden zu:

$$\mathbb{J} \equiv \rho \mathbb{V} = ic\rho + J_1 i + J_2 j + J_3 k \tag{51}$$

Das bedeutet, eine Ladungsdichte ρ bewegt sich im vierdimensionalen Raum. Dies entspricht der Vorstellung eines elektrischen Stromes.

Kinematik – Analog zur Elektrodynamik

Der Impuls eines Geschwindigkeitsfeldes $\mathbb{U}$ auf eine Masse m ist

$$\mathbb{P}_m = m\,\mathbb{U} \tag{52}$$

Die Analogie mit (29) ist deutlich. Weil die elektrischen Potentialfelder bei Ladungen dem gleichen Impulsgesetz gehorchen wie die Geschwindigkeitsfelder bei Massen, lassen sich die Vorgänge der Elektrodynamik analog zur Strömungsmechanik darstellen. Das elektrische Feld des Viererpotentials entsprecht dem Feld der Vierergeschwindigkeit, die Ladung q entspricht der Masse m.

Während in der Definition des Ladungsimpulses (29) ein externes Feld Verwendung findet, wird üblicherweise bei der Definition des Massenimpulses (52) die Eigengeschwindigkeit der Masse m (gegenüber einem Beobachter) verwendet. Die Impulsgesetze für die Ladung und für eine Masse sind demnach nicht gleich definiert. Dies ist nachfolgend geändert. Die vierdimensionale Eigengeschwindigkeit ist in analoger Schreibweise zu (19):

$$\mathbb{U} \equiv \mathrm{i}\frac{c^2}{c} + i\,U_1 + j\,U_2 + k\,U_3 = \mathrm{i}c + i\,U_1 + j\,U_2 + kU_3 = \mathrm{i}c + \mathbf{U} \tag{53}$$

Daraus folgt mit der Definition des Impulses (28) die gesamte Energie einer Masse m

$$W_m = mc^2 \tag{54}$$

und der dreidimensionale Impuls

$$\mathbf{p}_m = m\mathbf{U} \tag{55}$$

Jeder Körper beschreibt im vierdimensionalen Raum – analog zum MINKOWSKI-Raum – eine Weltlinie. In der Physik macht die Definition einer absoluten Geschwindigkeit **U** keinen Sinn, sondern nur die Definition einer relativen Geschwindigkeit **u** zwischen zwei Körpern. Diese Relativgeschwindigkeit ergibt sich aus der Differenz der vierdimensionalen Geschwindigkeiten zweier Körper zu

$$\mathbb{U} = \mathbb{V} - \mathbb{W} = i\left(v_1 - w_1\right) + j\left(v_2 - w_2\right) + k\left(v_3 - w_3\right) = i\,u_1 + j\,u_2 + k\,u_3 = \mathbf{u} \tag{56}$$

In der Physik kann der Impuls nur bezogen auf eine Relativgeschwindigkeit **u** gemessen werden, also zwischen mindestens zwei Körpern. Deshalb wird der Impuls oft definiert gemäß:

$$\mathbf{p}_m = m\mathbf{u} \tag{57}$$

Dem gegenüber wird die gesamte Energie einer Masse nicht zwischen zwei Massen sondern auch auf einzelne Massen definiert, weshalb (54) weiterhin gültig ist.

Ähnlich wie in der Elektrodynamik, welche Kräfte zwischen Ladungen beschreibt, kann für die Kräfte zwischen Massen ein zu (21) äquivalenter Ansatz formuliert werden:

$$\mathbf{G} = \frac{\mathbf{F}_m}{m} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{T} = \nabla \times \mathbf{U} \qquad \text{(58)a,b}$$

mit

$\mathbf{F}_m$:	Kraft auf eine Masse m	[N] = [kg m / s^2]
G:	Kinemassisches Kraftfeld	[m / s^2]
U:	Geschwindigkeitsprojektion der Masse m in R3	[m / s]
ϕ:	Gravitationspotential	[m^2 / s^2]
T:	Drehungsfeld	[1 / s]

Das kinemassische Kraftfeld kann in zwei bekannte Teile zerlegt werden:

$$\mathbf{G}_G = -\nabla\phi \qquad \text{und} \qquad \mathbf{G}_T = -\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \tag{59)a,b}$$

mit

$\mathbf{G}_G$: Gravitationsfeld [m / s²]

$\mathbf{G}_T$: Trägheitsfeld [m / s²]

Damit folgt mit (32) für die Kraft auf eine Masse m mit der Eigengeschwindigkeit $\mathbb{V}$:

$$\mathbb{F}_m = m\frac{d\mathbb{U}}{dt} = -m\left(\mathbb{V}\blacktriangledown\right)\mathbb{U} \tag{60}$$

Das ergibt für den vektoriellen Teil:

$$\mathbf{F}_m = \mathrm{V}.\mathbb{F}_m = m\left[\left(\mathbf{G}+\mathbf{V}\times\mathbf{T}\right)-\mathbf{V}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}+\nabla\bullet\mathbf{U}\right)+i\left(c\mathbf{T}-\frac{\mathbf{V}}{c}\times\mathbf{G}\right)\right] \tag{61}$$

Der erste Term ist die gravitative Lorentz-Kraft

$$\mathbf{F}_m = m\left(\mathbf{G}+\mathbf{V}\times\mathbf{T}\right) \tag{62}$$

Der zweite Term ist analog zur Lorentz-Bedingung und der dritte Term bildet den Zusammenhang

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{V}}{c^2}\times\mathbf{G} \tag{63}$$

Der skalare Teil von (60) ist

$$P_m = \mathrm{S}.\mathbb{F}_m = m\left[\frac{i}{c}\mathbf{v}\bullet\mathbf{G} - ic\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}+\nabla\bullet\mathbf{S}\right)+\mathbf{v}\bullet\mathbf{T}\right] \tag{64}$$

Der erste Term entspricht der Energieaufnahme- bez. –abgabe (Leistung) $P_m = dW/dt$ einer Masse, welche sich in einem Gravitationsfeld bewegt:

$$P_m = \frac{dW}{dt} = m\mathbf{v}\bullet\mathbf{G} \tag{65}$$

Wie bei der elektrischen Kraft läßt sich auch die Gravitationskraft mit (63) in (62) zusammenfassen zu

$$\mathbf{F}_m = m\left[\mathbf{G}+\frac{\mathbf{v}}{c^2}\times\left(\mathbf{v}\times\mathbf{G}\right)\right] \tag{66}$$

Ist die Leistung $P_m = 0$ so ist $\mathbf{v}\cdot\mathbf{G} = 0$, und aus (66) wird

$$\mathbf{F}_m = m\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\mathbf{G} \tag{67}$$

Wie gezeigt, können die Kräfte auf eine Masse analog zur Elektrodynamik beschrieben werden. Will man allerdings die Kraftwirkungen zwischen Massen auf grundlegendere Kräfte zwischen Ladungen zurückführen, so dürfen keine Potentiale ϕ und $\mathbf{U}$ angenommen werden, die unabhängig von φ und $\mathbf{A}$ sind. Es wird in einem anderen Papier[12] dargelegt, daß dies eventuell möglich ist.

Kinematik – nach Newton

Im Gegensatz zu obiger Beschreibung ist in der NEWTON'schen Mechanik die Geschwindigkeit oder die Beschleunigung immer die Bewegung einer Masse relativ zu einem Beobachter. Es gilt die Grundgleichung:

$$\mathbf{F}_N = m\mathbf{a} \tag{68}$$

oder in Quaternion-Schreibweise:

$$\mathbb{F}_N = m\frac{d\mathbb{V}}{dt} = -m\left(\mathbb{V}\blacktriangledown\right)\mathbb{V} \tag{69}$$

Daraus folgt mit $\mathbb{P} = \mathrm{i}W/c + ip_1 + jp_2 + kp_3$ und $\mathbb{V} = \mathrm{i}c + iv_1 + jv_2 + kv_3$ sofort:

$$W = mc^2 \qquad \text{und} \qquad \mathbf{p} = m\mathbf{v} \tag{70}$$

Bevor wir (69) weiter behandeln, soll wie schon vorgängig praktiziert, der Quaternion-Nabla-Operator auf die Geschwindigkeit ausgeübt werden:

$$\blacktriangledown\mathbb{V} = -\nabla\bullet\mathbf{v} + \nabla\times\mathbf{v} + \mathrm{i}\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} \tag{71}$$

womit mit der Definition 1 für den skalaren Teil die bekannte Kontinuitätsgleichung

$$\nabla\bullet\mathbf{v} = 0 \tag{72}$$

folgt, welche nur für $\partial\mathbf{v}/\partial t = 0$ (imaginärer Vektorteil gleich Null) gültig ist. Für den vektoriellen Teil von (69) gilt nun:

$$F_N = V.\mathbb{F}_N = m\left\{\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\left(\nabla\bullet\mathbf{v}\right) - \mathbf{v}\times\left(\nabla\times\mathbf{v}\right) - \mathrm{i}\left(c\nabla\times\mathbf{v} + \frac{\mathbf{v}}{c}\times\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}\right)\right\} \tag{73}$$

Der reelle Teil entspricht wiederum einer physikalisch reellen Kraft. Diese Kraft entspricht der Trägheitskraft einer beschleunigten Masse, welche umgekehrt zur Richtung der Beschleunigung wirkt. Es ist beachtenswert, dass diese Trägheitskraft im mittleren, realen Term von dem aus der Fluidmechanik bekannten Beschleunigungsfeld nicht abweicht, denn dieses ist

$$\mathbf{a} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) - \mathbf{v}\times\left(\nabla\times\mathbf{v}\right) \ . \tag{74}$$

Für eine geradlinige Beschleunigung ergeben beide Gleichungen noch dieselben Trägheitskräfte, nicht aber für krummlinige Beschleunigungen. Der imaginäre Term ist wie bisher Null zu setzen, so dass ein neuer Zusammenhang folgt:

$$\nabla\times\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}}{c^2}\times\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} \tag{75}$$

Man beachte wieder die starke Ähnlichkeit zur Elektrodynamik mit der Gleichung (36). Der skalare Teil von (69) ist:

$$P_N = S.\mathbb{F}_N = m\left\{\mathbf{v}\bullet\left(\nabla\times\mathbf{v}\right) + \mathrm{i}\left(c\nabla\bullet\mathbf{v} + \frac{\mathbf{v}}{c}\bullet\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}\right)\right\} \tag{76}$$

Aus dem reellen Teil ist mit Definition 1 ersichtlich, dass $\nabla\times\mathbf{v}$ immer senkrecht auf $\mathbf{v}$ stehen muss, damit dieser Term zu Null wird.

Quantenmechanik

Relativistische Wellengleichung

CONWAY[2] hat 1937 eine mögliche Schreibweise der relativistischen Wellengleichung mit Quaternionen gezeigt, wenn man die HAMILTON'schen Einheiten als Pre- und Postfaktoren verwendet. Nachfolgend wird mit der hier vorgestellten Quaternion-Notation die relativistische Wellengleichung hergeleitet. Dazu benützen wir den Impulssatz

$$\mathbb{P} = m\mathbb{V} \tag{1}$$

und die Definition der gesamten Energie einer Masse

$$E \equiv c\left|\mathbb{P}\right| \tag{2}$$

so dass daraus und mit der Definition 5 die EINSTEIN'sche Formel hergeleitet werden kann für $\mu = 1..3$:

$$E^2 = m^2c^4 + c^2\sum_{\mu} p_{\mu}^2 \tag{3}$$

Bis hierhin wurde die Energie als eine skalare Funktion ausgedrückt, welche beispielsweise für einen ruhenden Körper einen konstanten Wert annimmt. Die Quantenphysik hat aber gezeigt, dass dies nicht korrekt ist, sondern dass die Energie oszilliert und somit einer Wellengleichung genügen muss. Die Gleichung (3) kann somit nur als ‚statistisch gemittelte' Gleichung einer Ansammlung vieler einzelner „Energieoszillatoren" verstanden werden. Für einzelne sogenannte Elementarpartikel wird die Schwingungseigenschaft der Energie sichtbar.

Gleichung (3) ist bereits in einer quadratischen Form, wie dies auch bei den Differentialoperatoren einer Wellengleichung der Fall ist. Um die Wellengleichung hinter der Energiegleichung zu finden, werden die in der Quantenphysik bereits etablierten Substitutionen für die Differentiale notwendig

$$E \to -\frac{\hbar}{ic}\frac{\partial}{\partial t} \quad \text{und} \quad p_{\mu} \to \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}\ , \tag{4}$$

worin $\hbar$ dem PLANCK'schen Wirkungsquantum entspricht. Diese Differentiale müssen nun auf eine neue Funktion angewendet werden. Dies ist nicht anderes als eine (einheitslose) Wellenfunktion $\mathbf{Y}$. Diese Wellenfunktion kann ebenfalls durch ein komplexes Quaternion dargestellt werden:

$$\mathbf{Y} = i\psi_0 + \psi_1 i + \psi_2 j + \psi_3 k \tag{5}$$

Damit folgt durch Einsetzen in (3) DIRAC's relativistische Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t^2} - \Delta\mathbf{Y} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\mathbf{Y} = 0 \tag{6}$$

Teilchen ohne externe Potentialfelder

DIRAC hat die Energiegleichung (3)

$$E = \pm c\sqrt{m^2c^2 + \sum_{\mu} p_{\mu}^2} \tag{7}$$

durch Wurzelziehen lösen können, indem er Matrizen eingeführt hatte. Anderseits bietet die Gleichung (2) eine andere Möglichkeit ohne Wurzelziehen durch direktes Verwenden des Quaternion-Impulses. Das Vorzeichen des Quaternion-Impulses darf sich darin allerdings nicht ändern. Dies kann durch ein Umformen von Gleichung (2) erreicht werden:

$$\mathbb{E} \equiv \pm c\mathbb{P} \qquad \text{denn es ist} \quad E = \left|\mathbb{E}\right| = \pm c\left|\mathbb{P}\right| \tag{8}$$

Die beiden möglichen Vorzeichen zum Energiezustand in (7) und (8) hat DIRAC veranlasst, die Existenz von Antiteilchen – insbesonders des Positrons – zu postulieren. Durch Einsetzen der Substitutionen (4) in (8) folgt eine weitere Gleichung DIRAC's:

$$\hbar\left(\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x_1} i + \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x_2} j + \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x_3} k + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t}\right) - mc\mathbf{Y} = 0 \ , \tag{9}$$

Diese Gleichung unterscheidet sich auf den ersten Blick zur originalen DIRAC-Gleichung dadurch, dass keine Matrizen verwendet werden. Allerdings lassen sich auch die HAMILTON'schen Einheiten als Matrizen schreiben (siehe Anhang A). Durch Ausmultiplizieren von (9) folgt so das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
&\frac{\hbar}{c}\frac{\partial\psi_0}{\partial t} - mc\psi_0 - \frac{\hbar}{i}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial\psi_3}{\partial x_3}\right) = 0 \\
&\frac{\hbar}{c}\frac{\partial\psi_1}{\partial t} - mc\psi_1 + \hbar\left(i\frac{\partial\psi_0}{\partial x_1} - \frac{\partial\psi_3}{\partial x_2} + \frac{\partial\psi_2}{\partial x_3}\right) = 0 \\
&\frac{\hbar}{c}\frac{\partial\psi_2}{\partial t} - mc\psi_2 + \hbar\left(\frac{\partial\psi_3}{\partial x_1} + i\frac{\partial\psi_0}{\partial x_2} - \frac{\partial\psi_1}{\partial x_3}\right) = 0 \\
&\frac{\hbar}{c}\frac{\partial\psi_3}{\partial t} - mc\psi_3 - \hbar\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial\psi_1}{\partial x_2} - i\frac{\partial\psi_0}{\partial x_3}\right) = 0
\end{aligned} \ , \tag{10}$$

Wie bei dem DIRAC'schen Gleichungssystem werden auch hier vier Gleichungen für ein Teilchen ohne externe Potentialfelder vorgestellt. Analog zum Vorgehen ohne externe Potentiale kann auch mit externen Potentialen vorgegangen werden.

Teilchen im externen Potentialfeld

Durch ein externes Potentialfeld ändert sich der Impuls eines geladenen Teilchens. Definiert man den Impuls eines externen Feldes auf eine Ladung q mit

$$\mathbb{P}_q = -q\mathbb{A} \tag{11}$$

so folgt für dessen Energie

$$E_q \equiv c\left|\mathbb{P}_q\right| = -cq\left|\mathbb{A}\right| \tag{12}$$

und

$$\mathbb{E}_q = \mp cq\mathbb{A} \tag{13}$$

Die Gesamtenergie ist dann

$$\mathbb{E} = c\left(\pm\mathbb{P} \mp q\mathbb{A}\right) \tag{14}$$

Die erweiterte DIRAC Gleichung folgt daraus wieder durch die Substitution der Energie und des Impulses:

$$\hbar\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - qA_1\right)i + \left(\frac{\partial}{\partial x_2} - qA_2\right)j + \left(\frac{\partial}{\partial x_3} - qA_3\right)k + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right\}\mathbf{Y} - \left(mc + q\varphi\right)\mathbf{Y} = 0 \tag{15}$$

Auch in diesem Fall können Quaternionen anstelle von Matrizen verwendet werden.

Zusammenfassung

Mit der Einführung von komplexen Quaternionen nach den Definitionen 1 bis 4 konnten alle Grundgleichungen der Elektrodynamik in sehr kompakter Form erfaßt werden. Es ergeben sich daraus sogar neue Ansätze zur Schreibweise der MAXWELL'schen Gleichungen in Abhängigkeit von der Verwendung der LORENTZ-Bedingung. Dieses Ergebnis darf aber nicht darüber hinwegtäuschen, dass keine befriedigende Erklärung vorliegt, warum gerade diese Art einer vierdimensionalen Zahl in der Elektrodynamik so erfolgreich verwendet werden kann.

Neben der Elektrodynamik eignen sich Quaternionen auch gut zur Anwendung in anderen Gebieten der Physik, wie beispielsweise der Kinematik oder der Quantenmechanik. Ganz besonders interessant ist die Struktur der verwendeten komplexen Quatemionen, hat doch diese Zahl keinen reellen Term mehr.

Danksagung

Ich bedanke mich bei Koen J. van Vlanderen für seine wertvollen Korrekturen zu einigen Vorzeichenfehlern sowie zu der korrekten Definition des Quaternion Laplace Operators. Weitere Arbeiten werden zusammen in einem separaten Papier veröffentlicht.

Referenzen

[1] BORK Alfred M., "Vectors Versus Quaternions – The Letters of Nature", *American Journal of Physics* **34** (1966) 202-211

[2] CONWAY A. W., "Quaternion Treatment of the Relativistic Wave Equation", *Proceedings of the Royal Society London, Serie A* **162** (15 September 1937) 145-154

[3] EINSTEIN Albert, „Zur Elektrodynamik bewegter Körper", *Annalen der Physik und Chemie* **17** (30. Juni 1905) 891-921

[4] GOUGH W., „Quaternions and spherical harmonics", *European Journal of Physics* **5** (1984) 163-171

[5] HAMILTON William Rowan, "On a new Species of Imaginary Quantities connected with a theory of Quaternions", *Proceedings of the Royal Irish Academy* **2** (13 November 1843) 424-434

[6] HEAVISIDE Oliver, „On the Forces, Stresses and Fluxes of Energy in the Electromagnetic Field", *Philosophical Transactions of the Royal Society* **183A** (1892) 423

[7] HONIG William M., "Quaternionic Electromagnetic Wave Equation and a Dual Charge-Filled Space", *Lettere al Nuovo Cimento, Ser. 2* **19** No.4 (28 Maggio 1977) 137-140

[8] MAXWELL James Clerk, „A Treatise on Electricity & Magnetism", (1893) *Dover Publications, New York* ISBN 0-486-60636-8 (Vol. 1) & 0-486-60637-6 (Vol. 2)

[9] Meyl Konstantin, „ Elektromagnetische Umweltverträglichkeit", *Indel Verlag, Villingen-Schwenningen* Teil **1** ISBN 3-9802542-8-3 (1996) 105

[10] SILBERSTEIN L., "Quaternionic Form of Relativity", *Philosphical Magazine, Ser. 6* **23** (1912) 790-809

[11] TAIT Peter Guthrie, "An elementary Treatise on Quaternions", *Oxford University Press* 1st Edition (1875)

[12] WASER André, „Die Gravitation als Folge einer variablen Lichtgeschwindigkeit?", *AW-Verlag*, www.aw-verlag.ch (in Publikation)

[13] WILSON E. B., "Vector Analysis of Josiah Willard Gibbs – The History of a Great Mind", *Charles Scribner's Sons* New York (1901)

[14] YI Yong-Gwan, "On the Nature of Relativistic Phenomena", *Apeiron* **6** Nr.3-4 (July-Oct. 1999)

Anhang A

Nach Arthur CAYLEY lassen sich komplexe Zahlen als Matrizen darstellen:

$$\mathrm{a} + \mathrm{ib} = \begin{pmatrix} \mathrm{a} \\ \mathrm{b} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathrm{i} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Beispiel:

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{ii} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1 \tag{2}$$

Die HAMILTON'schen Einheiten der Quaternionen bilden zusammen mit den Zahlen 1 und –1 eine nicht-ABEL'sche Gruppe achter Ordnung, deren ersten vier positiven Elemente sind:

$$i = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \quad j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad k = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \quad 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Setzt man nun für die imaginäre Einheit i die Matrix aus (1) ein, so folgt:

$$i = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Das Quadrat dieser Matrizen ergibt jeweils –1, wie es die HAMILTON'sche Definition (2) verlangt.