

Paul Dobrinski, Gunter Krakau, Anselm Vogel

Physik für Ingenieure

**Paul Dobrinski, Gunter Krakau,
Anselm Vogel**

Physik für Ingenieure

11., durchgesehene Auflage



Teubner

Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie;
detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <<http://dnb.d-nb.de>> abrufbar.

1. Auflage 1970

11., durchgesehene Auflage Dezember 2006

Alle Rechte vorbehalten

© B. G. Teubner Verlag / GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden 2006

Lektorat: Ulrich Sandten / Kerstin Hoffmann

Der B. G. Teubner Verlag ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media.

www.teubner.de



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Waren- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Umschlaggestaltung: Ulrike Weigel, www.CorporateDesignGroup.de

Satz: deckermedia GbR, Vechede

Druck und buchbinderische Verarbeitung: Strauss Offsetdruck, Mörlenbach

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Printed in Germany

ISBN 978-3-8351-0020-6

Vorwort

Als wir 1970 die erste Auflage dieses Physikbuches vorlegten, geschah es in der Überzeugung, dass die Physik als Grundlagenfach für den Ingenieur in der Ausbildung und in der Praxis ständig an Bedeutung gewinnt. Das gilt sicher heute mehr denn je. Besonders die immer wichtiger werdende sog. „Hochtechnologie“ basiert unmittelbar auf gründlicher Beherrschung der Physik.

Die Physik hat für das technische Studium im Wesentlichen zwei Aufgaben zu erfüllen: Einerseits sollen Kenntnisse über physikalische Gesetzmäßigkeiten vermittelt werden, die für das Verständnis und die Beherrschung technischer Probleme notwendig sind; in dieser Beziehung ist die Physik Hilfswissenschaft der Technik. Andererseits ist ein wesentlicher Teil des modernen technischen Denkens „physikalisches Denken“.

Um die erste dieser Aufgaben zu erfüllen, würde es fast genügen, möglichst viele Tatbestände säuberlich geordnet und nummeriert mitzuteilen. Die zweite Aufgabe würde jedoch damit sicher nicht erfüllt. Wir halten sie aber für die weitaus wichtigere und haben uns daher bemüht, die Prinzipien und Methoden des physikalischen Denkens immer herauszustellen: Eindeutige Definitionen der Begriffe; Größen und Einheiten; klare Unterscheidung zwischen Axiom, Erfahrungstatsache und mathematischem Formalismus; Einführung von Modellvorstellungen – d.h. „vereinfachten Bildern der Wirklichkeit“ – deutliches Aufzeigen der Grenzen der jeweiligen Modelle; Verfeinerung der Modelle; soweit möglich, logische Ableitung neuer Tatsachen aus vorher bekannten oder bewiesenen. Dabei haben wir im Zweifelsfall dem physikalischen Verständnis den Vorzug gegeben gegenüber der oft kürzeren und eleganteren mathematisch-formalen Herleitung.

Soweit es diesem physikalischen Verständnis dienlich ist, gehen wir von Versuchsbeschreibungen (insgesamt 147) aus. Alle Gleichungen sind grundsätzlich Größengleichungen d.h., die Formelzeichen darin (so weit wie möglich nach DIN- bzw. IUPAP-Empfehlungen) stehen für Maßzahl mal Einheit.

Am Anfang eines jeden Kapitels wird ein Überblick über seine Bedeutung und seinen Inhalt gegeben.

Durch verschiedene Druckarten wird unterschiedliche Wichtigkeit des Stoffes gekennzeichnet: In normaler Schriftgröße ist der fortlaufende Text gedruckt. Betonungen sind darin durch Sperrung hervorgehoben; wichtige Definitionen, Sätze, Gleichungen und Zusammenfassungen sind durch unterlegte Rasterung gekennzeichnet. Aufgaben, die der Vertiefung und Einübung des neuen Stoffes dienen, sowie Einzelheiten und Besonderheiten, die z.B. der eilige Leser auch zunächst überspringen kann, erscheinen im Kleindruck. Die logische Gliederung durch Überschriften ist halbfett gedruckt. Formelbuchstaben, und nur diese, sind kursiv gedruckt.

Der Stoff selbst wird nicht als sog. „technische Physik“ angeboten, denn dafür haben sich spezielle technische Fächer entwickelt. Wir haben daher bewusst innerhalb der Mechanik die Statik weggelassen, in der Wärmelehre keine „Technische Wärmelehre“ und in der Elektrizitätslehre keine „Elektrotechnik“ gebracht. Zweifellos aber ist es Aufgabe einer „Physik für Ingenieure“, die Verbindung zur Technik immer wieder herzustellen: Durch

stichwortartige Hinweise auf technische Anwendungen, mittels durchgerechneter Beispiele, möglichst aus der technischen Praxis, und mit Hilfe eben solcher Aufgaben verschiedenen Schwierigkeitsgrades, deren Lösungen im Anhang des Buches (nach einer allgemeinen Anleitung zur Aufgabenlösung) angegeben werden. Wir verwenden nur SI-Einheiten.

An mathematischen Kenntnissen setzen wir die Elemente der Infinitesimalrechnung und der Vektoralgebra voraus, wobei die Differentiale als endliche Größen behandelt werden. Dies erleichtert die Benutzung der Infinitesimalrechnung und ist heute allgemein in Physik und Technik üblich. Wir halten uns hierbei hauptsächlich an Brauch, W.; Dreyer, H.J.; Haacke, W.: Mathematik für Ingenieure [1].

Mehrere Gebiete der Physik haben wir unter übergeordneten Begriffen zusammengefasst. So sind alle Schwingungen und Wellen (einschließlich der Materiewellen) in einem Abschnitt enthalten, da sie sich alle mit dem gleichen Formalismus behandeln lassen. Trotzdem kann der Leser z.B. auch nur die mechanischen Schwingungen und Wellen durcharbeiten und die elektromagnetischen jeweils überspringen. Ebenso wird die Festkörperphysik, die an Bedeutung ständig zunimmt, in einem Abschnitt zusammenhängend dargestellt. Zugunsten einer straffen Darstellung wird hier auf die Benützung der Wellenzahl und auf die Potentialdarstellung bei PN-Übergängen und dergleichen verzichtet. Die magnetischen Eigenschaften der Festkörper werden allerdings im Abschnitt „Das magnetische Feld“ mitbehandelt, da sie dort eine wesentliche Rolle spielen. Der letzte Abschnitt schließlich bringt nur die spezielle Relativitätstheorie, unter anderem deshalb, weil es für die allgemeine noch keine technische Anwendung gibt.

Trotz dieser Einschränkungen dürfte der Stoffumfang in vielen Fällen das überschreiten, was während des Ingenieurstudiums an Physik durchgearbeitet wird, insbesondere da vielerorts Stundenkürzungen Mode sind, die dazu führen, dass Ingenieurstudenten nicht mehr so viele physikalische Grundlagen vermittelt werden, wie sie für die moderne Technik heutzutage unbedingt nötig sind. Umso mehr scheint es uns sinnvoll, dass dieses Buch noch jenseits des Studiums als „Handbuch“ des Ingenieurs dienen kann. Die Auswahl, die beim Studium getroffen werden muss, bleibt dem Benutzer überlassen. Um dies zu erleichtern, sind die einzelnen Abschnitte, so weit wie möglich, in sich abgeschlossen. Wir meinen, dass das Buch dem Leser auch neben und insbesondere nach dem Studium nützlich sein soll. Für tiefer gehendes Studium findet sich im Anhang eine Liste weiterführender Literatur; Zahlen in eckigen Klammern im Text verweisen auf die einzelnen Stellen in dieser Liste. Für manche Anregung danken wir Prof. Dr. E. Braun, Braunschweig, Prof. Dr. W. Buckel, Karlsruhe, Prof. Dr. H. K. Hartmann, Gießen, Prof. Dr. A. Scharmann, Gießen, und Prof. Dr. W. Walcher, Marburg. Auch den Damen und Herren des Verlages B. G. Teubner gilt unser Dank.

Immer neue Verbesserungsvorschläge von vielen Seiten und eigene neue Erfahrungen führten bei den meisten früheren Auflagen zu weit über 1000 Änderungen gegenüber der 1. Auflage.

Für weitere Anregungen sind wir natürlich stets dankbar.

Hannover, Regensburg, München, im Sommer 2003

Die Verfasser

Inhalt

Formelzeichen	11
Einleitung	15
1 Mechanik	
1.1 Kinematik der geradlinigen Bewegung	17
1.1.1 Beschreibung einer Bewegung	17
1.1.2 Gleichförmige Bewegung	23
1.1.3 Ungleichförmige Bewegung	24
1.1.4 Richtung von Bewegungen	29
1.2 Kinematik der Drehbewegung	36
1.2.1 Gleichförmige Kreisbewegung	36
1.2.2 Ungleichförmige Kreisbewegung	40
1.2.3 Vergleich zwischen geradliniger und Kreisbewegung	44
1.2.4 Allgemeine Bewegung eines Massenpunktes	45
1.3 Dynamik der geradlinigen Bewegung	49
1.3.1 Erstes Newtonsches Axiom	49
1.3.2 Zweites Newtonsches Axiom	49
1.3.3 Drittes Newtonsches Axiom	56
1.3.4 Übergeordnete Begriffe	65
1.4 Massenanziehung oder Gravitation	84
1.4.1 Schwere Masse	84
1.4.2 Gravitationsgesetz	85
1.4.3 Schwerefeld oder Gravitationsfeld	87
1.5 Dynamik der Drehbewegungen	91
1.5.1 Massenpunkt	91
1.5.2 Starrer Körper	94
1.5.3 Drehimpuls	104
1.5.4 Planetenbewegung	120
1.6 Mechanik der Flüssigkeiten und Gase	124
1.6.1 Ruhende Flüssigkeiten	124
1.6.2 Ruhende Gase	134
1.6.3 Strömende Flüssigkeiten und Gase	138
2 Wärmelehre	
2.1 Temperatur	162
2.1.1 Größe und Einheiten	162
2.1.2 Temperaturabhängige Erscheinungen – Thermometer	165
2.2 Verhalten der Körper bei Temperaturänderung	166
2.2.1 Feste Körper	166
2.2.2 Flüssigkeiten	168
2.2.3 Gase	169

2.3	Energie und Wärme	176
2.3.1	Kinetische Gastheorie	177
2.3.2	Innere Energie	181
2.4	Erster Hauptsatz der Wärmelehre	189
2.4.1	Geschichtliche Entwicklung	189
2.4.2	Erster Hauptsatz	190
2.4.3	Allgemeine Zustandsänderung idealer Gase	191
2.4.4	Zustandsgleichung realer Gase und Dämpfe	196
2.4.5	Aggregatzustände	200
2.5	Luffeuchte	208
2.6	Transportvorgänge	210
2.6.1	Konvektion oder Wärmeströmung	211
2.6.2	Wärmeleitung	212
2.6.3	Strahlung	214
2.6.4	Diffusion	217
2.7	Entropie und zweiter Hauptsatz der Wärmelehre	220
2.7.1	Reversible und irreversible Vorgänge, Entropie	220
2.7.2	Zweiter Hauptsatz der Wärmelehre	229
2.7.3	Thermische Maschinen	231
3 Elektrizität und Magnetismus		
3.1	Ladung und elektrisches Feld	233
3.1.1	Elektrische Ladung	234
3.1.2	Elektrisches Feld	237
3.1.3	Materie im elektrischen Feld	252
3.2	Elektrischer Strom	261
3.2.1	Grundlegende Versuche	261
3.2.2	Elektrische Leitung in Festkörpern	265
3.2.3	Elektrische Leitung in Flüssigkeiten	275
3.2.4	Galvanische Elemente	278
3.2.5	Thermoelektrische Erscheinungen	281
3.2.6	Elektrische Leitung im Vakuum und in Gasen	283
3.3	Das magnetische Feld	294
3.3.1	Grundlegende Erscheinungen	294
3.3.2	Größen des magnetischen Feldes	297
3.3.3	Kraftwirkung magnetischer Felder	307
3.3.4	Elektromagnetische Induktion	310
3.3.5	Materie im magnetischen Feld	319
3.3.6	Verknüpfung von elektrischen und magnetischen Feldern, Maxwellsche Gleichungen	332
3.3.7	Vergleich der Größen des Gravitationsfeldes sowie des elektrischen und magnetischen Feldes	336
3.3.8	Anwendungen der elektromagnetischen Induktion	337
4 Strahlenoptik		
4.1	Abweichungen von der geradlinigen Lichtausbreitung	352
4.1.1	Reflexion	352
4.1.2	Brechung	356

4.2	Abbildende Systeme	367
4.2.1	Das Auge	367
4.2.2	Optische Instrumente	369
4.3	Lichtgeschwindigkeit	374
5 Schwingungs- und Wellenlehre		
5.1	Schwingungen	376
5.1.1	Grundbegriffe	376
5.1.2	Ungedämpfte elastische Sinusschwingungen	379
5.1.3	Quasielastische Schwingungen	383
5.1.4	Gedämpfte Schwingungen	388
5.1.5	Selbsterregte Schwingungen	393
5.1.6	Erzwungene Schwingungen	395
5.1.7	Andere Schwingungsformen	403
5.1.8	Überlagerung von Schwingungen	405
5.1.9	Gekoppelte Schwingungssysteme	410
5.2	Wellen	414
5.2.1	Grundbegriffe	415
5.2.2	Beschreibung einer Sinuswelle	419
5.2.3	Reflexion von eindimensionalen Wellen	425
5.2.4	Überlagerung von eindimensionalen Wellen	427
5.2.5	Dreidimensionale Wellen	432
5.2.6	Anwendungen des Huygens-Fresnelschen Prinzips auf dreidimensionale Wellen	458
5.2.7	Polarisation	487
5.2.8	Absorption von Wellen	493
5.3	Der Dualismus von Wellen und Teilchen	494
6 Atom- und Kernphysik		
6.1	Atomhülle	502
6.1.1	Experimentelle Grundlagen	502
6.1.2	Modellvorstellungen	508
6.1.3	Wichtige Anwendungen der Atomphysik	536
6.2	Atomkerne	545
6.2.1	Natürliche Radioaktivität	545
6.2.2	Messverfahren	550
6.2.3	Aufbau und Umwandlung von Kernen	553
6.2.4	Anwendung der Kernenergie	564
6.2.5	Strahlenwirkung	570
7 Festkörperphysik		
7.1	Aufbau der Festkörper	574
7.1.1	Amorphe Stoffe	574
7.1.2	Kristalle	575
7.1.3	Bindungsarten	581
7.2	Mechanische Eigenschaften	583
7.3	Energiebändermodell	586

7.4 Elektrische Leitung	588
7.4.1 Metallische Leiter	589
7.4.2 Isolatoren	590
7.4.3 Halbleiter	590
7.4.4 Supraleitung	616
7.4.5 Josephson-Effekte	620
7.4.6 Quanten-Hall-Effekt	620
7.5 Lumineszenz	639
7.5.1 Grundlegende Erscheinungen	639
7.5.2 Deutung der Festkörper-Lumineszenz	642
7.5.3 Anwendungen	649
8 Relativitätstheorie	
8.1 Relativität in der Newtonschen Mechanik	652
8.1.1 Zwei Beobachter bewegen sich relativ zueinander geradlinig und gleichförmig, Galileitransformation	652
8.2 Spezielle Relativitätstheorie	654
8.2.1 Lorentztransformation	655
8.2.2 Relativistische Dynamik	662
8.2.3 Relativistische Effekte in der Elektrodynamik	666
Anhang	
Anleitung zum Lösen physikalischer Aufgaben	672
Lösungen der Aufgaben	673
Einheiten und Einheitensysteme	687
Tafeln	689
Physikalische Konstanten	692
Verzeichnis weiterführender Literatur	693
Sachverzeichnis	695
Periodensystem der Elemente	nach Seite 704

Formelzeichen ¹⁾

1 Mechanik

A	Fläche	Q	Volumenstrom
\vec{a}	Beschleunigung	Re	Reynoldssche Zahl
c_A	Auftriebsbeiwert	r	Radius
c_W	Widerstandsbeiwert	\vec{s}	Weg, Länge
D	Federkonstante, Richtgröße	t	Zeit
D	Grenzschichtdicke	\vec{u}	Geschwindigkeit
\vec{F}	Kraft	V	Volumen
F_A	Auftriebskraft	\vec{v}	Geschwindigkeit
F_B	Bodendruckkraft	W	Arbeit, Energie
F_D	Aufdruckkraft	W_{kin}	kinetische Energie
F_D	Druckwiderstandskraft	W_{pot}	potentielle Energie
F_G	Gewichtskraft	W_{rot}	Rotationsenergie
F_N	Normalkraft	W_B	Beschleunigungsarbeit
F_R	Reibungskraft	W_H	Hubarbeit
F_{RR}	Rollwiderstand	W_R	Reibungsarbeit
F_S	Seitendruckkraft	W_E	elastische Arbeit
F_W	Strömungswiderstand	x, y, z	Raumkoordinaten
F_t	Tangentialkraft	$\vec{\alpha}$	Winkelbeschleunigung
F_{zp}	Zentripetalkraft	α	Anstellwinkel
F_{zf}	Zentrifugalkraft	Γ	Zirkulation
f	Rollreibungslänge	γ	Gravitationskonstante
\vec{G}	Gravitationsfeldstärke	η	dynamische Zähigkeit, Viskosität
g	Fallbeschleunigung	η	Wirkungsgrad
h	Höhe	μ	Gleitreibungszahl
I	Flächenträgheitsmoment	μ'	Haftreibungszahl
J	Massenträgheitsmoment	μ_R	Rollreibungszahl
\vec{L}	Drehimpuls	ν	kinematische Zähigkeit
l	Länge	ρ	Dichte
\vec{M}	Drehmoment	σ	Oberflächenenergiedichte
m	Masse	φ	Fluidität
N	Anzahl der Umdrehungen	φ	Winkel
n	Drehzahl	χ	Kompressibilität
P	Leistung, Energiestrom	ω	Winkelgeschwindigkeit
\vec{p}	Bewegungsgröße, Impuls	$\Delta\tau$	Zeitabschnitt
p	Druck		

2 Wärmelehre

A_r	Atommassenverhältnis oder relative Atommasse	c_p	spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck
b	Beweglichkeit	c_v	spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen
C	Wärmekapazität	D	Diffusionskoeffizient
c	spezifische Wärmekapazität	f	Zahl der Freiheitsgrade der Energiespeicherung
c_A	molare Wärmekapazität	H	Enthalpie
c_{Ap}	molare Wärmekapazität bei konstantem Druck	h	spezifische Enthalpie
c_{AV}	molare Wärmekapazität bei konstantem Volumen	I	Informationsgehalt

¹⁾ Es werden jeweils nur die Formelzeichen angegeben, die in den betreffenden Abschnitten zusätzlich zu den bereits früher angegebenen auftreten.

I_w	Wärmestrom	α_0	linearer Ausdehnungskoeffizient bei 0 °C
k	Boltzmannkonstante	β	Druckkoeffizient
k	Wärmedurchgangskoeffizient	β_0	Druckkoeffizient bei 0 °C
M_r	Molekülmassenverhältnis oder -zahl (nach DIN: relative Molekülmasse)	γ	Volumenausdehnungskoeffizient
m_M	Masse eines Moleküls	γ_0	Volumenausdehnungskoeffizient bei 0 °C
N	Anzahl der Moleküle oder Atome	ε	Emissionsgrad
N_A	Avogadro-Konstante	ε	Leistungszahl einer Wärmepumpe
n	Teilchendichte	ε	Verdichtungsverhältnis
Q	Wärme, Wärmenergie	η	Wirkungsgrad
R	allgemeine Gaskonstante	η_{ideal}	idealer Wirkungsgrad
R_S	spezifische Gaskonstante	ϑ	Temp. in °C ($\vartheta = (T - 273,15 \text{ K}) \text{ °C/K}$)
R_W	Wärmewiderstand	κ	Verhältnis der spezifischen Wärmekapazitäten, Adiabatenexponent
S	Entropie	λ	Wärmeleitfähigkeit
s	spezifische Entropie	v	Stoffmenge
T	absolute Temperatur	σ	Strahlungskonstante
u	atomare Masseneinheit	φ	absolute Luftfeuchte
V_s	spezifisches Volumen	φ	Einspritzverhältnis
z	Stoßzahl	φ_{rel}	relative Luftfeuchte
α	Absorptionsgrad	ϱ	Reflexionsgrad
α	linearer Ausdehnungskoeffizient		

3 Elektrizität und Magnetismus

\ddot{A}	elektrochemisches Äquivalent	U	elektrische Spannung, Effektivspannung
A_H	Hallkoeffizient	u	Momentanwert der elektrischen Spannung
B	Blindleistung	\hat{u}	Scheitelwert der elektrischen Spannung
\vec{B}	magnetische Induktion	\ddot{u}	Übersetzungsverhältnis
C	Kapazität	v_D	Driftgeschwindigkeit
D	Durchgriff	w	Energiedichte
\vec{D}	elektr. Erregung, Verschiebungsdichte	X	Blindwiderstand
\vec{E}	elektrische Feldstärke	Y	Scheinleitwert
e_0	Elementarladung	Z	Scheinwiderstand
F	Faraday-Konstante	z	Wertigkeit
\vec{F}_L	Lorentzkraft	z	thermoelektrische Effektivität
G	Wirkleitwert		
\vec{H}	magnetische Erregung	α	Temperatur-Koeffizient des elektrischen Widerstandes
I	elektrischer Strom, Effektivstrom	α	Thermokraft, Seebeckkoeffizient
i	Momentanwert des elektrischen Stroms	ε_r	Dielektrizitätszahl
\hat{i}	Scheitelwert des elektrischen Stroms	ε_0	elektr. Feldkonstante, Influenzkonstante
\vec{J}	magnetische Polarisation	κ	spezifische elektrische Leitfähigkeit
\vec{J}_A	Amperesches magnetisches Moment	κ	magnetische Suszeptibilität
\vec{J}_C	Coulombsches magnetisches Moment	μ_r	Permeabilitätszahl
L	Induktivität	μ_0	magnetische Feldkonstante, Induktionskonstante
M	Gegeninduktivität	Π	Peltierkoeffizient
\vec{M}	Magnetisierung	ϱ	elektrische Raumladungsdichte
N	Windungszahl	ϱ	spezifischer elektrischer Widerstand
P	Wirkleistung	ϱ	elektrische Flächenladungsdichte
P_{mom}	Momentanleistung	τ	Zeitkonstante
P_B	Blindleistung	Φ	magnetischer Fluss
P_S	Scheinleistung	φ	Phasenwinkel
\vec{p}	elektrisches Dipolmoment	φ	Potential
Q	elektrische Ladung	ψ_{el}	elektrischer Erregungsfluss
q	Momentanwert der elektrischen Ladung	χ	spezifische magnetische Suszeptibilität
R	elektrischer Widerstand, Wirkwiderstand		
S	Steilheit		
\vec{S}	elektrische Stromdichte		

4 Strahlenoptik

a	Objektweite	n_L	Brechzahl gegen Luft
a'	Bildweite	r	Krümmungsradien von Linsen
c	Lichtgeschwindigkeit	u	maximale Unschärfe
c_0	Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	y	Objektgröße
D	Brechkraft	y'	Bildgröße
d	Linsendicke	α	brechender Winkel
d_B	Blendendurchmesser	β'	Abbildungsmaßstab
e	Hauptebenenabstand zweier Linsen	Γ	Vergrößerung
f	Brennweite	δ	Ablenkungswinkel
f'	bildseitige Brennweite	ε	Winkel gegen Flächennormale
\bar{f}	objektseitige Brennweite	ϱ	Reflexionsfaktor
k	Blendenzahl	σ	Öffnungswinkel
n	Brechzahl	φ	Schwinkel

5 Schwingungs- und Wellenlehre

B_V	Leuchtdichte (visuell)	\hat{s}_s	Amplitude d. schwingungsfähigen Systems
b	Dämpfungskonstante	T	Schwingungsdauer
c	Phasengeschwindigkeit	u_E	Spannung des Erregers
D^*	Winkelrichtgröße	u_S	Spannung im schwingungsfähigen System
d	Gangunterschied	V	Hellempfindlichkeitsgrad
E_V	Beleuchtungsstärke (visuell)	v_{Gr}	Gruppengeschwindigkeit
F_E	Kraft des Erregers	\hat{v}	Geschwindigkeitsamplitude
F_e	elastische Kraft	w	Energiedichte
F_t	Trägheitskraft	\bar{w}	zeitlicher Mittelwert der Energiedichte
f	Frequenz	x	Weg der Welle
f_G	Grenzfrequenz	Y	Amplitude allgemein
g	Gitterkonstante	Z	Wellenwiderstand
h	Plancksche Konstante	α	Konstante des Wienschen
I_e	Strahlstärke (energetisch)	α	Verschiebungsgesetzes
I_v	Lichtstärke (visuell)	δ	Extinktionskoeffizient
K	Kopplungsgrad	δ	Abklingkonstante
k	Kreiswellenzahl	ε	Auslenkungswinkel bei Drehschwingungen
L	Schallpegel	$\hat{\varepsilon}$	Amplitude von ε
L_A, L_B, L_C	bewerteter Schallpegel	Λ	logarithmisches Dekrement
L_S	Lautstärkepegel	λ	Wellenlänge
\hat{p}	Schalldruckamplitude	Φ_v	Lichtstrom (visuell)
\hat{p}_0	Bezugsschalldruckamplitude	φ_0	Nullphasenwinkel
p_A	Strahlungsdruck bei Absorption	Ω	Raumwinkel
p_R	Strahlungsdruck bei Reflexion	ω	Kreisfrequenz
Q	Gütefaktor eines Resonators	ω_0	Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems
\bar{S}	Intensität, Schallintensität, Energiestromdichte	ω_d	Eigenkreisfrequenz des gedämpften Systems
s	Ausschlag	ω_r	Resonanzkreisfrequenz
\hat{s}	Amplitude		
s_s	Ausschlag d. schwingungsfähigen Systems		

6 Atom- und Kernphysik

A	Aktivität	D	Tunnelwahrscheinlichkeit
B	Übergangswahrscheinlichkeiten	D	Strahlungsdosis
B_{12}	Übergangswahrscheinlichkeiten	D_q	Äquivalentdosis
B_{21}	Übergangswahrscheinlichkeiten	D	Dosisleistung
a	große Halbachse	$d_{1/2}$	Halbwertsdicke
b	kleine Halbachse	h	Plancksches Wirkungsquantum

\hbar	$= h/2\pi$
J	Ionendosis
\dot{J}	Ionendosisleistung
k	Multiplikationsfaktor
l	Nebenquantenzahl
L_{ges}	Gesamtdrehimpuls
m	magnetische Quantenzahl
m_{H}	Masse des Wasserstoffatoms
m_{e}	Masse des Elektrons
m_{n}	Masse des Neutrons
m_{p}	Masse des Protons
m_{s}	Orientierungsquantenzahl
N	Anzahl der Atome
n	Hauptquantenzahl
q	Bewertungsfaktor
R_{f}	Rydbergfrequenz
R_{H}	Rydbergfrequenz d. Wasserstoffs
R_{KH}	Rydbergkreiswellenzahl d. Wasserstoffs

R_{WH}	Rydbergenergie des Wasserstoffs
$R_{\text{W}\infty}$	Rydbergfrequenz des Wasserstoffs mit $m_{\text{p}}/m_{\text{e}} \approx \infty$
r_{n}	Radius der n -ten Bahn
r_1	Bohrscher Radius
s	Spinquantenzahl
$T_{1/2}$	Halbwertszeit
v_{n}	Geschwindigkeit auf der n -ten Bahn
W_{a}	Ablöse-, Austrittsarbeit
W_{I}	Ionisierungsenergie
W_{K}	Kernbindungsenergie
W_{n}	Energie des Elektrons auf der n -ten Bahn
Z	Kernladungszahl, Ordnungszahl
λ	Zerfallskonstante
μ	Flächendichte
σ	Wirkungsquerschnitt
Ψ	Wellenfunktion
ψ	zeitunabhängige Wellenfunktion

7 Festkörperphysik

A	Stromverteilung in Basisschaltung
B	Stromverstärkung in Emitterschaltung
B	Bruchdehnung
b_+	Löcher-Beweglichkeit
b_-	Elektronen-Beweglichkeit
E	Elastizitätsmodul
G	Schubmodul
H_{k}	kritische magnetische Erregung
I_{B}	Basis-Strom
I_{C}	Cooperpaar-Strom
I_{C}	Kollektor-Strom
I_{D}	Drain-Strom
I_{C}	Diffusions-Strom
I_{DSS}	Drain-Sättigungsstrom
I_{E}	Emitter-Strom
I_{F}	Feld-Strom
I_{sp}	Sperr-Strom
I_{CB0}	Kollektorsperrstrom in Basisschaltung
I_{CE0}	Kollektorsperrstrom in Emitterschaltung
I_{thr}	Schwellenstrom
$K_{\text{J-90}}$	Josephson-Konstante
$N_{\text{C}}/N_{\text{C}}$	Quantenausbeute
n_{A}	Akzeptordichte
n_{C}	Cooperpaardichte
n_{D}	Donatordichte
n_{i}	Eigenleitungsdichte
n_-	Elektronendichte
n_+	Löcherdichte
P_{L}	Lichtleistung
R_{B2}	Teilwiderstände beim Unijunction-Transistor
R_{B1}	
R_{BE}	Basis-Emitter-Widerstand
R_{EB}	Emitter-Basis-Widerstand
R_{eH}	obere Streckgrenze
R_{eL}	untere Streckgrenze

R_{eS}	Streckgrenzenspannung
R_{H}	„Hall-Widerstand“
R_{K}	von-Klitzing-Konstante
R_{m}	Zugfestigkeit
R_{R}	Zerreißspannung
S	Steilheit
T_{S}	Sprungtemperatur
U_{BE}	Basis-Emitter-Spannung
U_{BB}	Basis-Basis-Spannung
U_{CB}	Kollektor-Basis-Spannung
U_{CE}	Kollektor-Emitter-Spannung
U_{D}	Diffusionsspannung
U_{DS}	Drain-Source-Spannung
U_{EB1}	Emitter-Basis 1-Spannung
U_{GS}	Gate-Source-Spannung
U_{H}	Hallspannung
U_{Z}	Zenerspannung
W_{A}	Energieniveau von Akzeptoren
W_{B}	Energieniveau von Aktivatorzentren
W_{D}	Energieniveau von Donatoren
W_{F}	Ferminiveau
W_{L}	tiefste Energie des Leitungsbandes
W_{Li}	Lichtsumme
W_{V}	höchste Energie des Valenzbandes
ΔW_0	Randabstand
α	Scherwinkel
ε	Dehnung
μ	Poissonsche Zahl
σ	Spannung
ϑ_{K}	Klärtemperatur
ϑ_{S}	Schmelztemperatur
Φ_0	Flussquant
Φ_{SQ}	SQUID-Fluss

8 Relativitätstheorie

k	Kontraktionsfaktor
-----	--------------------

m_0	Ruhemasse
-------	-----------

Einleitung

Was ist Physik?

Was ist Physik? Diese Frage ist leichter gestellt als beantwortet. Wir beginnen daher zunächst mit einfachen Eingrenzungen, über welche Übereinstimmung herrscht.

Allgemeine Zustimmung findet sicher die Aussage, die Physik sei die Naturwissenschaft, in welcher versucht wird, möglichst viele Gesetzmäßigkeiten welche in der Welt der Körper herrschen, zu ergründen und zu verstehen. Hierauf beruht ja auch der Name; im Griechischen heißt Körper „*physis*“. Gemeint sind hierbei natürlich unbelebte materielle Körper. Diese erste Beschreibung der Physik ist sicher richtig. Trotzdem ist sie heute nicht mehr hinreichend, denn viele der physikalischen Gesetzmäßigkeiten und der Denkmethoden finden inzwischen auch vielfältige Anwendungen in der belebten Natur, also der Biologie, und sogar in so komplexen Systemen, wie sie beispielsweise beim Zusammenleben vieler Menschen existieren, also in der Soziologie. Dies beruht auf der Erfahrung, dass sich erstaunlich viele vermeintlich völlig verschiedene Erscheinungen in den verschiedensten Gebieten mit gleichen Methoden beschreiben lassen.

Das ist offenbar ein entscheidender Gesichtspunkt: Die großen Erfolge der Physik, welche sie auch für viele andere Bereiche, nicht zuletzt auch für die Ingenieurwissenschaften, attraktiv macht, beruhen unter anderem darauf, dass sich die ungeheure Vielfalt der Natur mit verhältnismäßig wenigen Grundprinzipien beschreiben lässt.

Diese Methoden haben sich im Lauf der Jahrhunderte entwickelt. Der Anstoß dazu kam hierbei immer aus zwei Richtungen: Die eine ist das uralte Ringen der Menschen um Erkenntnis, die Frage nach dem Wesen der Welt und dem Standort der Menschen in ihr, also die Philosophie. Die andere Richtung, aus der von Anfang an immer wieder wichtige Anstöße kamen, ist die Technik, also das Bestreben, mit Hilfe der erkannten Naturgesetze die Welt in für uns nützlicher und angenehmer Weise zu verändern. Es ist selbstverständlich, dass Technik ohne ein gründliches Verstehen physikalischer Erkenntnisse nicht möglich ist.

Wie aber gewinnt man diese Erkenntnis? Hier gilt es nun, mit einer naiven Vorstellung aufzuräumen. Nach einer weit verbreiteten Meinung stellen die Physiker mit ihren geschickten Experimenten Fragen an die Natur, worauf diese dann die in ihr herrschenden Gesetze preisgibt. Man stellt sich die Physiker also etwa wie Forschungsreisende vor, die beispielsweise eine noch unbekannte, aber schon existierende Insel entdecken.

So einfach ist die Sache aber nicht, auch wenn man beim flüchtigen Lesen vieler Lehrbücher, auch des vorliegenden, in denen die physikalischen Gesetze so schön systematisch aufbereitet sind, diesen Eindruck gewinnen könnte. Es beginnt nämlich bereits bei der Tatsache, dass wir als Menschen zur Beschreibung der Natur immer wieder die dazu nötigen Begriffe erfinden mussten. Dies sei an einem simplen Beispiel erläutert, dem Begriff der Geschwindigkeit. Nirgends in der Natur konnten wir diesen Begriff entdecken. Wir mussten ihn erst durch eine willkürliche – hinzugefügt sei: und zweckmäßige – Definition erfinden, um mit ihm in vernünftiger Weise Bewegungsabläufe von Körpern beschreiben zu können. Die Geschwindigkeit ist bekanntlich definiert als Quotient aus einem Weg und der dafür benötigten Zeit. Genauso gut – vielleicht nicht so praktisch – hät-

ten wir aber auch den Reziprokwert – nennen wir ihn „Langsamkeit“ – nämlich den Quotienten aus einem Zeitintervall und dem in diesem zurückgelegten Weg zur Beschreibung von Bewegungen erfinden können. Dieses Beispiel, das man auf viele andere physikalische Größen erweitern kann, soll zeigen, wie man vorgeht, um die Natur zu beschreiben. Erst die Verknüpfung vieler solcher von uns Menschen erfundener Begriffe ermöglichte die „Entdeckung“ und Formulierung von Naturgesetzen. Dass Letztere sich im Allgemeinen auch noch mathematisch formulieren lassen, und dass man häufig durch Anwenden mathematischer Logik hieraus weitere Gesetze finden kann, gehört zu den großen unbegreiflichen Wundern und ist logisch nicht begründbar.

Bei allen großartigen Erfolgen muss man sich noch etwas weiteres klarmachen: Es liegt in der Denkweise der Physik begründet, dass wir, genau genommen, niemals die Wirklichkeit selbst zu beschreiben in der Lage sind, sondern nur mehr oder weniger gute Modelle der Wirklichkeit. Dies hat auch die geschichtliche Entwicklung gezeigt. Immer wieder stießen die Physiker durch theoretische Überlegungen und neue Experimente an die Gültigkeitsgrenzen ihrer Modellvorstellungen und konnten zufrieden sein, wenn ihre bisherigen Vorstellungen sich wenigstens als unter bestimmten Bedingungen gültige Teilmodelle eines besseren, umfassenderen Modells erwiesen. Hin und wieder ging es dabei sogar recht revolutionär zu, wie z.B. bei der Erfindung der Elektrodynamik, der Relativitätstheorie oder der Quantenmechanik. Wenn man so will, ist die Geschichte der Physik eine Geschichte immer besser an die Wirklichkeit angepasster Modelle, wobei die Wirklichkeit vermutlich die Rolle eines Grenzwertes im mathematischen Sinn spielt, an den man sich immer dichter annähern kann, den man aber niemals erreicht. Dies alles sollte uns Menschen zu einiger Bescheidenheit veranlassen.

Nun, bei aller Bescheidenheit: Die Erfolge der Physik, was die Naturerkenntnis und nicht zuletzt die technischen Anwendungen angeht, sind enorm. Und was die Physik so überzeugend macht, ist das Verfahren, wo es irgend geht, theoretische Überlegungen durch Experimente zu untermauern. Gerade bei der rasanten Entwicklung der Technik in unserer Zeit bietet deshalb allein die Kenntnis der physikalischen Gesetze und die Beherrschung ihrer Methoden die sichere Basis, von der aus Ingenieure die Zukunft meistern können.

1 Mechanik

Die Mechanik ist das älteste Gebiet der Physik. In diesem Abschnitt behandeln wir die sog. klassische Mechanik, die im 20. Jahrhundert um die relativistische Mechanik für Vorgänge mit Geschwindigkeiten, die nicht mehr klein gegen die Lichtgeschwindigkeit sind (s. Abschn. 8), und die sog. Quantenmechanik (s. Abschn. 5.3, 6 und 7), welche die besonderen Eigenschaften der Elementarteilchen berücksichtigt, erweitert werden musste. Diese Erweiterungen beeinträchtigen aber in keiner Weise das sehr große Anwendungsspektrum der klassischen Mechanik. Es reicht von der bloßen Beschreibung von Bewegungsvorgängen in der sog. Kinematik über das Verständnis der Wechselwirkungen von Körpern durch Kräfte, des Austausches von Energie, den Planetenbewegungen bis zur Beantwortung der Frage, warum ein Flugzeug fliegt, in der sog. Dynamik. Wie im ganzen Abschn. 1 sichtbar wird (z.B. auch in vielen Aufgaben), umfasst sie hierbei eine außerordentlich große Vielfalt von technischen Anwendungen. Darüber hinaus liefert sie mit den Definitionen der Größen Kraft, träge Masse, Impuls, Drehimpuls, Arbeit und Energie die Grundlage auch für alle anderen Gebiete der Physik, von der Wärmelehre bis zur Relativitätstheorie. Das auch zur klassischen Mechanik gehörende Teilgebiet der Statik wird in diesem Buch nicht behandelt, zum einen, weil es hierfür umfangreiche Spezialliteratur gibt, zum anderen, weil es im Gegensatz zur Dynamik als Grundlage für die übrige Physik nicht erforderlich ist.

1.1 Kinematik der geradlinigen Bewegung

Die Kinematik beschreibt die Bewegungen der Körper, ohne dabei auf die Kräfte als die Ursachen für die verschiedenen Bewegungsarten einzugehen. Das bleibt der Dynamik (s. Abschn. 1.3) vorbehalten. Zur Einführung in die Kinematik sollen zunächst nur geradlinige Bewegungen erfasst werden.

1.1.1 Beschreibung einer Bewegung

Ein sich bewegendes Körper wechselt seinen Ort, legt also einen bestimmten Weg zurück. Während des Ortswechsels verstreicht eine gewisse Zeit. Die beiden physikalischen Größen Weg und Zeit müssen demnach gemessen werden, wenn eine Bewegung beschrieben werden soll. Dabei muss man den Weg auf einen bestimmten Punkt beziehen, von dem man annimmt, er sei in Ruhe. Seine Wahl ist willkürlich, da es eine absolute Ruhe nicht gibt.

Wenn nichts anderes vereinbart ist, beziehen wir alle Bewegungen auf die ruhend gedachte Erdoberfläche, obwohl auch sie recht komplizierte Bewegungen im Raum, z.B. in Bezug auf die Sonne, macht.

1.1.1.1 Einheiten für Länge und Zeit

Wie sich aus unserer Anschauung ergibt, verläuft alles Geschehen in der Natur in Raum und Zeit. Der Raum wird durch Längen oder Strecken erfasst.

Länge

Zur Längenmessung vergleicht man die zu messende Strecke mit einer als Einheit vereinbarten und gibt an, wie viel mal die Längeneinheit auf die zu messende Strecke entfällt.

Einheiten. Seit 1889 dient als Einheit für die Länge das Meter. Es ist Basiseinheit im Internationalen Einheitensystem¹⁾.

$$1 \text{ Meter} = 1 \text{ m}$$

Vielfache und Teile des Meters sind nach DIN 1301:

$$\begin{array}{llll} 1 \text{ km} = 10^3 \text{ m} & 1 \text{ dm} = 10^{-1} \text{ m} & 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m} & 1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m} \\ 1 \text{ }\mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m} & 1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m} & 1 \text{ pm} = 10^{-12} \text{ m} & \end{array}$$

Die Länge des Meters war bis 1960 festgesetzt als der Abstand zweier Marken auf einem Platin-Iridiumstab von X-förmigem Querschnitt, der im „Büro für Maße und Gewichte“ in Paris bei definierten Temperaturbedingungen aufbewahrt wird. Jeder Staat, der sich der Meterkonvention angeschlossen hat, besitzt eine Kopie, die den Eichämtern als „Urmaß“ diente.

Da diese Festsetzung der Längeneinheit von einem willkürlich angefertigten Körper, dem Urmeter, abhängt, hat die XVII. Generalkonferenz für Maß und Gewicht im Oktober 1983 eine neue Definition der Basiseinheit Meter beschlossen. Diese beruht auf der Festlegung des Wertes für die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum $c_0 = 299\,792\,458 \text{ m/s}$ und damit auch auf der Definition der Zeiteinheit Sekunde (s.u.). Mit beiden Größen gilt jetzt die

Definition: Das Meter ist die Länge der Strecke, die Licht im Vakuum während des Zeitintervalls $(1/299792458) \text{ s}$ durchläuft.

In der Praxis verlassen wir uns meist darauf, dass die Längenmessgeräte – Bandmaße, Endmaße, Schublehren, Messschrauben („Mikrometer“) usw. – richtig messen.

Zeit

Was Zeit ist, lässt sich nicht näher erläutern; wir müssen sie deshalb als eine durch die Erfahrung gegebene Größe hinnehmen³⁾.

¹⁾ Die Einheitensysteme werden in Abschn. 1.3.2.1 behandelt. Siehe hierzu auch Abschn. Einheiten und Einheitensysteme im Anhang.

²⁾ Lies: Kilometer, Dezimeter, Zentimeter, Millimeter, Mikrometer, Nanometer, Picometer. Es darf jeweils nur ein Vorsatz benutzt werden. Dieser ist ohne Zwischenraum vor die Einheit zu setzen. Exponenten beziehen sich auf das ganze Kurzzeichen.

³⁾ Mehr über den Zeitbegriff und den Begriff der Gleichzeitigkeit s. Abschn. 8.2.

Zur Messung der Zeit werden gleiche, sich wiederholende (sogenannte periodische) physikalische Vorgänge aneinandergereiht. Durch eine mechanische oder elektrische Vorrichtung wird abgezählt, wie viele derartige Vorgänge während der Messung stattgefunden haben.

Alle Zeitmessgeräte nennt man Uhren. Man hält darin Pendelschwingungen (Uhrpendel), Drehschwingungen (Unruhe) oder elastische Schwingungen von Quarzkristallen (Quarzuhr) aufrecht oder benutzt charakteristische Schwingungen in bestimmten Atomen.

Einheiten. Eine der wichtigsten sich wiederholenden Erscheinungen ist der Wechsel zwischen Tag und Nacht. Auf ihn bezieht man die Zeiteinheit. Leider ist die Zeit zwischen zwei Sonnenhöchstständen, ein sog. Sonnentag, nicht immer gleich lang. Man bildet deshalb den Mittelwert über ein Jahr (Einheitenzeichen a) und erhält so den sog. mittleren Sonnentag. Um zu bequemeren, praktisch besser verwendbaren Einheiten zu gelangen, hat man den Tag (Einheitenzeichen d) von altersher in 24 Stunden (h), die Stunde in 60 Minuten (min) und diese in 60 Sekunden (s) unterteilt. Ein mittlerer Sonnentag hat somit $60 \cdot 60 \cdot 24 \text{ s} = 86\,400 \text{ s}$. Die Dauer einer vollen Erdumdrehung (ein sog. Sterntag) beträgt nur 86 164 Sekunden.

Die Basiseinheit der Zeit ist im Internationalen Einheitensystem

1 Sekunde = 1 s

Um von den Schwankungen der Erddrehung unabhängig zu sein, benutzt man seit 1967 für die Definition der Sekunde sog. „Atomuhren“. In diesen regt man Cäsium-133-Atome zum Aussenden einer elektromagnetischen Welle an, deren Wellenlänge von etwa 3 cm in einem Bereich liegt, der zum Beispiel auch beim Verkehrsradar benutzt wird. In einem geeigneten Empfänger misst man die Schwingungsdauer dieser Welle. Dann gilt die

Definition: Die Sekunde ist das 9 192 631 770fache der Periodendauer einer Strahlung, die dem Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustandes von ^{133}Cs -Atomen entspricht (s. Abschn. 6.1.2.2).

Solche Atomuhren weisen erst in 2,5 Millionen Jahren einen Fehler von 1 Sekunde auf!

1.1.1.2 Geschwindigkeit

Zur exakten Beschreibung der Bewegung eines Körpers gehört eine laufende Weg- und Zeitmessung. Ein Kraftwagen legt z.B. in 2 h die Strecke 180 km zurück. Ein guter Kurzstreckenläufer läuft 100 m in weniger als 11 s. Will man diese beiden Bewegungsvorgänge miteinander vergleichen, so bedient man sich zweckmäßigerweise einer dritten Größe, die aus den beiden anderen abgeleitet wird, nämlich der Geschwindigkeit.

Definition: Die Geschwindigkeit ist der Quotient aus dem Weg und der Zeit, in der dieser Weg zurückgelegt worden ist

$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{Weg}}{\text{dafür benötigte Zeit}} \quad (1.1)$$

Schreibweise physikalischer Gleichungen

Begriff der physikalischen Größe. Man kann die Vereinbarung oder „Definition“ in Gl. (1.1) auch noch kürzer schreiben, wenn man anstatt der Benennungen Weg, Zeit usw. bestimmte Formelbuchstaben nach DIN 1304 benutzt, und zwar v für die Geschwindigkeit, s für den Weg und t für die Zeit.

$$v = \frac{s}{t} \quad (1.2)$$

Formelbuchstaben repräsentieren in der Physik und Technik physikalische Größen (siehe z.B. auch [1]). Man denke an die oben genannten Beispiele für Kraftwagen und Läufer. Die Angabe: „Ein Kraftwagen fährt in der Zeit 2 die Strecke 180“ ist sinnlos, da wir den Weg in Metern, Kilometern, Meilen oder sonstigen Längeneinheiten, die Zeit z.B. in Sekunden, Minuten, Tagen oder dgl. messen können.

Definition: Der Betrag einer physikalischen Größe, sein Größenwert, ist das Produkt aus Zahlenwert und Einheit.

Somit müsste es oben richtig heißen: $s = 180 \text{ km}$ und $t = 2 \text{ h}$. Daraus ergibt sich dann die Geschwindigkeit

$$v = \frac{s}{t} = \frac{180 \text{ km}}{2 \text{ h}} = 90 \frac{\text{km}}{\text{h}} \quad (1.3)$$

(lies: „Kilometer pro Stunde“; das Wörtchen „pro“ ersetzt gewissermaßen den Bruchstrich.)

Man setzt den Betrag jeder physikalischen Größe also als Produkt aus Zahlenwert (z.B. 180) und Einheit (z.B. km) in die Gleichungen ein und behandelt die Einheiten genau so wie algebraische Zahlen. Den bei der Geschwindigkeit 90 km/h in 2 Stunden zurückgelegten Weg erhält man durch Umstellen von Gl. (1.2)

$$s = v t \quad (1.4)$$

Mit den obigen Werten also: $s = (90 \text{ km/h}) \cdot 2 \text{ h} = 90 \text{ km} \cdot 2 = 180 \text{ km}$. Man darf also die Einheiten wie algebraische Zahlen gegeneinander kürzen (hier h). Das Ergebnis ist ein Weg, wie man an der Einheit km erkennt.

Größengleichungen. Gleichungen, in die man nicht nur reine Zahlen, sondern Größen einsetzt, nennt man Größengleichungen. Diese besitzen folgende Vorteile: Sie beschreiben den physikalischen Sachverhalt, ohne bestimmte Einheiten vorzuschreiben; dadurch erleichtern sie das Verständnis und belasten das Gedächtnis nicht unnötig mit Einheitenvorschriften. Zugleich erlauben sie eine hervorragende Rechenkontrolle und erhöhen dadurch die bei Ingenieuraufgaben immer vorrangige Sicherheit, besonders bei komplizierteren Gleichungen.

Beispiel 1. Es soll geprüft werden, welche der auf S. 19 genannten Geschwindigkeiten (Kraftwagen bzw. 100-m-Läufer) größer ist.

Für den Kraftwagen ist nach Gl. (1.3) die Durchschnittsgeschwindigkeit $v_K = 90 \text{ km/h}$, für den Läufer $v_L = 100 \text{ m}/11 \text{ s} = 9,09 \text{ m/s}$. Um in der gleichen Einheit vergleichen zu können, rechnet man v_K mit Hilfe der Einheitsgleichungen $1 \text{ km} = 10^3 \text{ m}$, $1 \text{ h} = 3,6 \cdot 10^3 \text{ s}$ um und erhält

$$v_K = 90 \frac{10^3 \text{ m}}{3,6 \cdot 10^3 \text{ s}} = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}}; \quad \frac{v_K}{v_L} = \frac{25 \text{ m/s}}{9,9 \text{ m/s}} = 2,75.$$

Der Kraftwagen ist also 2,75 mal so schnell wie der Läufer.

Beispiel 2. Welche Zeit benötigt ein Kraftwagen, der mit der Geschwindigkeit $v = 90 \text{ km/h}$ fährt, für die Strecke 360 km ?

Wir stellen Gl. (1.3) um, $t = s/v$, und setzen die Zahlenwerte und Einheiten ein

$$t = \frac{360 \text{ km}}{90 \text{ km/h}} = \frac{360 \text{ km} \cdot \text{h}}{90 \text{ km}} = 4 \text{ h}.$$

An der Einheit h des Ergebnisses erkennt man, dass man einheitenrichtig gerechnet hat (Einheitenkontrolle durch Größengleichungen).

Durchschnittsgeschwindigkeit oder mittlere Geschwindigkeit, Momentangeschwindigkeit

In den vorstehenden Beispielen wurde jeweils die ganze zurückgelegte Strecke durch die gesamte zu ihrer Bewältigung benötigte Zeit geteilt, ohne zu berücksichtigen, dass Kraftwagen und Läufer nicht auf der ganzen Strecke unverändert schnell sind. Das kann man in einem Weg-Zeit-Diagramm (Bild 1.1) veranschaulichen, das den zurückgelegten Weg s als Funktion der seit dem Start verstrichenen Zeit t darstellt: $s = f(t)$.

In Bild 1.1 nimmt der Weg durchaus nicht gleichmäßig mit der Zeit zu. Nach etwa 50 min hat der Fahrer sogar rund 20 min lang gehalten. Es interessiert aber häufig nur die Zeit t , die z.B. ein Wagen für die gesamte Strecke s braucht. Diesen Wert, in Bild 1.1 also $\bar{v} = s/t = 90 \text{ km/h}$, nennt man die mittlere oder Durchschnittsgeschwindigkeit¹⁾ längs des ganzen Weges $s = 180 \text{ km}$.

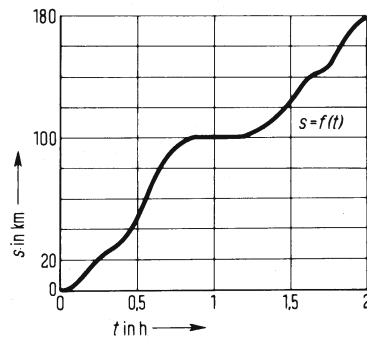


Bild 1.1 Weg-Zeit-Diagramm des von einem Kraftwagen zurückgelegten Weges s in Abhängigkeit von der Zeit t

Definition:

$$\text{Durchschnittsgeschwindigkeit} = \frac{\text{gesamter Weg}}{\text{gesamte dafür benötigte Zeit}}$$

Will man darüber hinaus wissen, wie schnell der Kraftwagen zu bestimmten Zeiten, in Bild 1.2 beispielsweise im Zeitpunkt t_1 , gefahren ist, muss man folgendermaßen vorgehen:

Man lässt zur Zeit t_1 eine Stoppuhr anlaufen und liest gleichzeitig auf dem Kilometerzähler den Weg s_1 ab. Nach einer kurzen Zeit Δt von z.B. 60 s zeigt die Uhr den Zeitpunkt t_2 und

¹⁾ Ein mittlerer oder Durchschnittswert kann durch einen Strich über dem Formelzeichen der betreffenden Größe gekennzeichnet werden, z.B. $\bar{v} = s/t$.

der Kilometerzähler den Weg s_2 an, der um Δs größer als s_1 ist¹⁾. Bildet man jetzt den Quotienten $\Delta s/\Delta t$, so erhält man ebenfalls eine Durchschnittsgeschwindigkeit, nun aber in dem kleinen Zeitintervall Δt .

Wählt man das Zeitintervall $\Delta t = t_2 - t_1$ immer kleiner (10 s, 1 s, 0,1 s usw.), so wird der in der Zeit Δt zurückgelegte Weg natürlich auch kleiner, und der Quotient $\Delta s/\Delta t$ nimmt immer andere Werte an. (Die kleinen Dreiecke in Bild 1.2 sind nicht ähnlich.) Lässt man jetzt Δt gegen Null gehen, so durchläuft der Quotient $\Delta s/\Delta t$ eine Folge von Werten, die sich einem bestimmten Geschwindigkeitswert nähern, den wir als Grenzwert (Limes) dieser Folge von Durchschnittsgeschwindigkeiten bezeichnen. Dieser Grenzwert ist die Momentangeschwindigkeit.

Definition:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (1.5)$$

Auf diese Weise ergibt sich in Bild 1.2 die Geschwindigkeit im Zeitpunkt t_1 .

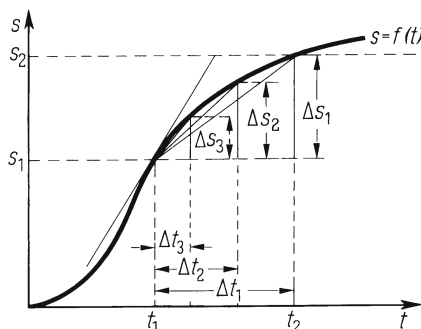


Bild 1.2 Momentangeschwindigkeit

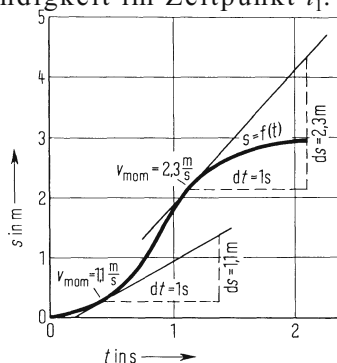


Bild 1.3 Ermittlung von Momentangeschwindigkeiten mit Hilfe von Tangenten an die Weg-Zeit-Kurve. Man wählt für einfaches Rechnen z.B. $dt = 1$ s

Mathematisch entspricht die vorstehende Definition der Bildung des Differentialquotienten (Anstieg der Tangente) aus den Differenzenquotienten (Anstieg der Sekanten)³⁾. Deshalb kann man die Geschwindigkeit auch als Ableitung des Weges nach der Zeit schreiben

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \quad (1.6)$$

Man kann also aus dem Anstieg der Tangente an die Weg-Zeit-Kurve auf den Betrag der Momentangeschwindigkeit schließen (großer Anstieg, große Geschwindigkeit). Jedoch ist die Geschwindigkeit nicht gleich dem Tangens des Steigungswinkels der betr. Tangente.

¹⁾ Δt lies: „Delta t“, Δs lies: „Delta s“.

²⁾ Lies „Limes $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ “ oder „Grenzwert von $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ “ für Δt gegen Null.

³⁾ Vgl. z.B. [1].

⁴⁾ Über das Formelzeichen der Ableitung einer Größe nach der Zeit, hier des Weges nach der Zeit, setzt man einen Punkt, $ds/dt = \dot{s}$.

Denn $\tan \alpha$ ist dimensionslos, die Geschwindigkeit aber ein Quotient der Größen Weg und Zeit. Um diesen Unterschied zu berücksichtigen, müssen Einheitslängen¹⁾ eingeführt werden. Damit ist es dann möglich, aus den Tangenten an die Weg-Zeit-Kurve praktisch recht gut Momentangeschwindigkeiten zu ermitteln (Bild 1.3).

Aufgaben zu Abschn. 1.1.1.2

1. Eine Brieftaube braucht $\frac{3}{4}$ Tag für die Strecke 300 km. Ein Kraftwagen fährt bei einem Test 800 m in 0,5 min. Wie viel mal ist der Kraftwagen schneller?
2. Wie viel Sekunden braucht man, um mit der Geschwindigkeit $v = 60$ km/h die Strecke 700 m zurückzulegen?

1.1.2 Gleichförmige Bewegung

Definition: Gleichförmig heißt eine Bewegung, deren Momentangeschwindigkeit in jedem beliebigen Zeitpunkt denselben Betrag hat, d.h. also $v = \text{const.}$

In der Praxis kann man eine solche Bewegung nur bei fliegenderm Start beobachten, bei dem der Körper bereits bei Beginn der Messung die Geschwindigkeit besitzt, die er während der ganzen Beobachtungsdauer beibehält.

Anwendungen. Rekordversuche von Rennwagen oder Flugzeugen, Messung von Geschossgeschwindigkeiten.

Die Weg-Zeit-Kurve (Bild 1.4) der gleichförmigen Bewegung ist eine Gerade. Ihr Anstieg ist nach Gl. (1.4) ein Maß für die Geschwindigkeit. Bei einer gleichförmigen Bewegung nimmt der zurückgelegte Weg linear mit der Zeit zu, d.h., s und t sind einander direkt proportional

$$s \sim t$$

Der Proportionalitätsfaktor ist die Geschwindigkeit.

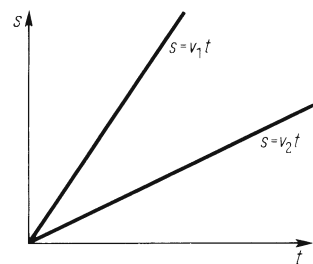


Bild 1.4 Weg-Zeit-Diagramm der gleichförmigen Bewegung ($v_1 > v_2$)

Wenn die Momentangeschwindigkeit sich nicht ändert, ist sie natürlich auch gleich der Durchschnittsgeschwindigkeit.

Bei gleichförmiger Bewegung gilt:

$$s = v t \quad \text{und} \quad \bar{v} = v$$

¹⁾ Vgl. z.B. [1].

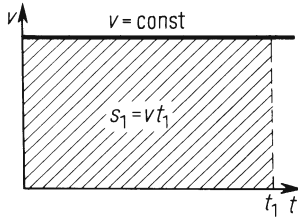


Bild 1.5 Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm der gleichförmigen Bewegung

Von Interesse ist oft eine Darstellung, aus der die Abhängigkeit der Momentangeschwindigkeit von der Zeit zu ersehen ist, also ein Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm. Diese Abhängigkeit ist bei der gleichförmigen Bewegung besonders einfach, da v sich nicht ändert (Bild 1.5). Wegen $s = v t$ entspricht der zurückgelegte Weg s_1 dem Flächeninhalt des Rechteckes, das von der v -Achse, der Funktionsgeraden $v = f(t)$, der t -Achse und der Ordinate im Zeitpunkt $t = t_1$ begrenzt wird.

Aufgaben zu Abschn. 1.1.2

1. Ein Lastkraftwagen, der mit der Geschwindigkeit 70 km/h fährt, wird von einem Personenkraftwagen mit 100 km/h überholt. Wie lange dauert der Überholvorgang, wenn dieser von 15 m vor bis 15 m hinter dem LKW gerechnet wird? Der LKW ist 7 m, der PKW 4 m lang.
2. 800 m vor einem PKW mit der Geschwindigkeit 80 km/h fährt ein zweiter mit 60 km/h. Nach welcher Zeit und welcher Strecke hat der erste PKW den zweiten eingeholt?

3. Ein Schütze soll ein Ziel treffen, das sich in 100 m Abstand senkrecht zur Schussbahn mit 30 m/s bewegt. Die Kugel hat die Geschwindigkeit 800 m/s. Um wie viel Meter muss der Schütze „vorhalten“?
4. Ein Zug fährt die Strecke 50 km in 45 min. Dabei wird eine Teilstrecke mit der konstanten Geschwindigkeit 80 km/h, der Rest mit 60 km/h durchfahren. Wie groß sind beide Teilstrecken?

1.1.3 Ungleichförmige Bewegung

Definition: Ungleichförmig heißt eine Bewegung, wenn sich der Betrag der Momentangeschwindigkeit ändert.

Demnach ist also jedes Anfahren aus dem Stand, jedes Beschleunigen, jedes Abbremsen eine ungleichförmige Bewegung. Ein weiteres Beispiel ist die in Bild 1.6 beschriebene Bewegung.

1.1.3.1 Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

Dies ist der einfachste Fall einer ungleichförmigen Bewegung. Für sie gilt die

Definition: Gleichmäßig beschleunigt heißt eine Bewegung, deren Momentangeschwindigkeit sich linear mit der Zeit ändert, also $v \sim t$.

Ein bekanntes Beispiel dafür ist der freie Fall.

□ **Versuch 1. Freier Fall** (Bild 1.6a). Der Elektromagnet 1 hält die Stahlkugel 2 fest. Ein Schalter macht zur Zeit $t = 0$ den Magneten stromlos und startet gleichzeitig eine elektrische Stoppuhr. Die Kugel durchfällt die Strecke s und trifft auf eine Kontaktfeder 3, welche die Stoppuhr beim Auftreffen der Kugel sofort anhält. Die Uhr misst also die Zeit, welche die Kugel für das Durchfallen der Strecke s benötigt. Man verändert jetzt s , indem man die Kontaktplatte an einer Stativstange verschiebt, und misst die zugehörigen Fallzeiten (Tafel 1.7). □

Der ausgewertete Versuch zeigt, dass $t \sim \sqrt{s}$ oder $s \sim t^2$ ist; siehe das Weg-Zeit-Diagramm in Bild 1.6b.

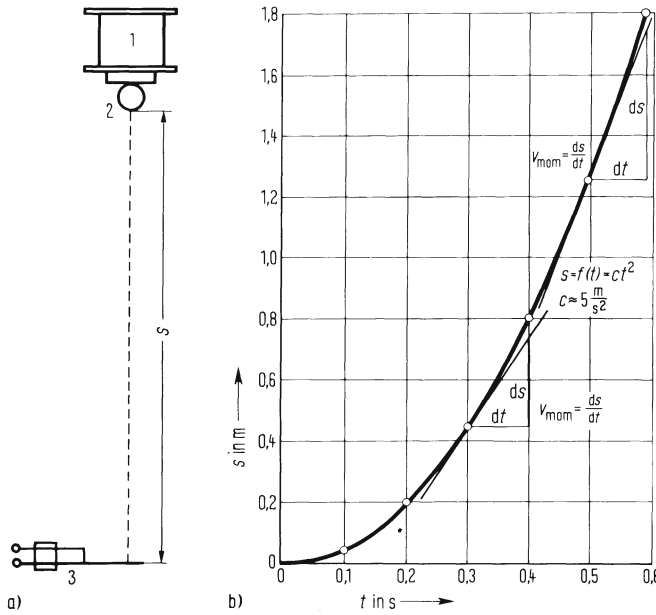


Bild 1.6 Freier Fall (a) und zugehöriges Weg-Zeit-Diagramm (b) als Beispiel der gleichmäßig beschleunigten Bewegung

Tafel 1.7

s in cm	t in s
5	0,10
20	0,20
45	0,30
80	0,40
125	0,50
180	0,61

Tafel 1.8

t in s	v in m/s
0,10	0,98
0,20	1,95
0,30	2,95
0,40	3,82
0,50	4,91
0,60	5,90

Momentangeschwindigkeit. Sie hängt von dem betrachteten Zeitpunkt ab. Dies wird klar, wenn man, wie oben in Bild 1.6b bereits geschehen, Tangenten an die Funktionskurve $s = f(t)$ legt und daraus die Momentangeschwindigkeiten zu verschiedenen Zeiten berechnet (Tafel 1.8). Die Werte sind hier nicht sehr genau. Trotzdem geben sie den gesetzmäßigen Zusammenhang gut wieder. Mit ihnen kann das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm (Bild 1.9) gezeichnet werden. Die einzelnen Messpunkte liegen praktisch auf einer Geraden durch den Nullpunkt. Die Momentangeschwindigkeit nimmt beim freien Fall also linear mit der Zeit zu, $v \sim t$. Es handelt sich daher gemäß der obigen Definition um eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung.

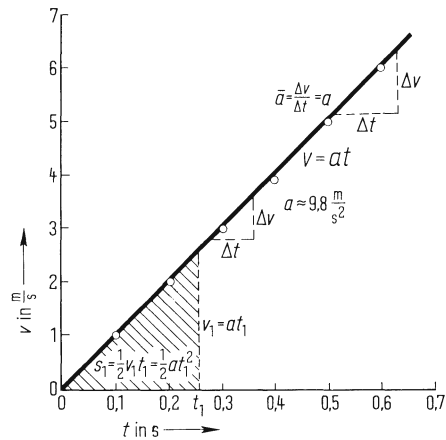


Bild 1.9 Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm der gleichmäßig beschleunigten Fallbewegung in Bild 1.6

Beschleunigung. Will man verschiedene gleichmäßig beschleunigte Bewegungen miteinander vergleichen, so ist es zweckmäßig, anzugeben, wie groß jeweils die Änderung der Momentangeschwindigkeit Δv in einem bestimmten Zeitintervall Δt ist. Man benutzt dazu eine neue Größe, die sog. „Beschleunigung“ mit dem Formelzeichen a .

Analog zu den Definitionen der Durchschnitts- und Momentangeschwindigkeit (vgl. S. 21) definiert man:

Durchschnittsbeschleunigung im Zeitintervall Δt

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (1.7)$$

Momentanbeschleunigung (kurz: Beschleunigung)

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \frac{d^2 s}{dt^2} = \dot{s} \quad ^1)$$

Aus diesen Definitionsgleichungen ergibt sich auch die Einheit für die Beschleunigung als

$$1 \frac{\text{m/s}}{\text{s}} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Beim Fallversuch ändert sich nach Tafel 1.8 die Geschwindigkeit in $\Delta t = 0,1 \text{ s}$ um etwa $\Delta v = 0,98 \text{ m/s}$. Dann wird die Beschleunigung mit den Messwerten aus Tafel 1.8

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0,98 \text{ m/s}}{0,1 \text{ s}} = 9,8 \text{ m/s}^2.$$

Die Beschleunigung bei freiem Fall bezeichnet man allgemein als Fallbeschleunigung g . Ihr Betrag hängt etwas vom Ort auf der Erdoberfläche ab. An sog. Normorten (z.B. Zürich) ist sie gleich der sog. Normfallbeschleunigung $g_n = 9,80665 \text{ m/s}^2$ (s. DIN 1305), aufgerundet $9,81 \text{ m/s}^2$.

Wie man aus Bild 1.9 entnimmt, entspricht die Durchschnittsbeschleunigung $\bar{a} = \Delta v / \Delta t$, die hier auch gleich der Momentanbeschleunigung ist, der Steigung der Geschwindigkeit-Zeit-Geraden. Für diese ergibt sich dadurch die Gleichung

$$v = a t$$

wobei gilt:

Bei der gleichmäßig beschleunigten Bewegung ist die Momentanbeschleunigung konstant.

Weg. Da die Geschwindigkeit linear mit der Zeit zunimmt, erhält man den in der Zeit t_1 zurückgelegten Weg s_1 einfach, indem man mit der mittleren Geschwindigkeit $\bar{v}_1 = v_1/2$ rechnet. Es ergibt sich:

$s_1 = v_1 t_1/2$ und mit $v_1 = a t_1$ schließlich $s_1 = a t_1 t_1/2 = a t_1^2/2$. Damit ergibt sich allgemein:

Aus der Ruhe heraus in der Zeit t zurückgelegter Weg s

$$s = \frac{1}{2} a t^2 \quad (1.8)$$

¹⁾ Diese Definitionen gelten nur für den Fall der geradlinigen Bewegungen, bei denen sich nicht die Bewegungsrichtung ändert. Die allgemeingültige Definition der Beschleunigung findet man in Abschn. 1.2.1.2.

Aus Bild 1.9 entnimmt man: Der Weg $s_1 = v_1 t_1/2$ entspricht, wie bei der gleichförmigen Bewegung, dem Flächeninhalt der zugehörigen Fläche unter der Geschwindigkeit-Zeit-Kurve.

Allgemeine gleichmäßig beschleunigte Bewegung. Eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung liegt auch vor, wenn der Körper zu Beginn der Messung nicht ruht, sondern bereits eine Anfangsgeschwindigkeit v_0 besitzt und sich dann seine Geschwindigkeit linear mit der Zeit ändert. Man denke z.B. an das Beschleunigen oder Bremsen eines fahrenden Autos oder an den senkrechten Wurf eines Körpers nach oben oder unten (vgl. auch Abschn. 1.1.4.1). In allen diesen Fällen ist die Geschwindigkeit-Zeit-Kurve eine Gerade (Bild 1.10), welche die Geschwindigkeits-Achse bei v_0 schneidet. Bild 1.10a zeigt einen Beschleunigungs-, Bild 1.10b einen Brems-Vorgang (auch „Verzögerung“ genannt).

Man erhält für die

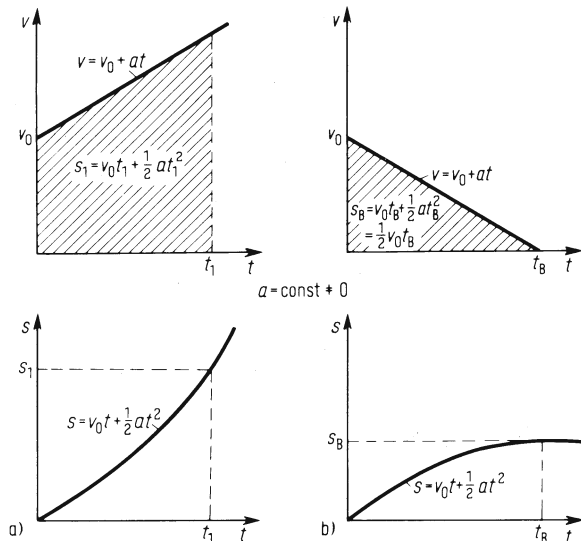


Bild 1.10 Geschwindigkeit-Zeit- und Weg-Zeit-Diagramm der gleichmäßig beschleunigten (a) und gleichmäßig verzögerten (b) Bewegung

Geschwindigkeit v in Abhängigkeit von der Zeit t

$$v = v_0 + a t \quad \text{mit } a > 0 \text{ beim Beschleunigen} \\ \text{und } a < 0 \text{ beim Verzögern} \quad (1.9)$$

Die mittlere Geschwindigkeit hat hier bis zum Zeitpunkt t den Betrag

$$\bar{v} = [v_0 + (v_0 + a t)]/2 = v_0 + a t/2.$$

Damit ergibt sich für den Weg $s = \bar{v} t$ bis zum Zeitpunkt t , gleichbedeutend mit dem

Weg s in Abhängigkeit von der Zeit t

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad \text{mit } a > 0 \text{ beim Beschleunigen} \\ \text{und } a < 0 \text{ beim Verzögern} \quad (1.10)$$

Diese Beziehungen ergeben sich auch, wenn man den Flächeninhalt der Fläche unter der Geschwindigkeit-Zeit-Kurve bildet (Bild 1.10).

Auch mit Hilfe der Differentialrechnung kann man die obigen Zusammenhänge herleiten, wenn $s = f(t)$ bekannt ist. Dann ist nämlich mit $s = v_0 t + a t^2/2$

$$v = \dot{s} = v_0 + \frac{1}{2} a 2t = v_0 + a t \quad \text{und} \quad a = \dot{v}$$

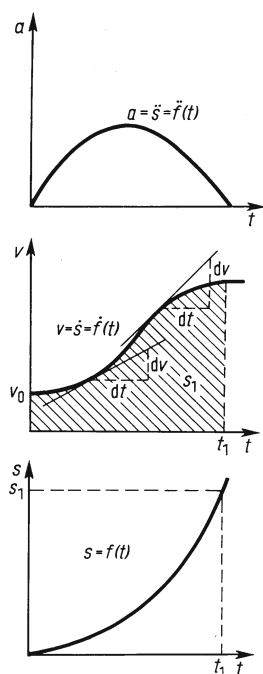
Für den Sonderfall der Verzögerung von $v = v_0$ bis zum Stillstand, also $v = 0$, in der Bremszeit t_B , erhält man aus Bild 1.10b $v_0/t_B = -a$, und für den

Bremsweg

$$s_B = -\frac{1}{2}v_0 t_B = -\frac{1}{2} \frac{v_0^2}{a}$$

Da beim Bremsen $a < 0$ ist, ergibt sich für s_B ein positiver Wert.

1.1.3.2 Ungleichmäßig beschleunigte Bewegung



In vielen praktischen Fällen liegt keine konstante Momentanbeschleunigung vor. Sehr oft ändert sich diese mit der Zeit. Man denke z.B. an das Beschleunigen eines Kraftwagens durch Umschalten vom ersten in den vierten Gang. Solche Vorgänge sind mathematisch meist relativ schwer zu erfassen, da die Zeitabhängigkeit der Momentanbeschleunigung selten analysiert werden kann. Anders ist es bei Schwingungsvorgängen. Diese lassen sich meist mathematisch sehr gut beschreiben (s. Abschn. 5.1.2.1). In allen Fällen erweist es sich als zweckmäßig, das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm zu zeichnen. Die Steigungen der Tangenten an die v - t -Kurve liefern die jeweiligen Momentanbeschleunigungen $a = dv/dt$. Der Flächeninhalt unter der v - t -Kurve entspricht auch hier dem zurückgelegten Weg (Bild 1.11).

Bild 1.11 Beschleunigungs-Zeit-, Geschwindigkeits-Zeit- und Weg-Zeit-Diagramm einer ungleichmäßig beschleunigten Bewegung

Aufgaben zu Abschn. 1.1.3

(Vorbemerkung: Man zeichne zum leichteren Lösen der Aufgaben 2 bis 5 das v - t -Diagramm.)

1. Eine Kugel rollt eine schiefe Ebene hinunter. Dabei werden folgende Werte ermittelt:

s in cm	t in s
5	0,5
20	1,0
45	1,5
80	2,0
125	2,5

Man zeichne die Funktionskurven $s = f(t)$ und $v = f'(t)$ und ermittle die konstante Beschleunigung.

2. Welche Zeit braucht ein Stein, um die Strecke 32 m frei zu durchfallen? Welche Geschwindigkeit hat er dann?

3. Ein Läufer läuft 100 m in 11,2 s. Man vergleiche seine Durchschnittsgeschwindigkeit mit der Spitzengeschwindigkeit, wenn man annimmt, dass er diese nach 18 m erreicht und bis zum Ziel durchhält.

Wie groß ist seine konstante Beschleunigung?

4. Ein Wagen durchfährt, vom Start weg gleichmäßig beschleunigt, eine 75 m lange Messstrecke in 2 s. Dabei verdoppelt er seine Geschwindigkeit. Welche Geschwindigkeit hat er am Anfang und Ende der Messstrecke, und wie weit ist die Messstrecke vom Start entfernt?

5. Eine Kugel durchfällt zwei im Abstand 8 m untereinander befindliche Messpunkte in der Zeit 0,6 s. Aus welcher Höhe über dem ersten Messpunkt ist die Kugel gefallen? Welche Momentangeschwindigkeiten hat sie beim Passieren der beiden Messpunkte?

1.1.4 Richtung von Bewegungen

Bisher wurden nur die Beträge von Wegen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen erfasst. Zur vollständigen Beschreibung einer Bewegung gehört aber noch die Angabe der Bewegungsrichtung. Die beiden Wege \overline{AB} und \overline{CD} in Bild 1.12a sind z.B. gleich lang, aber sie führen von A aus zu verschiedenen Orten B und C. Um das zu unterscheiden, müssen wir außer der Länge der Wege auch noch ihre Richtungen angeben: Man stellt diese durch Pfeile dar, deren Richtungen die Richtungen der betreffenden Wege und deren Längen in einem zweckmäßigen Maßstab die Beträge der Wege angeben (Bild 1.12b). Eine Größe mit Betrag und Richtung kann durch einen Vektor dargestellt werden.

Daher gilt:

Wege, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen sind Vektoren, zu deren vollständiger Beschreibung die Angabe von Betrag und Richtung gehört.

Größen, zu deren hinreichender Beschreibung die Angabe eines Betrages genügt, nennt man dagegen Skalare. Zu ihnen gehören z.B. die Zeit oder die Temperatur.

Schreibweise von Vektoren. Ein Vektor kann nach DIN 1303 durch einen Pfeil über dem Formelbuchstaben gekennzeichnet werden, z.B. die Wege \vec{s}_1 und \vec{s}_2 in Bild 1.12b. Schreibt man die Buchstaben ohne Pfeile, so bedeuten sie nur den Betrag der betreffenden Größe $|\vec{s}_1| = s_1$. Man kann ihn mit einem Zahlenwert und einer Einheit eindeutig angeben, z.B. $s_1 = 2 \text{ m}$. Die Schreibweise $\vec{s}_1 = 2 \text{ m}$ ist falsch, da 2 m nur den Betrag, nicht aber die Richtung angibt. Für die Regeln zum Rechnen mit Vektoren s. z.B. [1]. Für den nächsten Abschnitt genügt die Kenntnis der geometrischen Addition von Vektoren.



Bild 1.12 Wege ohne (a) und mit Darstellung ihrer Richtung als Vektoren (b)

1.1.4.1 Ungestörte Überlagerung von geradlinigen Bewegungen

Wege

Zwei Wege kann man nur nacheinander zurücklegen. Verblüffenderweise lässt sich die Bewegung eines Körpers aber auch so beschreiben, als ob er zwei Wege gleichzeitig durchheilen würde. Da man immer nur den resultierenden Weg beobachtet, erscheint dieses Verfahren zunächst unanschaulich, denn es stellt gewisse Anforderungen an das Abstraktionsvermögen. Seine Anwendung lohnt sich jedoch; man kann mit ihm nämlich verhältnismäßig komplizierte Probleme elegant lösen. Dies soll an einem praktischen Beispiel anhand eines Versuches klar gemacht werden.

□ **Versuch 2. Waagerechter Wurf** (Bild 1.13). An dem Haltemagneten 1 hängt die Kugel 2. In gleicher Höhe befindet sich auf einer horizontalen Schiene 3, die genau auf die Kugel 2 gerichtet ist, eine zweite Kugel 4. Diese lässt man auf der Schiene in Richtung von Kugel 2 rollen, bis sie bei A die Schiene verlässt und in der eingezeichneten Bahn zu Boden fällt. Die Kugel 4 öffnet beim Verlassen der Schiene den Kontakt 5, der den Haltemagneten für Kugel 2 stromlos macht, sodass diese im selben Augenblick senkrecht zu Boden fallen kann. Das Ergebnis ist zunächst erstaunlich: Wie schnell man Kugel 4 auch in horizontaler Richtung rollen lässt, sie trifft immer entweder Kugel 2 in der Luft (Bahnkurve gestrichelt) oder schlägt gleichzeitig mit ihr auf dem waagerechten Boden auf (Bahnkurve ausgezogen). □

Wie ist das möglich? Die Erklärung liefert das Prinzip der ungestörten Überlagerung von Bewegungen. Die Kugel 4 in Versuch 2 hat auf der Schiene die konstante waagerechte Geschwindigkeit \vec{v}_w (Bild 1.14), mit der sie den waagerechten Weg $\vec{s}_w = \vec{v}_w t$ von dem Augenblick an zurücklegt, in dem sie die Schiene verlässt. Nach Überschreiten des Punktes A beginnt sie zusätzlich mit einer beschleunigten Fallbewegung, legt also gleichzeitig einen senkrecht gerichteten Weg \vec{s}_s zurück, so als ob die waagerechte Bewegung gar nicht vorhanden wäre. Beide Bewegungen stören sich gegenseitig nicht!

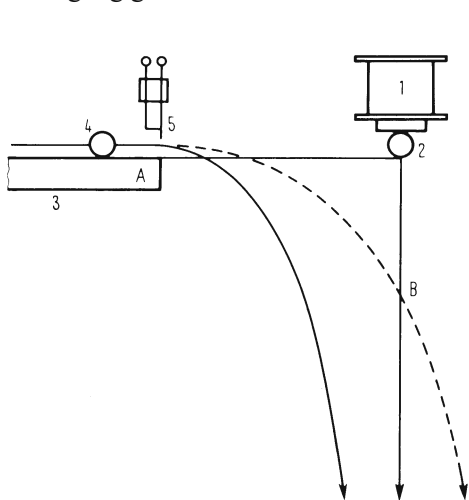


Bild 1.13 Ungestörte Überlagerung von Bewegungen

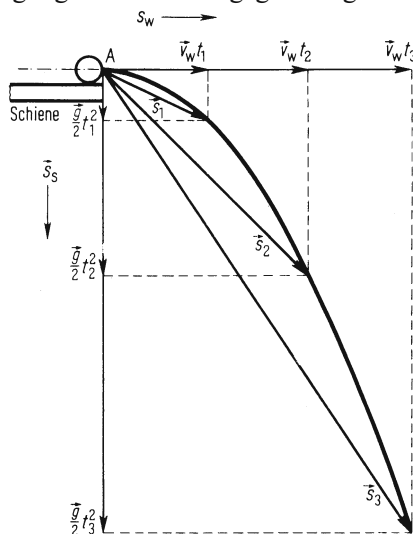


Bild 1.14 Waagerechter Wurf. Ungestörte Überlagerung einer waagerechten gleichförmigen und einer senkrechten gleichmäßig beschleunigten Bewegung

Da beide Kugeln gleichzeitig mit derselben Beschleunigung $a = g = 9,81 \text{ m/s}^2$ zu fallen beginnen, befinden sie sich also nach Gl. (1.8) in jedem Zeitpunkt t in dem gleichen senkrechten Abstand $\vec{s}_s = (1/2) g t^2$ unter der oberen Schienenkante. Sie müssen sich daher entweder im Punkt B treffen oder gleichzeitig aufschlagen. Die in Bild 1.14 von 1 ausgehenden Vektoren $\vec{v}_w t_1 = \vec{s}_{w1}$, $(g/2) t_1^2 = \vec{s}_{s1}$; $\vec{v}_w t_2 = \vec{s}_{w2}$; $(g/2) t_2^2 = \vec{s}_{s2}$ usw. ergeben als Resultierende die sog. Ortsvektoren \vec{s}_1, \vec{s}_2 usw. für die Zeitpunkte t_1, t_2 usw. ($t_2 = 2t_1, t_3 = 3t_1$). Der Körper befindet sich jeweils an der Spitze des entsprechenden Ortsvektors.

Geschwindigkeiten

Konstante Geschwindigkeiten. Außer den Wegen überlagern sich bei jeder Bewegung auch die Geschwindigkeiten ungestört, wie z.B. in Bild 1.15a: Da ein Flugzeug zu seiner Eigengeschwindigkeit (gegenüber der umgebenden Luft) auch noch die Geschwindigkeit des Windes erhält, muss es einen anderen Kurs steuern, als den der gewollten, tatsächlichen Bewegungsrichtung. Diesen anderen Kurs kann der Flugzeugführer leicht mit dem Geschwindigkeitsdiagramm in Bild 1.15b ermitteln. Flugzeuggeschwindigkeit \vec{v}_F und Windgeschwindigkeit \vec{v}_W , die beide gleichzeitig vorhanden sind, überlagern sich zur resultierenden Geschwindigkeit \vec{v}_R , die wir vom Boden aus beobachten. Allgemein gilt:

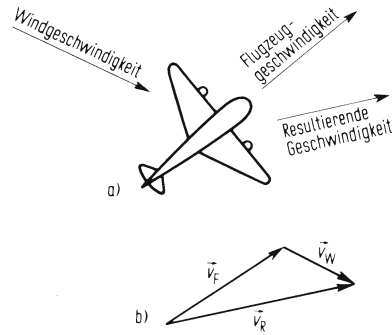


Bild 1.15 Bewegungsrichtungen eines Flugzeugs bei Windeinwirkung (a) und die zugehörigen Geschwindigkeitsvektoren (b); \vec{v}_R ist die resultierende Geschwindigkeit.

Man kann Wege mit Wegen, Geschwindigkeiten mit Geschwindigkeiten und Beschleunigungen mit Beschleunigungen überlagern, d.h. sie vektoriell addieren.

Zeitlich veränderliche Geschwindigkeiten. Das Prinzip der ungestörten Überlagerung kann man hier ebenfalls anwenden. Als resultierende Geschwindigkeit erhält man dann eine Momentangeschwindigkeit, die angibt, wie schnell und in welcher Richtung sich der Körper in einem bestimmten Zeitpunkt bewegt. Sie ändert sich natürlich nach Betrag und Richtung in Abhängigkeit von der Zeit.

Waagerechter Wurf. Als Beispiel wird hier wieder der Versuch mit der waagrecht abgeschleuderten Kugel (Bild 1.13) betrachtet. Dazu sind in Bild 1.16 die Geschwindigkeitsparallelogramme zu drei verschiedenen Zeitpunkten t_0, t_1, t_2 in die Flugbahn eingezeichnet. Man deutet die sich dauernd ändernde Flugrichtung und Geschwindigkeit der Kugel

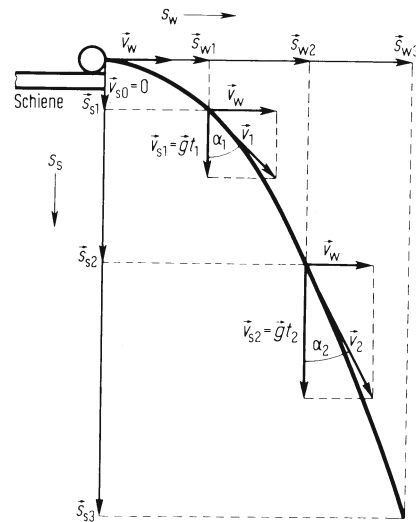


Bild 1.16 Konstruktion der Momentangeschwindigkeiten beim waagerechten Wurf

in einfacher Weise: Die waagerechte Geschwindigkeit \vec{v}_w bleibt während des ganzen Fluges erhalten, als ob keine zusätzliche Fallbewegung vorhanden wäre. Die senkrechte Geschwindigkeit \vec{v}_s wächst proportional mit der Zeit, $\vec{v}_s = \vec{g} t$. Sie hat die Richtung der Fallbeschleunigung \vec{g} , die ja immer lotrecht nach unten gerichtet ist. Beide Komponenten \vec{v}_w und \vec{v}_s überlagern sich in jedem Zeitpunkt zu einer sich nach Betrag und Richtung ändernden Geschwindigkeit \vec{v}_1, \vec{v}_2 usw.

Beispiel 3. In Versuch 2 wird die Kugel 4 horizontal mit der Geschwindigkeit 3 m/s weggeschleudert (Dabei wird die Kugel 2 nicht betrachtet). Dann können folgende Fragen beantwortet werden:

- Wann trifft sie auf dem $s_{s1} = 1,25$ m tieferen Fußboden auf?
- Wie weit gelangt sie in waagerechter Richtung? $s_{w1} = ?$
- Wie groß ist der Betrag ihrer Momentangeschwindigkeit beim Auftreffen? $v_1 = ?$
- Unter welchem Winkel α trifft sie auf?

zu a) Die Kugel fällt so, als ob die waagerechte Bewegungskomponente nicht vorhanden wäre. Also ist $s_{s1} = (1/2) g t_1^2$. Daraus folgt mit $g \approx 10$ m/s

$$t_1 = \sqrt{\frac{2s_{s1}}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,25 \text{ ms}^2}{10 \text{ m}}} = 0,5 \text{ s}$$

zu b) Die waagerechte Bewegungskomponente ist unabhängig von der gleichzeitigen senkrechten Bewegung. Daher wird

$$s_{w1} = v_w t_1 = (3 \text{ m/s}) \cdot 0,5 \text{ s} = 1,5 \text{ m}$$

zu c) Die momentane senkrechte Geschwindigkeitskomponente ist

$$v_{s1} = g t_1 = (10 \text{ m/s}^2) \cdot 0,5 \text{ s} = 5 \text{ m/s}$$

Aus Bild 1.16 ergibt sich für den Betrag des resultierenden Geschwindigkeitsvektors

$$v_1^2 = v_{s1}^2 + v_w^2 = (25 + 9) \text{ m}^2/\text{s}^2 = 34 \text{ m}^2/\text{s}^2 \quad v_1 = 5,83 \text{ m/s}$$

zu d) Aus Bild 1.16 folgt weiterhin

$$\tan \alpha_1 = \frac{v_w}{v_{s1}} = \frac{3 \text{ m/s}}{5 \text{ m/s}} = 0,6; \quad \alpha_1 = 31^\circ$$

Senkrechter Wurf nach unten oder oben. Er kann anhand von Bild 1.17 und 1.18 ohne weiteres verstanden werden. Beide Fälle sind gleichzeitig Beispiele für die

Überlagerung einer beliebigen geradlinig gleichförmigen Bewegung mit der Geschwindigkeit v_0 und einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung mit der Beschleunigung a in derselben oder der entgegengesetzten Richtung. Hierbei gilt

$$\vec{s} = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2 \quad \text{und} \quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} t$$

bzw. für die Beträge

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad \text{und} \quad v = v_0 + a t$$

a ist > 0 für gleiche und a ist < 0 für entgegengesetzte Richtungen von \vec{v}_0 und \vec{a} .

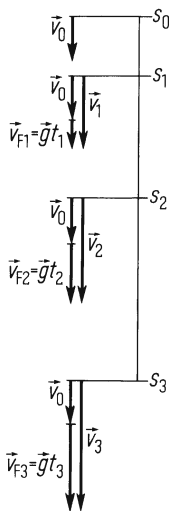


Bild 1.17 Senkrechter Wurf nach unten. Zur Anfangsgeschwindigkeit \vec{v}_0 addiert sich die jeweilige Fallgeschwindigkeit \vec{v}_F . In jedem Moment ist $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_F = \vec{v}_0 + \vec{g} t$

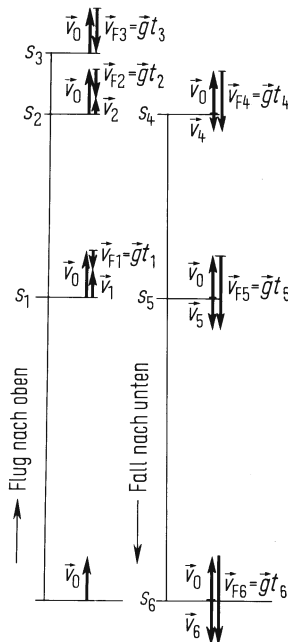


Bild 1.18 Senkrechter Wurf nach oben. Zur Zeit t_3 ist $v_0 = -g t_3$; $v_3 = \vec{v}_0 + \vec{g} t_3 = 0$. Der Körper kehrt seine Flugrichtung um

Die maximale Steighöhe s_{\max} beim senkrechten Wurf nach oben ergibt sich aus der Bedingung, dass in diesem Punkt $v = 0$ sein muss. Mit der Steigzeit t_s und $a = -g$ gilt also

$v = v_0 - g t_s = 0$ und $t_s = v_0/g$. Setzt man diesen Wert in die Gleichung

$$s_{\max} = v_0 t_s - \frac{1}{2} g t_s^2 \text{ ein, so erhält man } s_{\max} = v_0^2 / 2g.$$

Schräger Wurf (Bild 1.19). Er kann genauso wie im vorstehenden Beispiel behandelt werden. Auch hier bleibt die Anfangsgeschwindigkeit \vec{v}_0 erhalten. Infolge der Fallbeschleunigung erhält der Körper unabhängig von \vec{v}_0 eine Geschwindigkeitskomponente $\vec{v}_s = \vec{g} t$ in senkrechter Richtung. Man ersieht aus den einzelnen Geschwindigkeitsdiagrammen in Bild 1.19, wie die senkrechte Geschwindigkeitskomponente \vec{v}_s immer größer wird. Die Momentangeschwindigkeit des Körpers ergibt sich aus der Überlagerung von \vec{v}_0 und \vec{v}_s .

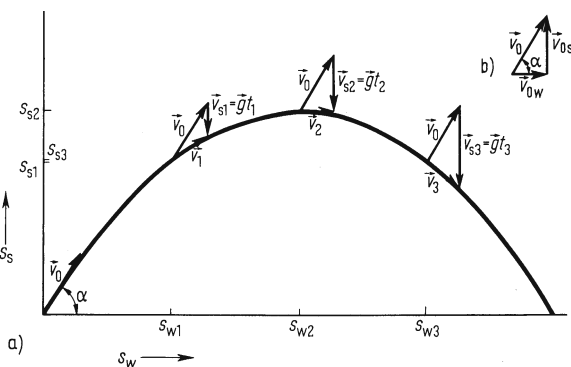


Bild 1.19 Schräger Wurf

- a) Bahnkurve und Momentangeschwindigkeiten
- b) Zerlegung von \vec{v} in eine waagerechte und eine senkrechte Komponente

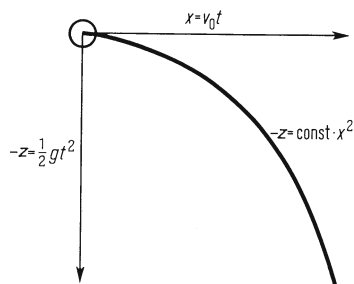


Bild 1.20 Ermittlung der Gleichung der Bahnkurve beim waagerechten Wurf

$$x = v_0 t \quad \text{und} \quad -z = \frac{1}{2} g t^2.$$

Man eliminiert t , indem man $t = x/v_0$ in $-z = (1/2) g t^2$ einsetzt, und erhält dann

$$-z = \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2}.$$

Die Größen g und v_0 sind konstant. Also ist $z = \text{const} \cdot x^2$. Das ist die Gleichung einer Parabel: Wurfparabel. Genauso geht man beim schrägen Wurf oder in ähnlichen Fällen vor.

Hinweis: Bei der Behandlung der Wurfbewegungen haben wir den Einfluss des Luftwiderstandes völlig vernachlässigt. Dies ist bei kleinen Geschwindigkeiten auch durchaus berechtigt. Bei größeren Geschwindigkeiten, wie sie z.B. Geschosse besitzen, ändert er jedoch den Verlauf der Bahn, sodass die dadurch entstehenden sog. „ballistischen Kurven“ mehr oder weniger stark von den oben behandelten Bahnkurven abweichen. Die beiden Tafeln 1.21 und 1.22 enthalten Zahlenwerte einiger typischer Geschwindigkeiten und Beschleunigungen.

Tafel 1.21 Geschwindigkeiten in m/s

Elektronen im Leiter	$3 \cdot 10^{-4}$
Wind bei Stärke 2	3
Wind bei Stärke 4	7
Wind bei Stärke 8	15
Wind bei Stärke 12	50
Fußgänger	1,4
Radfahrer	5
Kraftwagen	25
Flugzeuge	70–500
Infanteriegeschoss	800–1000
künstlicher Erdsatellit	1200
Schall in Normalluft	340
Leitung in den Nerven	40
Licht im Vakuum	$3 \cdot 10^8$

Tafel 1.22 Beschleunigungen in m/s^2

Personenzüge elektrisch	0,26
Kraftwagen (50 kW)	3
Rennwagen	8
freier Fall	9,81
Infanteriegeschoss im Lauf	$5 \cdot 10^3$
gesetzliche Mindestbremsverzögerung	
für PKW	2,7
tatsächliche Bremsverzögerung	
beim PKW	5...8

Der schräg geworfene Körper beschreibt eine gekrümmte Flugbahn. Zur Berechnung der Wurfhöhe und Wurfweite zerlegt man \vec{v}_0 in eine waagerechte und eine senkrechte Komponente \vec{v}_{0w} und \vec{v}_{0s} (Bild 1.19b) und betrachtet den schrägen Wurf als Überlagerung einer waagerechten gleichförmigen Bewegung und eines senkrechtenwurfes.

Gleichung für die Bahnkurve. Diese soll am Beispiel des waagerechten Wurfes entwickelt werden (Bild 1.20). Wir legen in den Punkt, der den Beginn des freien Falls angibt, den Nullpunkt eines x, z -Systems. Dann gilt

Aufgaben zu Abschn. 1.1.4.1

1. Eine Fähre mit der Geschwindigkeit 20 km/h (gegenüber dem umgebenden Wasser) soll einen Fluss senkrecht zu dessen Strömungsrichtung überqueren; der Fluss strömt mit 4 km/h. In welcher Richtung muss die Fähre fahren? Wie lange braucht sie bis zum 300 m entfernten anderen Ufer? Anleitung für die Zeichnung: 1 cm = 2 km/h. Man zeichne außerdem die zugehörigen Wege. Maßstab: 3 cm \triangleq 100 m.

2. Man lasse in einem mit konstanter Geschwindigkeit fahrenden Fahrzeug einen Gegenstand zu Boden fallen. Wo trifft er auf? Was würde ein außenstehender Beobachter sehen? Man deute das Ergebnis mit Hilfe der ungestörten Überlagerung von Bewegungen.

3. Mittelgroße Regentropfen fallen lotrecht mit der konstanten Geschwindigkeit 8 m/s. Wie schnell fährt ein Zug, wenn die Tropfen auf den Wagenfenstern Spuren erzeugen, die um 65° gegen die Senkrechte geneigt sind?

4. Ein Flugzeug soll auf einem 12 m langen Katapult auf die Geschwindigkeit 75 km/h gebracht werden. Wie stark und wie lange wird es beschleunigt?

Man zeichne das v - t -Diagramm.

5. Ein Fahrstuhl in einem Fernmeldeturm benötigt für die Strecke 100 m die Zeit 150 s. Beschleunigungs- und Bremsweg sind gleich groß. Auf dem 80 m langen Mittelteil des Turmes fährt er mit konstanter Geschwindigkeit. Wie groß sind die Anfahrbeschleunigung und die gleich große Bremsverzögerung und die Geschwindigkeit im Mittelteil?

Lösung mit Hilfe des v - t -Diagramms.

6. Eine Faustregel aus der Fahrschule lautet: Bei einem Kraftfahrzeug ist der Bremsweg in Metern etwa gleich dem Quadrat eines Zehntels des Zahlenwertes der Geschwindigkeit in km/h.

Beispiel: Bei 50 km/h wird $s = 25$ m. Für welche Bremsverzögerung gilt diese Regel? Man benutze das v - t -Diagramm.

7. Ist die Regel aus Aufgabe 6 noch richtig, wenn man die Reaktionszeit des Fahrers, die ca. 0,1 s beträgt, berücksichtigt? Während der Reaktionszeit wird die ursprüngliche Geschwindigkeit beibehalten. Wie könnte man die Regel abändern? Man benutze das v - t -Diagramm.

8. Warum wird ein senkrecht nach unten aus dem Hahn ausfließender Wasserstrahl nach unten dünner?

9. Ein Werkstück soll während der Bearbeitung mit Kühlflüssigkeit gekühlt werden, die mit 2 m/s aus einem unter 30° gegen die Waagerechte nach oben geneigten Rohr fließt. Wohin, bezogen auf die Auftreffstelle, muss man die Rohrmündung setzen, wenn der Auftreffwinkel -45° sein soll?

10. Wie weit könnte man aus 1,3 m Höhe mit einem waagerechten Wasserstrahl spritzen, der senkrecht 21 m höher als die Austrittsöffnung aufsteigt?

11. Ein Förderband, das nach oben um 25° gegen die Horizontale geneigt ist, soll Kohle in Loren werfen. Hierbei soll die Kohle 0,3 m höher als das Förderbandende und waagrecht 1,5 m weit von diesem entfernt von oben in der Lorenmitte auftreffen. Wie groß muss die Geschwindigkeit des Förderbandes sein?

12. Die Elektronen in einer Fernsehbildröhre haben die Geschwindigkeit 75 000 km/s. Bis 30 cm vor dem Bildschirm werden sie auf der Strecke 3 cm quer zur Flugrichtung beschleunigt. Wie groß muss die Beschleunigung sein, wenn die Elektronen 10 cm von der Bildmitte entfernt auf dem Bildschirm auftreffen sollen?

13. Warum schießt man Erdsatelliten vorwiegend nach Osten ab?

1.2 Kinematik der Drehbewegung

1.2.1 Gleichförmige Kreisbewegung

Ein Körper bewegt sich in der in Bild 1.23 gezeichneten Weise auf einer Kreisbahn mit dem Radius r . Er legt dabei in willkürlich wählbaren gleichen Zeitintervallen stets gleiche Wege auf dem Kreisumfang zurück.

1.2.1.1 Bahngeschwindigkeit

Der Quotient aus der auf der Kreisbahn zurückgelegten Strecke und der dazu benötigten Zeit heißt Betrag der Bahngeschwindigkeit v . Wie bei der geradlinigen Bewegung (s. Abschn. 1.1.1.2) unterscheidet man auch hier wieder zwischen dem Durchschnittswert $\bar{v} = \Delta s / \Delta t$ und dem Momentanwert $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$, wobei s der Weg auf der Kreisbahn ist. Damit ergibt sich analog zu Abschn. 1.1.1.2 die

Definition: Bei der gleichförmigen Kreisbewegung ist der Betrag des Momentanwertes der Bahngeschwindigkeit konstant.

Damit gilt auch $v = s/t$ und $s = v t$, falls zur Zeit $t = 0$ auch $s = 0$ und $v \neq 0$ sind.

1.2.1.2 Allgemeine Definition der Beschleunigung

Während sich bei der geradlinig gleichförmigen Bewegung weder der Betrag noch die Richtung der Momentangeschwindigkeit ändern, bleibt bei der Kreisbewegung nur der Betrag konstant. Die Richtung ändert sich laufend (s. Bild 1.23).

Das führt zu einer interessanten und wichtigen Verallgemeinerung des in Abschn. 1.1.3 eingeführten Begriffes der Beschleunigung.

Definition: Beschleunigung

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} \quad \text{bei } v = \text{const.}$$

Dabei kann sich die Geschwindigkeit sowohl dem Betrage als auch der Richtung nach ändern. In beiden Fällen ändert sich der Geschwindigkeitsvektor.

Als Beispiel für eine bloße Änderung der Richtung von \vec{v} betrachten wir die

Radialbeschleunigung

Nach der obigen Definition ist die gleichförmige Kreisbewegung erstaunlicherweise eine beschleunigte Bewegung. Das wird klar, wenn wir die beiden Geschwindigkeitsvektoren \vec{v}_1 und \vec{v}_2 aus Bild 1.23 herauszeichnen (Bild 1.24). Um \vec{v}_2 aus \vec{v}_1 zu erhalten, muss sich in der Zeit dt die Geschwindigkeit um $\Delta \vec{v}$ ändern. $\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \Delta \vec{v}$. (Vektoraddition!). Dabei sind die Beträge von \vec{v}_1 und \vec{v}_2 gleich, d.h. $v_1 = v_2 = v$. Lassen wir dt und damit $\Delta \vec{v}$ gegen Null gehen, so erhalten wir die

Radialbeschleunigung

$$\vec{a}_r = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad \text{bei } v = \text{const.}$$

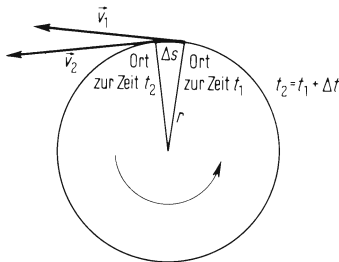


Bild 1.23 Zur Beschreibung einer Kreisbewegung

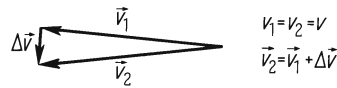


Bild 1.24 Änderung des Geschwindigkeitsvektors

Die Bezeichnung „Radial“ rührt daher, dass der Beschleunigungsvektor in radialer Richtung auf den Kreismittelpunkt zeigt. Er steht also immer senkrecht auf der Momentangeschwindigkeit. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so müsste er eine Komponente in Richtung der Bahngeschwindigkeit haben und damit auch deren Betrag ändern, den Körper also auch in tangentialer Richtung beschleunigen oder verzögern.

Den Betrag von a_r errechnen wir anhand von Bild 1.23 und 1.24. Wie man sieht, gilt für ein genügend kleines Zeitintervall Δt angenähert $\frac{\Delta s}{r} \approx \frac{\Delta v}{v}$. Daraus wird $\Delta v \approx v \frac{\Delta s}{r}$ oder

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} \approx \frac{v}{r} \frac{\Delta s}{\Delta t} \text{ und damit } a_r = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v}{r} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}.$$

Zusammenfassung: Die Radialbeschleunigung der Kreisbewegung steht immer senkrecht auf der Bahngeschwindigkeit und zeigt in radialer Richtung auf den Kreismittelpunkt. Ihr Betrag ist $a_r = v^2/r$.

Anwendungen. Alle Einrichtungen, mit deren Hilfe über längere Zeit eine bestimmte Beschleunigung aufrecht erhalten werden soll, z.B. zum Testen von Geräten oder Versuchspersonen für Raketenstarts, realisieren diese als Radialbeschleunigung.

Beispiel 4. In einer „Astronautenschleuder“ bewegen sich die Testpersonen auf einer Kreisbahn mit dem Radius $r = 5$ m. Wie groß muss die Bahngeschwindigkeit v sein, um eine Radialbeschleunigung $a_r = 80 \text{ m/s}^2 = 8 \text{ g}$ zu erzielen?

Für die Bahngeschwindigkeit gilt $v = \sqrt{a_r \cdot r} = \sqrt{80 \text{ m/s}^2 \cdot 5 \text{ m}} = 20 \text{ m/s}$.

1.2.1.3 Drehzahl und Winkelgeschwindigkeit

Dreht sich ein Rad, ein Maschinenteil oder dgl. um eine Achse, so ist die Beschreibung dieser Bewegung mit Hilfe der Bahngeschwindigkeit oft nicht zweckmäßig. In Bild 1.25 z.B. legen die beiden Punkte A und B eines rotierenden Rades in der gleichen Zeit verschiedene Wege Δs_A und Δs_B zurück. Demnach sind auch ihre Bahngeschwindigkeiten v_A und v_B verschieden, und zwar ist $v_B > v_A$. Man müsste hier also zur Beschreibung der Drehbewegung mit Hilfe der Bahngeschwindigkeit zusätzlich angeben, in welchem Abstand r von der Drehachse diese gemessen wird. Das ist aber oft schwerfällig und lässt sich durch die Einführung zweier neuer Größen, Drehzahl und Winkelgeschwindigkeit, vermeiden:

Drehzahl

Man bringt am Rad eine Marke an – oft ist eine solche schon vorhanden, z.B. das Ventil am Autorad – und zählt ab, wie viele Umdrehungen N das Rad in der Zeit t macht. Daraus ergibt sich die

Definition:

$$\text{Drehzahl} = \frac{\text{Zahl der Umdrehungen}}{\text{dazu benötigte Zeit}} \quad 1) \quad n = \frac{N}{t}.$$

Die Einheit der Drehzahl ist 1/Sekunde = 1 s^{-1} .

Bei einer gleichförmigen Drehbewegung ist dieser Wert konstant. Nur dieser Fall sei hier zunächst betrachtet.

Nennt man die Zeit, die das Rad für eine Umdrehung ($N = 1$) braucht, T , so ist

$$n = \frac{1}{T}.$$

Damit ergibt sich sofort der Zusammenhang der Drehzahl n mit der Bahngeschwindigkeit v eines Punktes im Abstand r von der Drehachse. Der Weg, der bei einer Umdrehung zurückgelegt wird, ist ja gleich dem Umfang des zugehörigen Kreises, $s = 2\pi r$.

Damit wird

$$v = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r n.$$

Man sieht, dass bei konstanter Drehzahl n die Bahngeschwindigkeit v mit wachsender Entfernung r von der Drehachse linear zunimmt, ein Ergebnis, das auch anschaulich verständlich ist.

Anwendungen. Beschreibung von Motoren, Angabe der Abspielgeschwindigkeit von CDs und dgl.

Beispiel 5. Eine CD rotiert mit $n = 300/\text{min}$. Wie groß ist die Bahngeschwindigkeit v der Rille im Abstand $r = 4 \text{ cm}$ von der Achse?

Lösung: Die Bahngeschwindigkeit ist $v = 2\pi r n = 2\pi \cdot 0,04 \text{ m} \cdot \frac{300}{60 \text{ s}} = 1,26 \text{ m/s}$

Winkelgeschwindigkeit

Der Begriff der Winkelgeschwindigkeit soll anhand von Bild 1.25 klar gemacht werden. Wie man dort sieht, überstreicht jeder vom Mittelpunkt ausgehende Strahl in der gleichen Zeit Δt den gleichen Winkel $\Delta\varphi$. – Die Wahl einer „Nullrichtung“ für $\varphi = 0$ kann willkürlich erfolgen. – Der Quotient $\Delta\varphi/\Delta t$ ist also eine für die Beschreibung der Drehbewegung geeignete Größe, die wie die Drehzahl unabhängig vom Radius ist.

¹⁾ Da es sich hierbei um einen Quotienten aus einer Zahl und einem Zeitintervall handelt, wäre eigentlich der Name „Drehfrequenz“ besser. Er hat sich aber bisher nicht durchgesetzt.

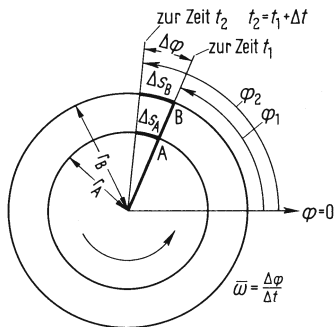


Bild 1.25 Zur Definition der Winkelgeschwindigkeit

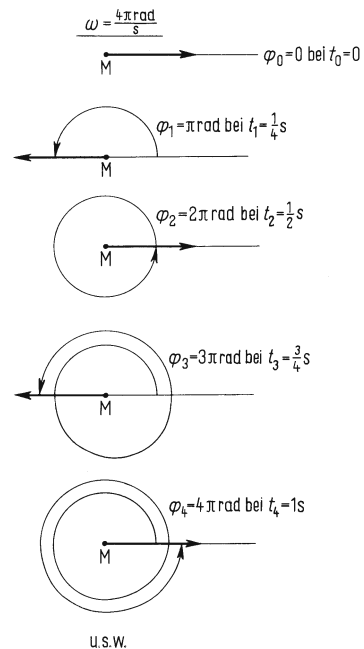


Bild 1.26 Beispiel einer gleichförmigen Kreisbewegung mit $\omega = 4\pi/s$. Bewegungszustand zu fünf aufeinanderfolgenden Zeitpunkten

Definition:

Mittlere Winkelgeschwindigkeit = $\frac{\text{gesamter überstrichener Winkel}}{\text{dazu benötigte Zeit}}$

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

Momentane Winkelgeschwindigkeit (kurz: Winkelgeschwindigkeit)

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$

Die Einheit der Winkelgeschwindigkeit ist

$$1 \text{ Radiant/Sekunde} = 1 \text{ rad s}^{-1} = 1/\text{Sekunde} = 1 \text{ s}^{-1}. \text{)}$$

Bei einer gleichförmigen Drehbewegung ist der Betrag der Winkelgeschwindigkeit konstant, und es ist $\bar{\omega} = \omega$.

1) Der Winkel φ wird hier praktisch immer im dimensionslosen Bogenmaß rad (= 1) gemessen. Bei vielen Umdrehungen kann er weit über 2π hinausgehen und hohe Zahlen erreichen.

Ist zur Zeit $t = 0$ der Winkel $\varphi = 0$, so gilt $\omega = \varphi/t$ und $\varphi = \omega t$ (s. auch Bild 1.26). Der Zusammenhang der Winkelgeschwindigkeit mit der Drehzahl ist einfach zu übersehen. Während einer Umdrehung wird der Winkel 2π überstrichen, und es vergeht die Zeit T .

Also wird

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n$$

Damit ergibt sich auch die Verknüpfung der Bahngeschwindigkeit mit der Winkelgeschwindigkeit

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \omega r$$

Mit Benutzung der Winkelgeschwindigkeit ergibt sich für die Radialbeschleunigung

$$a_r = \frac{v^2}{r} = v\omega = \omega^2 r$$

Diese verschiedenen Schreibweisen für a_r erweisen sich in der Praxis oft als zweckmäßig.

Aufgaben zu Abschn. 1.2.1

- Ein Turbinenläufer mit 2 m Durchmesser hat auf dem Umfang die höchstzulässige Bahngeschwindigkeit $v = 250$ m/s. Wie groß darf die Drehzahl werden?
- Zwei Treibriemen einer Transmission laufen mit den Geschwindigkeiten $v_1 = 6$ m/s und $v_2 = 10$ m/s. Die Durchmesser der zugehörigen fest verbundenen Riemenscheiben unterscheiden sich um 20 cm. Wie groß ist deren Drehzahl?
- Eine Walze rollt auf einer festen anderen Walze mit gleichem Durchmesser ab. Ihr Mittelpunkt beschreibt dabei einen Kreis um den Mittelpunkt der festen Walze. Wie viele Umdrehungen macht sie dabei?
- Mit Ultrazentrifugen kann man sehr hohe Beschleunigungen in radialer Richtung erzielen. Welche Drehzahl benötigt man, um im Radius 3 cm die Beschleunigung 10^7 m/s² $\approx 10^6$ g zu erzielen?
- Ein Flugzeug fliegt einen Looping mit dem Radius $r = 250$ m. Wie schnell muss es im höchsten Punkt seiner Bahn sein?
- Man vergleiche die Winkelgeschwindigkeit der Drehung der Erde um sich selbst mit derjenigen der Erde auf ihrer Bahn um die Sonne und der des Mondes auf der Bahn um die Erde.
- Ein Erdsatellit bewegt sich in 200 km Höhe in 88,8 min einmal um die Erde. Der Erdradius beträgt $6,4 \cdot 10^3$ km. Wie groß sind die Winkel- und Bahngeschwindigkeit sowie die Radialbeschleunigung des Satelliten?

1.2.2 Ungleichförmige Kreisbewegung

Wird z.B. ein Motor aus dem Stillstand auf eine bestimmte Enddrehzahl gebracht oder ändern rotierende Maschinenteile ihre Drehzahl von niedrigen auf hohe Werte und umgekehrt, so handelt es sich um ungleichförmige Kreisbewegungen. Da sich mit der Drehzahl auch die Bahngeschwindigkeit und die Winkelgeschwindigkeit ändern, können deren Momentanwerte also nicht konstant sein. Es ist daher zweckmäßig, zur Beschreibung der ungleichförmigen Kreisbewegung die folgenden Größen einzuführen.

Bahnbeschleunigung. Diese Größe ist analog zu der in Abschn. 1.1.3 behandelten Beschleunigung der geradlinigen Bewegung.

Definition:

Mittlere Bahnbeschleunigung = $\frac{\text{Änderung der Bahngeschwindigkeit}}{\text{dazu benötigte Zeit}}$

$$\bar{a}_t = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Momentane Bahnbeschleunigung (kurz: Bahnbeschleunigung)

$$a_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{v}$$

Die Richtung der Bahnbeschleunigung ist tangential zur Kreisbahn; sie steht damit senkrecht auf der Radialbeschleunigung \vec{a}_r .

Winkelbeschleunigung. Sie ist immer dann nützlich, wenn von vornherein nicht mit der Bahngeschwindigkeit v , sondern mit der Winkelgeschwindigkeit ω gerechnet wird. Analog zur Bahnbeschleunigung gilt die

Definition:

Mittlere Winkelbeschleunigung = $\frac{\text{Änderung der Winkelgeschwindigkeit}}{\text{dazu benötigte Zeit}}$

$$\alpha = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$$

Momentane Winkelbeschleunigung (kurz: Winkelbeschleunigung)

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \frac{\dot{v}}{r}$$

Die Einheit der Winkelbeschleunigung ist $1 \text{ rad s}^{-2} = 1 \text{ s}^{-2}$.

Der Zusammenhang zwischen der Winkelbeschleunigung α und der Bahnbeschleunigung a_t auf der Bahn mit dem konstanten Radius r ergibt sich aus den Beziehungen für die zugehörigen Geschwindigkeiten:

$$\bar{a}_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} = \frac{\omega_2 r - \omega_1 r}{\Delta t} = \frac{(\omega_2 - \omega_1)r}{\Delta t} = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} r = \bar{\alpha} r$$

Da die gleiche Betrachtung auch für die Momentanwerte durchgeführt werden kann, gilt allgemein für Kreisbewegungen

Bahnbeschleunigung = Winkelbeschleunigung \times Radius

$$a_t = \alpha r$$

Vergleicht man die oben besprochenen „Bahngrößen“ s , v und a auf einer Bahn mit dem Radius r mit den zugehörigen „Winkelgrößen“ φ , ω und α , so ergibt sich mit $s = \varphi r$, $v = \omega r$ und $a = \alpha r$ allgemein für Kreisbewegungen die

Merkregel: Bahngröße = Winkelgröße \times Radius

Gleichmäßig beschleunigte Kreisbewegung

Sie ist der wichtigste Spezialfall der ungleichförmigen Kreisbewegung. Bei der gleichmäßig beschleunigten Kreisbewegung sind die Momentanwerte der Bahnbeschleunigung und der Winkelbeschleunigung konstant.

$$a_t = \text{const}; \quad \alpha = \text{const}$$

Analog zu den in Abschn. 1.1.3.1 für die geradlinige Bewegung hergeleiteten Beziehungen ergibt sich jetzt Folgendes:

Bahngeschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit wachsen oder fallen linear mit der Zeit.

Das Letztere ist ein Abbremsvorgang mit $a_t < 0$ und $\alpha < 0$.

$$v = v_0 + a_t t; \quad \omega = \omega_0 + \alpha t \quad (1.11)$$

Da die Drehzahl $n = \omega/2\pi$ ist, ändert auch sie sich linear mit der Zeit

$$n = n_0 + \frac{\alpha}{2\pi} t \quad (1.12)$$

Steht der Körper zur Zeit $t = 0$ still, so sind v_0 , ω_0 und n_0 natürlich gleich Null.

Betrachtet man den auf der Kreisbahn im Abstand r von der Drehachse zurückgelegten Weg s und den von einem beliebigen Radius überstrichenen Winkel φ , so erkennt man deren quadratische Abhängigkeit von der Zeit in folgenden Gleichungen

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a_t t^2; \quad \varphi = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \quad (1.13)$$

Ebenso gilt wegen $N = \varphi/2\pi$ für die Gesamtzahl der Umdrehungen

$$N = \frac{\omega_0 t}{2\pi} + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{2\pi} t^2 = n_0 t + \frac{\alpha}{4\pi} t^2 \quad (1.14)$$

Auch bei den letzten drei Beziehungen können zur Zeit $t = 0$ die v_0 , n_0 oder ω_0 gleich Null sein. Bild 1.27 zeigt ein entsprechendes Diagramm, in dem φ und N in Abhängigkeit von der Zeit aufgetragen sind, Bild 1.28 das zugehörige ω - t -Diagramm¹⁾. Da die Zahl der Umdrehungen N mit einem Zählwerk gemessen werden kann, lässt sich aus deren Zeitabhängigkeit $N = f(t)$ in der Praxis leicht α bestimmen.

Beispiel 6. Ein aus dem Stillstand gleichmäßig beschleunigter Motor hat nach 10 s insgesamt $N = 250$ Umdrehungen gemacht. Welche Drehzahl n hat er jetzt? Wie groß ist seine Winkelbeschleunigung α ?

Nach Gl. (1.14) erhält man $N = \frac{1}{2} \frac{\alpha t^2}{2\pi}$. Damit wird $\alpha = \frac{4\pi N}{t^2} = \frac{4\pi \cdot 250}{100 \text{ s}^2} = \frac{10\pi}{\text{s}^2}$. Seine Drehzahl ist demnach

$$n = \frac{\alpha}{2\pi} t = \frac{10\pi}{2\pi \text{ s}^2} \cdot 10 \text{ s} = \frac{50}{\text{s}} = \frac{3000}{\text{min}}$$

¹⁾ Die Fläche unter der $\omega = f(t)$ -Kurve entspricht analog zu Abschn. 1.1 hier dem überstrichenen Winkel φ .

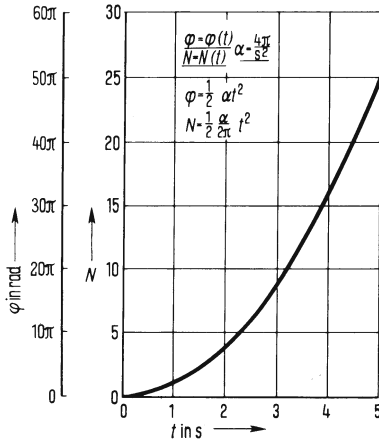


Bild 1.27 ω - t - und N - t -Diagramm einer gleichmäßig beschleunigten Kreisbewegung

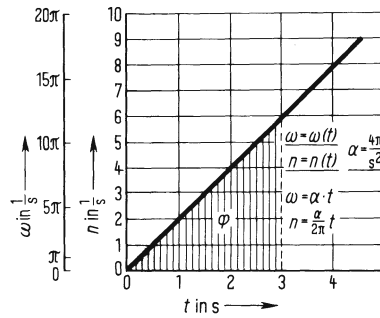


Bild 1.28 ω - t - und n - t -Diagramm einer gleichmäßig beschleunigten Kreisbewegung

Kennzeichnung des Drehsinnes

Will man den Drehsinn eines rotierenden Körpers kennzeichnen, so kommt man mit den Aussagen „rechts herum“ oder „links herum“ in Verlegenheit, wenn der Standpunkt des Beobachters in Bezug auf den rotierenden Körper nicht eindeutig ist. Beide Aussagen können dann wahlweise richtig sein. Diese Zweideutigkeit lässt sich beheben, wenn man bei einer Drehbewegung der Winkelgeschwindigkeit ω und der Winkelbeschleunigung α außer dem Betrag auch noch eine Richtung zuordnet, sie also zu Vektoren macht. Deren Richtung ergibt sich durch die sogenannte „Rechtsschraubenregel“ (Bild 1.29).

Definition: Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ und Winkelbeschleunigung $\vec{\alpha}$ sind Vektoren¹⁾. $\vec{\omega}$ hat die Richtung, in der sich eine Schraube mit Rechtsgewinde bewegt, die im gleichen Drehsinn wie der betrachtete Körper gedreht wird, steht also immer senkrecht auf der Drehebene. Der Vektor der Winkelbeschleunigung $\vec{\alpha}$ zeigt in die Richtung von $\vec{\omega}$, wenn der Betrag von $\vec{\omega}$ wächst, in die entgegengesetzte Richtung, wenn der Betrag von $\vec{\omega}$ abnimmt.

Man präge sich diese Definition z.B. an der Armbanduhr ein (Bild 1.30). Die Winkelgeschwindigkeiten der Zeiger weisen in den Arm. Dabei ist der zum großen Zeiger

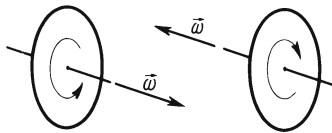


Bild 1.29 Festlegung der Richtung der Winkelgeschwindigkeit

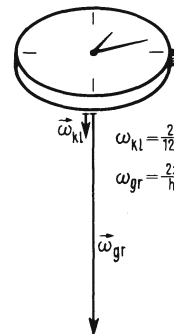


Bild 1.30 Winkelgeschwindigkeiten der Uhrzeiger

¹⁾ Daher werden sie auch mit einem Pfeil über dem Formelbuchstaben gekennzeichnet.

gehörende Vektor $\vec{\omega}_{gr}$ 12mal so lang wie der des kleinen Zeigers $\vec{\omega}_{kl}$. Die zugehörigen überstrichenen Winkel $\dot{\varphi}$ wachsen im Laufe der Lebensdauer einer Uhr auf riesige Werte an, z.B. wird $\dot{\varphi}_{kl}$ jeden Tag um 4π größer.

1.2.3 Vergleich zwischen geradliniger und Kreisbewegung

Zwischen der geradlinigen und der Kreisbewegung lassen sich formale Analogien finden, die recht interessant sind und außerdem das Behalten der Formeln erleichtern. Man setzt dazu den Weg s bei der geradlinigen Bewegung in Analogie zum überstrichenen Winkel φ bei der Kreisbewegung und erhält die nachstehend aufgeführten analogen Beziehungen.

Geradlinige Bewegung	Kreisbewegung
s	φ
$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$	$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$
$a = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{s}$	$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$
Bei gleichförmiger Bewegung:	
$v = \text{const}$	$\omega = \text{const}$
$s = vt$	$\varphi = \omega t$
Bei gleichmäßig beschleunigter Bewegung:	
$a = \text{const}$	$\alpha = \text{const}$
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$	$\varphi = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$

Es sei noch bemerkt, dass geradlinige und Kreisbewegung auch gleichzeitig auftreten können, ja sogar sich in mehrfacher Form (z.B. gleichförmig und beschleunigt) überlagern können. Man denke z.B. an das Rad eines fahrenden Autos. Die Behandlung solcher Vorgänge geht – von einigen einfachen Ausnahmen abgesehen – über den Rahmen dieses Buches hinaus. Hierfür gibt es spezielle Literatur, z.B. [7].

Aufgaben zu Abschn. 1.2.2 und 1.2.3

1. Ein Motor erreicht aus dem Stillstand nach 10 s die Drehzahl 3000/min. Wie groß ist die Winkelbeschleunigung? Wie viele Umdrehungen hat er insgesamt gemacht?

2. Eine Schleifscheibe wird in 3 s von $n_1 = 6000/\text{min}$ auf $n_2 = 4200/\text{min}$ gleichmäßig abgebremst.

Wie groß ist die negative Winkelbeschleunigung? Wie viele Umdrehungen hat die Scheibe in diesen 3 s gemacht? – Man benutze ein ω - t -Diagramm.

3. Ein Bootsmotor wird mit einer 0,8 m langen Schnur angeworfen, die vorher ganz auf einer Rolle mit 10 cm Durchmesser aufgewickelt war. In welcher Zeit muss die Schnur abgewickelt sein, wenn der Motor auf die Drehzahl 1200/min kommen soll?

4. Ein Rad mit 1 m Durchmesser wird aus der Ruhe 1,2 s lang mit der Winkelbeschleunigung $\alpha = 1,5/s^2$ beschleunigt. Wie groß ist dann der Betrag der gesamten Beschleunigung eines Umfangspunktes (Vektorsumme aus \vec{a}_r und \vec{a}_t)?

5. Ein Rad mit 60 cm Durchmesser soll in 2 s auf eine solche Drehzahl kommen, dass ein Punkt am Umfang eine Radialbeschleunigung a_r erfährt, deren Betrag gleich dem der Bahnbeschleunigung a_t ist. Wie groß muss die Winkelbeschleunigung sein? Wie groß ist dann a_r ?
6. Ein Auto beschleunigt mit $a = 2 \text{ m/s}^2$. Wie groß ist die Winkelbeschleunigung α_1 eines Rades mit 65 mm Durchmesser in Bezug auf seine Achse? Welche Winkelbeschleunigung α_2 erfährt

der höchste Punkt des Rades in Bezug auf den Abrollpunkt?

7. Man skizziere den Vektor der Winkelgeschwindigkeit der Unruhe einer Uhr als Funktion der Zeit.

8. Ein Geschoss wird in einem 0,8 m langen „gezogenen“ Lauf ein halbes Mal um sich selbst gedreht. Es tritt mit 600 m/s aus. Wie groß ist seine Drehzahl?

1.2.4 Allgemeine Bewegung eines Massenpunktes

Wie wir bereits in Abschn. 1.1.4.1 bei den Wurfbewegungen gesehen haben, gibt es viele Bewegungsvorgänge, die weder geradlinig noch längs einer Kreisbahn verlaufen. Solche Bewegungen beschreibt man mit dem schon in Abschn. 1.1.4.1 benutzten Prinzip der ungestörten Überlagerung von Bewegungen.

In Bild 1.31 sind zwei momentane Orte 1 und 2 eines sich in einem räumlichen Koordinatensystem bewegendem Körpers durch die Spitzen der vom Koordinaten-Ursprung ausgehenden Ortsvektoren \vec{s} , (zur Zeit t) und $\vec{s} + \Delta\vec{s}$ (zur Zeit $t + \Delta t$) gekennzeichnet.

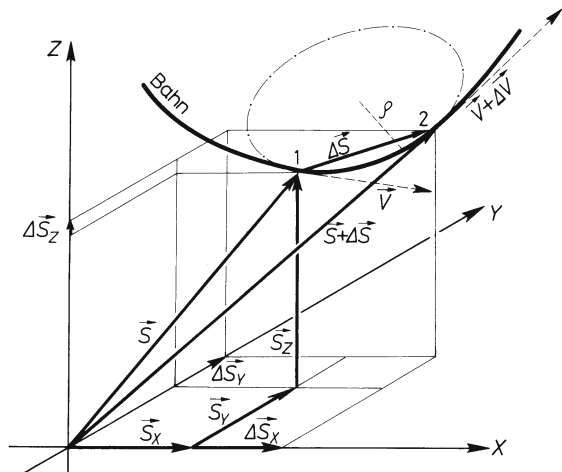


Bild 1.31 Bahn eines Körpers im Raum (—) mit zwei Ortsvektoren \vec{s} und $\Delta\vec{s}$ und zwei Geschwindigkeitsvektoren \vec{v} und $\vec{v} + \Delta\vec{v}$

- - - - Krümmungskreis
- - - - Krümmungsradius

Wie man der Zeichnung entnimmt, ist \vec{s} , die Vektorsumme seiner drei rechtwinklig aufeinander stehenden Komponenten \vec{s}_x , \vec{s}_y und \vec{s}_z .

Es gilt:

$$\vec{s} = \vec{s}_x + \vec{s}_y + \vec{s}_z$$

und ebenso

$$\vec{s} + \Delta\vec{s} = \vec{s}_x + \Delta\vec{s}_x + \vec{s}_y + \Delta\vec{s}_y + \vec{s}_z + \Delta\vec{s}_z$$

Um die jeweilige Lage des Ortsvektors \vec{s} als Funktion der Zeit t angeben zu können, genügt es also, die Abhängigkeit seiner Komponenten von der Zeit zu kennen.

Es gilt:

$$\vec{s}(t) = \vec{s}_x(t) + \vec{s}_y(t) + \vec{s}_z(t)$$

Abgekürzt schreibt man häufig:

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} s_x(t) \\ s_y(t) \\ s_z(t) \end{pmatrix}$$

Es sei hier an das Beispiel des waagerechten Wurfes in Abschn. 1.1.4.1 erinnert. Dort ist

$$\vec{s}_x(t) = \vec{v}_w t; \vec{s}_y(t) = 0 \text{ und } \vec{s}_z(t) = -(1,2) \vec{g} t^2.$$

Geschwindigkeit

Wie man in Bild 1.31 sieht, bewegt sich der Körper im Zeitintervall Δt vom Punkt 1 zum Punkt 2, wobei er die eingezeichnete krumme Bahn durchläuft. Ersetzt man dieses Bahnstück durch die Änderung des Ortsvektors $\Delta \vec{s}$, so kann man dem Körper zwischen den betrachteten Bahnpunkten eine Durchschnittsgeschwindigkeit zuschreiben.

Es gilt die

Definition:

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t}$$

Lässt man das Zeitintervall Δt gegen Null gehen, so ergibt sich die

Definition: Momentangeschwindigkeit

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \dot{\vec{s}}$$

\vec{v} hat die Richtung der Bahntangente.

Da man eine Vektorsumme gliedweise differenzieren darf, gilt

$$\vec{v} = \frac{d}{dt} (\vec{s}_x + \vec{s}_y + \vec{s}_z) = \dot{\vec{s}}_x + \dot{\vec{s}}_y + \dot{\vec{s}}_z = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z$$

in Übereinstimmung mit den Überlegungen in Abschn. 1.1.4.1, wo allerdings $\vec{v}_y = 0$ ist.

Für den Betrag des Vektors mit den Komponenten $\vec{v}_x, \vec{v}_y, \vec{v}_z$ gilt

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Beschleunigung

Meist interessiert nur die Momentanbeschleunigung, sodass wir uns auf diese beschränken können. Wir erinnern an die in Abschn. 1.2.1.2 bereits gegebene

Definition: Beschleunigung

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{s}} \quad (\text{S. hierzu auch Bild 1.32.}). \text{ Es gilt}$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(\vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z) = \dot{v}_x + \dot{v}_y + \dot{v}_z = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z$$

Da die Änderungen der Geschwindigkeitskomponenten diesen selbst im Allgemeinen nicht proportional sind, folgt:

Der Beschleunigungsvektor \vec{a} hat im Allgemeinen nicht die Richtung der Geschwindigkeit und damit auch nicht die der Bahntangente.

Für den Betrag erhält man

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

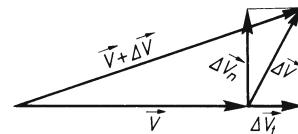
Tangential- und Normalbeschleunigung. Manchmal ist es zweckmäßig, den Beschleunigungsvektor \vec{a} in zwei Komponenten tangential und senkrecht (normal) zur Bahn und damit zur Geschwindigkeit zu zerlegen. In Bild 1.32 sind zwei im Zeitintervall Δt aufeinander folgende Geschwindigkeitsvektoren gezeichnet.

Bild 1.32 Zwei Momentangeschwindigkeiten

\vec{v} und $\vec{v} + \Delta \vec{v}$

$\Delta \vec{v}_t$ = Tangentialkomponente der Geschwindigkeitsänderung

$\Delta \vec{v}_n$ = Normalkomponente der Geschwindigkeitsänderung



Man kann die vektorielle Geschwindigkeitsänderung $\Delta \vec{v}$ in eine Tangentialkomponente $\Delta \vec{v}_t$ und eine Normalkomponente $\Delta \vec{v}_n$ zerlegen. $\Delta \vec{v}_t$ beschreibt für $\Delta t \rightarrow 0$ die Änderung des Betrages von \vec{v}_n , $\Delta \vec{v}_n$ die Änderung der Geschwindigkeitsrichtung (vgl. Abschn. 1.2.1.2). Für die zugehörigen Beschleunigungsvektoren gilt entsprechend:

$$\text{Tangentialbeschleunigung } \vec{a}_t = \frac{d\vec{v}_t}{dt}; \quad \text{Normalbeschleunigung } \vec{a}_n = \frac{d\vec{v}_n}{dt}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

Den Betrag von a_t erhält man, wenn man sich klarmacht, dass er nur die Änderung des Geschwindigkeitsbetrages pro Zeitintervall darstellt. Hierzu differenziert man den Betrag

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad \text{nach der Zeit}$$

$$a_t = \dot{v} = \frac{2v_x \dot{v}_x + 2v_y \dot{v}_y + 2v_z \dot{v}_z}{2\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}$$

Kürzt man durch 2 und berücksichtigt, dass $\dot{v}_x = a_x$, $\dot{v}_y = a_y$ und $\dot{v}_z = a_z$ ist, so erhält man für den

Betrag der Tangentialbeschleunigung

$$a_t = \frac{v_x}{v} a_x + \frac{v_y}{v} a_y + \frac{v_z}{v} a_z$$

Aus Bild 1.32 sieht man, dass $\Delta v_n^2 = \Delta v^2 - \Delta v_t^2$ ist, also ergibt sich entsprechend der

Betrag der Normalbeschleunigung

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2}$$

Man kann für a_n noch einen anderen, manchmal nützlichen Ausdruck hinschreiben, wenn man das jeweilige Kurvenstück durch seinen Krümmungskreis mit dem Krümmungsradius ϱ ersetzt (vgl. Bild 1.31). Dann folgt aus Abschn. 1.2.1.2 natürlich sofort

$$a_n = \frac{v^2}{\varrho}$$

Beispiel 7. Am Fall des waagerechten Wurfes aus Beispiel 3 in Abschn. 1.1.4.1 wollen wir für den Zeitpunkt $t_1 = 0,5$ s zusätzlich zu der dort bereits berechneten Momentangeschwindigkeit jetzt noch die Momentanbeschleunigung a_1 , die Tangential- und die Normalbeschleunigung berechnen. Es sind $\vec{a}_{x1} = 0$; $\vec{a}_{y1} = 0$; $\vec{a}_{z1} = -\vec{g}$; $\vec{v}_{z1} = -\vec{g}t_1$ und $\vec{v}_{x1} = \vec{v}_w$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= 0 + 0 - \vec{g} \quad \text{und} \quad a_1 = g \\ a_{t1} &= \frac{v_{w1}}{v_1} 0 + 0 + \frac{g_{z1}}{v_1} g = g \frac{gt_1}{v_1} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{5 \text{ m/s}}{5,83 \text{ m/s}} = 8,58 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ a_{n1} &= \sqrt{a_1^2 - a_{t1}^2} = \sqrt{g^2 - a_{t1}^2} = \sqrt{10^2 - 8,58^2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 5,14 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{aligned}$$

Aus dem letzten Ergebnis kann man schließlich auch noch den momentanen Krümmungsradius ϱ_1 berechnen:

Aus $a_{n1} = v_1^2/\varrho_1$ folgt $\varrho_1 = v_1^2/a_{n1} = 6,61$ m.

Aufgabe zu Abschn. 1.2.4

1. Ein Flugzeug fliegt in 44,2 m Höhe waagrecht mit der Geschwindigkeit 180 km/h über eine Wasserfläche. Die Besatzung schleudert ebenfalls waagrecht, aber quer zur Flugrichtung mit der Geschwindigkeit 20 m/s ein Rettungsgerät weg.

(Der Luftwiderstand werde vernachlässigt.)

- Man gebe Ortsvektor und Geschwindigkeitsvektor als Funktionen der Zeit an.
- Mit welcher Geschwindigkeit trifft das Gerät auf der Wasseroberfläche auf?
- Wie viel Prozent der Fallbeschleunigung beträgt beim Aufprall die Normalbeschleunigung?
- Wie groß ist beim Aufprall der Radius des momentanen Krümmungskreises der Bahn?

1.3 Dynamik der geradlinigen Bewegung

In den obigen Abschnitten haben wir uns damit begnügt, Bewegungen zu beschreiben, ohne nach deren Ursachen zu fragen. Gerade das aber ist die Aufgabe der Dynamik, der Lehre von den Kräften. Erst mit ihr gelingt es, einen mechanischen Vorgang vollständig zu erfassen. Wie wir unten sehen werden, ist der Inhalt der folgenden Abschnitte sogar die Basis für das Verständnis nicht nur mechanischer, sondern auch elektrischer, magnetischer und atomarer Vorgänge.

Der Dynamik kommt so eine weit über die Mechanik hinausgehende grundsätzliche Bedeutung zu. Das gilt besonders für die jetzt zu behandelnden von Isaac Newton (1643 bis 1727) aufgestellten „Lehrsätze“, die Newtonschen Axiome¹⁾.

1.3.1 Erstes Newtonsches Axiom

Stellen wir uns vor, wir würden einen Schlitten, den wir jedesmal auf eine bestimmte Geschwindigkeit gebracht haben, einmal auf Sand, dann auf einer nassen Wiese und schließlich auf einer glatten Eisfläche gleiten lassen. In allen drei Fällen würde er nach dem Loslassen vermutlich geradlinig weiterrutschen. Nur würde er im Sand nach ganz kurzer Zeit zum Stehen kommen, auf der Wiese schon etwas länger gleiten und auf der Eisfläche am längsten in Bewegung bleiben. Jedesmal kommt er dadurch zur Ruhe, dass die Unterlage ihn so beeinflusst, dass die ursprüngliche Bewegung gehemmt wird. Bei der Eisfläche ist dieser Einfluss schon sehr gering, und man kann sich unschwer vorstellen, dass der Schlitten sich ohne jede äußere Beeinflussung geradlinig und mit unveränderter Geschwindigkeit immer weiter bewegen würde. Genauso leuchtet ein, dass ein Körper, der in Ruhe ist, sich nicht ohne äußere Beeinflussung in Bewegung setzt.

Diese Vorstellungen führen uns zu dem folgenden zum erstenmal von Newton (s.o.) formulierten Lehrsatz.

Erstes Newtonsches Axiom: Ohne äußere Beeinflussung verharrt ein Körper im Zustand der Ruhe oder der geradlinig gleichförmigen Bewegung.

Dieser Satz ist nicht experimentell beweisbar, denn es gelingt nirgends, auch nicht im Weltraum, einen Körper nicht mit anderen Körpern in Wechselwirkung treten zu lassen. Daher die Bezeichnung „Axiom“.

1.3.2 Zweites Newtonsches Axiom

Ändert ein Körper seinen Bewegungszustand – sei es, dass er aus der Ruhe in Bewegung gebracht wird oder seine Geschwindigkeit dem Betrage oder der Richtung nach geändert wird –, so muss nach Abschn. 1.3.1 eine äußere Ursache dafür vorliegen.

¹⁾ Ein Axiom ist ein nicht beweisbarer (!) grundlegender Lehrsatz, der zusammen mit anderen Axiomen in einem Axiomensystem eine besonders zweckmäßige Darstellung komplizierter Zusammenhänge ermöglicht. Die Axiome müssen natürlich untereinander widerspruchsfrei sein.

Kraft

Definition: Ursachen für Änderungen des Bewegungszustandes eines Körpers nennen wir Kräfte.

An einer Bewegungsänderung erkennen wir also stets das Wirken einer Kraft.

Nachdem vereinbart ist, was wir unter einer Kraft – Formelbuchstabe F – verstehen wollen, benötigen wir für diese wichtige Größe ein Messverfahren. Wir gehen dazu von einem einfachen Kräftevergleich aus.

Definition: Verursachen zwei Kräfte F_1 und F_2 an demselben unveränderten Körper verschiedene Beschleunigungen a_1 und a_2 , so sollen sich die Kräfte verhalten wie die entsprechenden Beschleunigungen

$$F_1 : F_2 = a_1 : a_2$$

Damit können wir natürlich nicht nur zwei, sondern beliebig viele Kräfte miteinander vergleichen. Allgemein gilt dann

$F \sim a$ bei unverändertem beschleunigten Körper

Beispiel 8. Man lässt einen Körper durch drei verschiedene konstante Kräfte (z.B. die auf verschiedene „Gewichtsstücke“ wirkende Anziehungskraft der Erde, deren Richtung man mit einem Faden über eine Rolle umlenken kann) aus der Ruhe heraus beschleunigen (z.B. auf einer Demonstrations-Fahrbahn) und ermittelt die zugehörigen Beschleunigungen, indem man die jeweils für die Messstrecke 1 m benötigten Zeiten stoppt. Man erhält die Werte $t_1 = 1,155$ s, $t_2 = 0,816$ s und $t_3 = 0,667$ s. Daraus ergeben sich wegen $a = 2s/t^2$ die Beschleunigungen $a_1 = 1,5$ m/s², $a_2 = 3$ m/s² und $a_3 = 4,5$ m/s². Sie verhalten sich also wie 1:2:3. Dann verhalten sich auch die drei Kräfte, die sie verursacht haben, nach der obigen Definition wie 1:2:3.

Träge Masse

Jeder weiß, dass man viel leichter einen Tennisball als einen Fußball aus der Ruhe heraus auf eine hohe Geschwindigkeit bringen kann. Noch schwieriger ist es, eine Stoßkugel zu beschleunigen. Beim Abbremsen haben wir die gleichen Verhältnisse. Deshalb legten wir bei dem oben vereinbarten Vergleichsverfahren für Kräfte auch so viel Wert auf die Bedingung, dass der verwendete Körper unverändert der gleiche bleibt.

Die Eigenschaft aller Körper, sich Änderungen ihres jeweiligen Bewegungszustandes zu widersetzen, nennt man Beharrungsvermögen, Trägheit oder träge Masse.

Mit dieser Bezeichnung kann man die anfangs genannte Erfahrung auch so formulieren: Die Stoßkugel hat eine größere träge Masse als der Fußball und dieser wieder als der Tennisball. Jeder kennt dieses Beharrungsvermögen aus vielfacher Erfahrung. Man denke nur an heftiges Anfahren oder Abbremsen eines Fahrzeuges, in dem man sich befindet. Auch

für die träge Masse – Formelbuchstabe m – benötigen wir ein Messverfahren. Dazu definieren wir zunächst, wie bei den Kräften, eine Vorschrift zum Vergleich von trägen Massen.

Definition: Die trägen Massen m_1 und m_2 zweier Körper, die durch dieselbe Kraft beschleunigt werden, sollen umgekehrt proportional zu den erzielten Beschleunigungen a sein.

$$m_1 : m_2 = a_2 : a_1 \quad \text{bei } F = \text{const}$$

oder allgemein

$$m \sim \frac{1}{a}$$

Beispiel 9. Man lässt ein und dieselbe Kraft F (z.B. die auf ein „Gewichtsstück“ wirkende Anziehungskraft der Erde, deren Richtung mit einem Faden über eine Rolle umgelenkt werden kann) nacheinander drei verschiedene Körper (z.B. auf einer Demonstrations-Fahrbahn) beschleunigen. Die erzielten Beschleunigungen erhält man z. B. wie in Beispiel 7 wieder durch eine Weg-Zeitmessung. Dabei erhält man die Werte $a_1 = 1,2 \text{ m/s}^2$, $a_2 = 2 \text{ m/s}^2$ und $a_3 = 2,4 \text{ m/s}^2$. Es ist also $a_1 : a_2 : a_3 = 1 : 1,66 : 2$. Dann ist der Körper 3 derjenige mit der kleinsten trägen Masse. Denn dafür gilt $m_1 : m_2 : m_3 = 1 : 0,6 : 0,5$.

Interessanterweise kommt es bei Vergleichen träger Massen nur auf die erzielten Beschleunigungen an und nicht auf andere Eigenschaften der Körper wie Form, Material, Volumen usw. Dies ist auch der Grund dafür, dass man mit der Eigenschaft „träge Masse“ häufig Stoffmengen jeder Art, also z.B. feste, flüssige und gasförmige Stoffe, Körper und Güter misst¹⁾. Man spricht dann einfach von der „Masse“ dieser Stoffmengen und lässt das Wort „träge“ weg. Auch wir werden später diese vereinfachte Ausdrucksweise benutzen, doch muss uns dabei immer bewusst bleiben, wie der Vergleich der Massen zu verstehen ist.

Zusammenfassung: Die vereinbarten Vergleichsverfahren für Kräfte und träge Massen basieren beide auf Beschleunigungsmessungen. Sie lassen sich deshalb zusammenfassen: Aus $a \sim F$ bei $m = \text{const}$ und $a \sim 1/m$ bei $F = \text{const}$ folgt

$$a \sim \frac{F}{m}$$

Hält man nämlich in dieser Beziehung die Kraft konstant, so ist F nur eine Proportionalitätskonstante, und es gilt $a \sim \text{const}/m$, was gleichbedeutend mit $a \sim 1/m$ ist. Die entsprechende Überlegung kann man für F anstellen bei einem Körper mit $m = \text{const}$. Meist schreibt man die obige zusammengefasste Beziehung etwas anders und nennt sie dann

Zweites Newtonsches Axiom

$$F \sim m a$$

¹⁾ Streng genommen ist die Stoffmenge eine eigene physikalische Größe. Sie wird in Abschn. 2.2.3.2 definiert.

Dass auch diese Beziehung ein Axiom ist, wird klar, wenn wir uns daran erinnern, dass sie ausschließlich auf willkürlichen Definitionen beruht, die auch anders hätten gewählt werden können. Das zweite Newtonsche Axiom kann also nicht experimentell „bewiesen“ werden, wie es oft fälschlich dargestellt wird.

1.3.2.1 Einheiten für Kraft und Masse

Ein Vergleichsverfahren wird zum Messverfahren, wenn man eine Einheit festlegt. Das soll im Folgenden geschehen.

Man kann ein Proportionalitätszeichen immer durch ein Gleichheitszeichen und eine Proportionalitätskonstante ersetzen:

$$\text{Aus } F \sim m a \quad \text{wird } F = \text{const } m a$$

Da bisher weder für F noch für m eine Einheit festliegt, kann die Konstante der Einfachheit halber gleich Eins gesetzt werden, und wir erhalten für das Zweite Newtonsche Axiom

$$F = m a \quad (\text{häufig auch dynamisches Grundgesetz genannt})$$

Da die Einheit für a als 1 m/s^2 gegeben ist, können wir noch eine Einheit für die träge Masse m festlegen; dann ist automatisch die Krafteinheit als abgeleitete Einheit gegeben. Oder wir wählen willkürlich die Einheit der Kraft F ; dann liegt automatisch die Masseneinheit fest.

Internationales Einheitensystem

Hier sind die Einheiten für die Basisgrößen Länge und Zeit das Meter m und die Sekunde s (s. Abschn. 1.1.1.1).

Als dritte Basisgröße wählt man die träge Masse. Ihre Einheit nennt man „Kilogramm“ kg .

Definition: Ein Kilogramm ist die träge Masse des eigens als Normal hergestellten im Pavillon de Breteuil bei Paris befindlichen Normkörpers aus Platin-Iridium¹⁾.

Teile und Vielfache: $10^{-3} \text{ kg} = 1 \text{ g}$, $10^3 \text{ kg} = 1 \text{ t}$, eine „Tonne“.

Zur Messung einer unbekanntenen trägen Masse müsste man also, genaugenommen, dieselbe Kraft einmal auf den Normkörper und einmal auf den unbekanntenen Körper wirken lassen und die erzielten Beschleunigungen messen und vergleichen. Wäre z.B. die Beschleunigung des unbekanntenen Körpers halb so groß wie die des Normkörpers, so wäre seine träge Masse 2 kg . Wir werden jedoch später bequemere Verfahren zum Massenvergleich kennenlernen.

¹⁾ Ursprünglich sollte dieser Körper die gleiche Masse haben wie 1 dm^3 Wasser bei $4 \text{ }^\circ\text{C}$. Genaue Messungen zeigen jedoch geringfügige Unterschiede, die allerdings in der Praxis meist unerheblich sind.

Die Kraft ist im Internationalen Einheitensystem eine abgeleitete Größe. Ihre Einheit nennt man „Newton“, N.

$$1 \text{ Newton} = 1 \text{ Kilogramm} \frac{\text{Meter}}{\text{Sekunde}^2} \qquad 1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Ein Newton ist also die Kraft, die z.B. einem Körper mit der trägen Masse 1 kg die Beschleunigung 1 m/s^2 erteilt.

Träge Masse und Gewichtskraft

Lassen wir einen Körper, den wir in der Hand halten, los, so setzt er sich augenblicklich in Richtung auf die Oberfläche der Erde in Bewegung. Wie wir aus Experimenten wissen, erfahren dabei alle Körper am gleichen Ort die gleiche Beschleunigung des freien Falles $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ (s. auch Abschn. 1.1.3)¹⁾.

Da nach dem ersten Newtonschen Axiom jede Beschleunigung durch eine Kraft verursacht sein muss, können wir schließen, dass auf jeden Körper von der Erde eine Anziehungskraft ausgeübt wird. Diese Kraft nennen wir „Gravitationskraft“²⁾ oder „Gewichtskraft“ F_G . (Näheres zur „Gravitation“ in Abschn. 1.4). Aus der Tatsache, dass verschieden träge Körper gleich stark beschleunigt werden, folgt weiter der erstaunliche Umstand, dass die beschleunigende Kraft, die Gewichtskraft F_G , proportional zur trägen Masse m ist. Denn nur so kann $a = F_G/m = \text{const} = g$ sein. Wir fassen also zusammen:

Auf jeden Körper übt die Erde eine Anziehungskraft aus. Diese Kraft heißt Gewichtskraft F_G .

Die Gewichtskraft F_G ist proportional zur trägen Masse m .

$$F_G \sim m$$

$$F_G = m g$$

Diese Proportionalität zwischen träger Masse und Gewichtskraft erlaubt ein einfaches Verfahren zum Vergleich träger Massen mit Hilfe der Balkenwaage (Bild 1.33). Aus dem bekannten einfachen Hebelgesetz folgt, dass die Waage bei gleich langen Hebelarmen im Gleichgewicht ist, wenn die beiden Kräfte F_{G1} und F_{G2} gleich groß sind. Das ist dann der Fall, wenn auch $m_1 = m_2$ ist. Wählt man für m_2 geeichte Massenstücke, sog. „Gewichtsstücke“, kann man leicht die träge Masse m_1 des Körpers 1 messen.

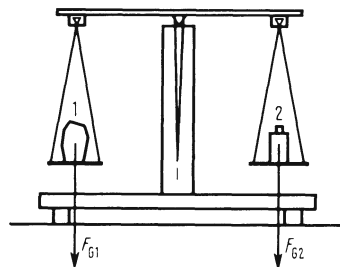


Bild 1.33 Balkenwaage

¹⁾ Von Einflüssen des Luftwiderstandes sei hier abgesehen.

²⁾ Genau genommen ist die Gewichtskraft gleich der Gravitationskraft minus der durch die Erdumdrehung hervorgerufenen Zentripetalkraft (s. Abschn. 1.5.1.1). Das macht jedoch maximal 3,5‰ aus und wird daher hier vernachlässigt.

Dieses Messverfahren ist wohl dafür verantwortlich, dass man oft die Kraft, mit der ein Körper von der Erde angezogen wird, seine Gewichtskraft F_G , anstelle der Masse m als Maß für die Stoffmenge nimmt. Wie wir später sehen werden (Abschn.1.4), ist das nur bedingt sinnvoll, obwohl man in der normalen Praxis oft damit zurecht kommt.

Dichte

Die träge Masse eines Körpers hängt nicht nur von seinem Volumen, sondern auch von der Stoffart ab. Um deren Einfluss allein erfassen zu können, teilt man die Massen verschieden großer Körper aus gleichem Stoff durch ihre Volumina. Dabei ergibt sich jedesmal derselbe Wert, eine für den Stoff charakteristische Konstante. Man nennt sie Dichte.

Definition:

$$\text{Dichte} = \frac{\text{Masse (eines Körpers)}}{\text{Volumen (desselben Körpers)}}$$

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Tafel 1.34 enthält die Dichten verschiedener Stoffe.

Tafel 1.34 Dichten verschiedener Stoffe

Dichte	in 10^3 kg/m^3	Dichte	in 10^3 kg/m^3
Aluminium	2,69	Quecksilber (20 °C)	13,546
Äthylalkohol (20 °C)	0,7893	Silber	10,50
Blei	11,34	Wasser (20 °C)	0,9982
Eisen: Schmiedeeisen	7,8	Wolfram	19,27
Stahl	7,7	Zink	7,14
Gusseisen	7,6	Zinn	7,28
Gold	19,3	Glas	2,6
Kupfer	8,93	NaCl	2,17
Messing	8,3	Holz	0,3...1,1
Platin	21,4	Kautschuk	0,95

1.3.2.2 Kräfte als Vektoren

Aus der Definition der Kraft folgt, dass ein Körper immer in der Richtung beschleunigt wird, in der die Kraft auf ihn wirkt. Wie bei Beschleunigungen, Geschwindigkeiten und Wegen erfordert also die vollständige Beschreibung einer Kraft außer der Angabe ihres Betrages auch die Kennzeichnung der Richtung. Daher gilt:

Kräfte sind Vektoren.

Additionsaxiom: Greifen an einem Körper in demselben Punkt gleichzeitig mehrere Kräfte an, so erhält man durch vektorielle Addition die resultierende Kraft \vec{F}_r (Bild 1.35)¹⁾.

¹⁾ Ein weites Anwendungsfeld für die Addition und Zerlegung von Kräften ist die Statik. Sie wird in diesem Buch nicht behandelt. Siehe z.B. [7].

Beispiel 10. An dem Körper von Bild 1.36a zieht jemand mit $F = 20\text{ N}$ unter 45° schräg nach oben. Gleichzeitig wirkt die Gewichtskraft $F_G = 30\text{ N}$. Wie groß ist die Gesamtkraft \vec{F}_r und welche Richtung hat sie? Mit welcher Kraft F_\perp drückt der Körper nur noch auf die Unterlage? Die Lösung ergibt sich anhand des Bildes 1.36b zeichnerisch oder mit Hilfe des Seitenkosinussatzes und der Winkelfunktionen.

$$F_r = 21,2\text{ N}; \quad \beta = 48,5^\circ; \quad F_\perp = 15,9\text{ N}$$

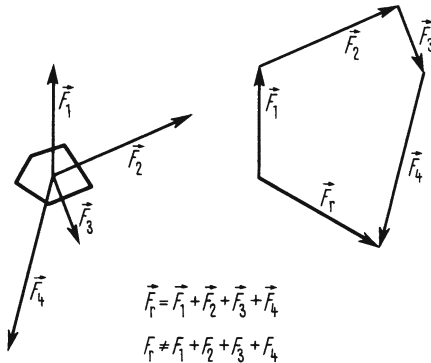


Bild 1.35 Kräfteaddition

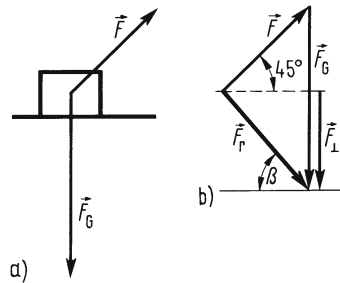


Bild 1.36 Kräfteaddition

1.3.2.3 Massenpunkt und Massenmittelpunkt oder Schwerpunkt

Bisher haben wir stillschweigend so getan, als ob die betrachteten Körper gar keine Ausdehnung hätten. Wir haben dabei ein Modell benutzt, das Modell des Massenpunktes. Das ist eine Abstraktion, die jedoch in sehr vielen Fällen, besonders bei geradlinigen Bewegungen, sehr praktisch ist. Wir denken uns dazu einfach die Gesamtmasse eines Körpers in einem Punkt vereinigt.

Wollen wir genau angeben, an welcher Stelle des Körpers ein solcher Punkt liegt, so benutzen wir dazu den sog.

Massenmittelpunkt oder Schwerpunkt. Er ist derjenige Punkt, in dem man den Körper unterstützen muss, damit er unter Einwirkung der Schwerkraft in jeder Lage im Gleichgewicht ist. Bei symmetrischen Körpern liegt er auf der Symmetrieachse¹⁾.

In den folgenden Abschnitten wollen wir vorläufig, falls nichts anderes vereinbart wird, immer so verfahren, dass wir uns alle Kräfte im Massenmittelpunkt angreifend und den Körper selbst als Massenpunkt denken.

Aufgaben zu Abschn. 1.3.1 und 1.3.2

- Ein Körper der Masse 5 kg wird mit 8 m/s^2 beschleunigt. Welche Kraft wirkt auf ihn?
- Welche Gewichtskraft wirkt auf einen Körper der Masse 50 kg ?
- Ein Auto mit der Masse $0,8\text{ t}$ erreicht aus dem Stand in 15 s 100 km/h . Wie groß ist die mittlere Antriebskraft?
- Bei einem Kran rechnet man für die zusätzliche Belastung beim Beschleunigen der Last mit $2,5\%$ Zuschlag.
Eine wie große Beschleunigung berücksichtigt man dabei?

¹⁾ Zur Berechnung von Schwerpunkten s. [1]

1.3.3 Drittes Newtonsches Axiom

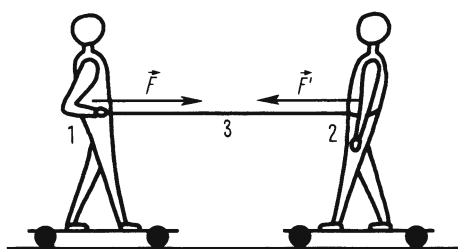


Bild 1.37 Kraft und Gegenkraft

Zur Einführung diene der folgende

□ **Versuch 3** (Bild 1.37). Zwei Männer 1 und 2 mit gleichen Massen stehen auf zwei gleichen Wagen einander gegenüber. Jetzt zieht der erste Mann an einem Seil 3, das dem zweiten um den Leib gebunden ist. Ergebnis: Beide werden gleich stark beschleunigt und treffen sich auf halbem Wege. Auch wenn der zweite Mann allein oder beide gleichzeitig ziehen, treffen sich beide immer in der Mitte. □

Auf jeden Körper muss also eine Kraft wirken, die genauso groß wie die an dem anderen angreifende Kraft, aber ihr entgegengesetzt gerichtet ist.

Die beiden Kräfte, die an zwei verschiedenen Körpern angreifen, nennen wir Kraft \vec{F} und Gegenkraft \vec{F}' oder nach Newton actio und reactio. Wir verallgemeinern das Ergebnis unseres Versuches:

Drittes Newtonsches Axiom (actio = reactio)¹⁾: Jede Kraft \vec{F} besitzt eine Gegenkraft oder Reaktionskraft \vec{F}' . Beide sind gleich groß und einander entgegengesetzt gerichtet. $\vec{F} = -\vec{F}'$.

Die Angriffspunkte von \vec{F} und \vec{F}' liegen in verschiedenen Körpern.

Da sehr oft der letzte Satz nicht beachtet wird, sei auf ihn besonders hingewiesen.

Die nächsten Abschnitte bringen Beispiele für verschiedene Arten von Kräften und Gegenkräften.

1.3.3.1 Elastische Verformung

□ **Versuch 4** (Bild 1.38). An einem Stativ 1 hängt eine Schraubenfeder 2, an die wir eine wachsende Zahl gleicher Gewichtsstücke 3 hängen. Da die Erde an jedem Gewichtsstück mit der gleichen Kraft zieht, wird auf die Feder also eine leicht messbare wachsende Kraft ausgeübt. Die Feder wird länger, sie verformt sich. □

Offenbar verursachen Kräfte demnach nicht nur Beschleunigungen, sondern auch Formänderungen. Wir verallgemeinern daher den Begriff der Kraft:

Kräfte sind Ursachen für Beschleunigungen und Formänderungen.

¹⁾ Wie der oben geschilderte Versuch zeigt, ergibt sich das dritte Newtonsche Axiom im Gegensatz zum ersten und zweiten aus der experimentellen Erfahrung. Trotzdem ist es nicht in jedem Fall nachprüfbar, z.B. bei den Kräften, die die Himmelskörper aufeinander ausüben. Deswegen ist die Bezeichnung „Axiom“ auch hier berechtigt.

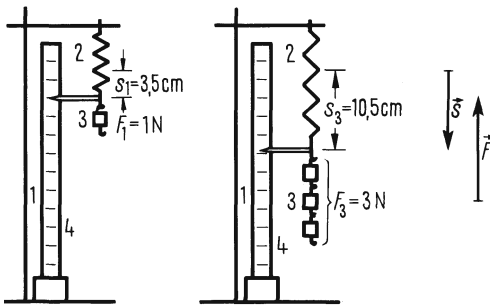


Bild 1.38 Lineares Kraftgesetz

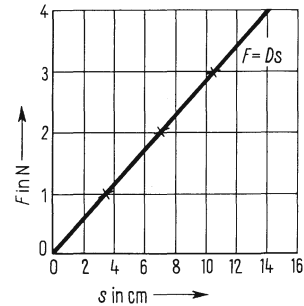


Bild 1.39 Kraft-Weg-Diagramm zum linearen Kraftgesetz

Federkraft und Kraftmesser

□ **Versuch 5** (Bild 1.38). Wir messen jetzt die zu jeder Kraft gehörende Formänderung der Feder. Als Maß dafür dient uns die Längenänderung s , die wir am Maßstab 4 ablesen. Wir stellen fest: Zur doppelten Kraft gehört eine doppelte, zur dreifachen Kraft eine dreifache Längenänderung usw. (Bild 1.39). □

Die Längenänderung ist der wirkenden Kraft F direkt proportional. $F \sim s$. Wegen dieses linearen Zusammenhanges zwischen Kraft und Weg spricht man auch vom linearen Kraftgesetz. Schreibt man diesen Zusammenhang mit einer Proportionalitätskonstanten, der Federkonstanten D , so erhält man

$$F = D s$$

Diese Beziehung heißt auch Hookesches Gesetz¹⁾.

Der Wert der Federkonstanten D hängt von der jeweiligen Feder ab. Da D der Quotient aus der Zugkraft F und der erzielten Längenänderung s ist, $D = F/s$, ist es klar, dass dieser bei einer „harten“ Feder größer ist als bei einer „weichen“. Bei der ersteren braucht man nämlich für die gleiche Längenänderung eine größere Kraft als bei der zweiten. In unserem Beispiel ist $D = 1 \text{ N}/3,5 \text{ cm} = 28,6 \text{ N/m}$.

Federkraft. Der Versuch zeigt noch etwas: Wenn die Gewichtsstücke in Ruhe sind, müssen sie nach dem ersten Newtonschen Axiom kräftefrei sein. Demnach übt die Feder auf die Gewichtsstücke eine nach oben gerichtete Kraft aus, welche die Gewichtskraft kompensiert. Diese Federkraft ist die Reaktionskraft zu der gleich großen, entgegengesetzt gerichteten Kraft, die an der Feder angreift. Die Beträge beider Kräfte sind gleich, ihre Richtungen und Angriffspunkte aber verschieden. Berücksichtigt man die Richtungen der Federkraft \vec{F} und der Längenänderung \vec{s} , so erhalten wir:

Lineares Kraftgesetz

$$\vec{F} = -D \vec{s}$$

Verformungen, die nach Entfernung der sie erzeugenden Kraft wieder vollkommen verschwinden, sind elastische Verformungen. Kein Körper lässt sich jedoch beliebig stark elas-

¹⁾ Robert Hooke (1635 bis 1703)

tisch verformen. Wenn wir z.B. eine Feder immer mehr verlängern, nimmt bei sehr großen Längenänderungen die Länge nicht mehr linear mit der Kraft zu und geht schließlich sogar bei Entfernung der Kraft nicht mehr auf den ursprünglichen Wert zurück. Das Letztere ist der „unelastische Bereich“ der Feder. Sein Beginn hängt vom Material ab. Wir beschränken unsere Betrachtungen auf den linearen elastischen Bereich.

Kraftmesser. Das lineare Kraftgesetz ermöglicht ein Messverfahren für Kräfte, bei dem man ohne Beschleunigungsmessungen auskommt. Man kalibriert dazu einfach eine Feder, indem man jeder Längenänderung s die entsprechende Federkraft F zuordnet. Die so erhaltenen Kraftmesser besitzen meist einen Längenmaßstab, der jedoch nicht Längen, sondern unmittelbar Kräfteinheiten anzeigt (Bild 1.40). Man kann mit diesen Kraftmessern so bequem Kräfte messen wie z.B. mit dem Bandmaß Längen oder mit der Stoppuhr Zeiten.

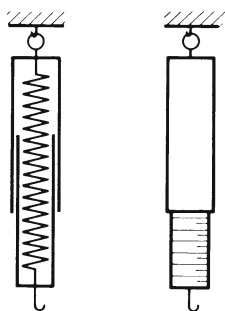


Bild 1.40 Kraftmesser

Misst man mit einem solchen Kraftmesser eine ganz spezielle Kraft, nämlich die Gewichtskraft, mit der die Erde an dem angehängten Körper zieht, so nennt man den Kraftmesser oft Federwaage. Ihre Anzeige hängt davon ab, wo man sich auf der Erde befindet, denn die Gewichtskraft eines Körpers ist im Gegensatz zur trägen Masse ortsabhängig. Das würde besonders deutlich, wenn man mit derselben Federwaage die Gewichtskraft eines Körpers einmal auf der Erde und einmal auf dem Mond messen würde.

Auf Letzterem würde die Federwaage nur rund $1/6$ der Gewichtskraft anzeigen, die wir auf der Erde messen. Denn der Mond zieht an demselben Körper, dessen Stoffmenge unverändert gelassen wurde und der sich bei Beschleunigungen auf dem Mond als genauso träge erweisen würde wie auf der Erde, nur ein Sechstel so stark wie die Erde (s. auch Abschn. 1.4).

Anwendungen. Die Zugkraft in einem Seil, die Andruckkraft von Tonrollen in einem Tonbandgerät und die Druckkraft in Luftdruckmessern usw. werden mit den oben beschriebenen Kraftmessern ermittelt.

Aufgaben zu Abschn. 1.3.3.1

1. Ein Kraftmesser ist so kalibriert, dass einer Verlängerung 5 cm die Federkraft 10 N entspricht.

Welche Federkonstante hat er?

2. Um eine Feder um die Strecke $s_1 = 4$ cm zu verlängern, benötigt man die Kraft $F_1 = 6$ N. Welche Kraft F_2 braucht man für $s_2 = 6$ cm?

3. Wie groß ist die resultierende Federkonstante D , wenn man zwei Federn mit D_1 und D_2 gemäß Bild 1.41a parallel schaltet?

4. Wie groß ist die resultierende Federkonstante D , wenn man zwei Federn mit D_1 und D_2 gemäß Bild 1.41b hintereinanderschaltet?

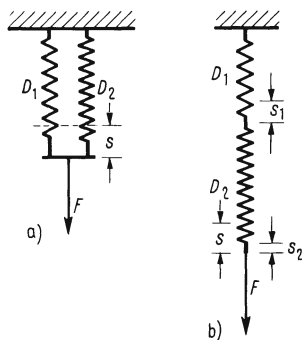


Bild 1.41 Parallel- und Hintereinanderschaltung von Federn

1.3.3.2 Reibung

Zu den wichtigsten Kräften gehören die Reibungskräfte. Wir unterscheiden zwischen der Reibung der Ruhe und der Reibung der Bewegung. Die folgenden Versuche sollen uns mit diesen Begriffen vertraut machen.

Reibung der Ruhe oder Haftreibung

□ **Versuch 6** (Bild 1.42). Wir legen den Holzquader 1, dessen Flächen I und II glattgehobelt und dessen Flächen III und IV mit Sandpapier beklebt sind, auf den Tisch 2. Die Flächen II und IV sind gleich groß und etwa dreimal so groß wie die einander gleichen Flächen I und III. Er liegt zunächst, wie gezeichnet, auf Fläche I. Dann ziehen wir an ihm mit wachsender Kraft \vec{F} , die wir mit dem eingeschalteten Kraftmesser 3 messen.

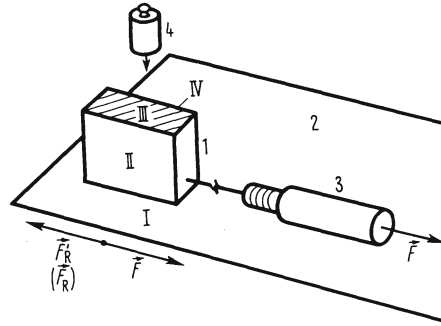


Bild 1.42 Ermittlung von Reibungskräften

Ergebnis: Wir können an dem Quader bis zu einem Maximalwert $F_{\max I}$ alle möglichen Kräfte angreifen lassen, ohne dass er sich bewegt. Wird $F_{\max I}$ überschritten, so setzt er sich ruckartig in Bewegung. Dann legen wir den Körper auf die wie Fläche I beschaffene Fläche II und wiederholen den Versuch. Das Ergebnis ist verblüffend: Wieder können wir bis zu einer größten Kraft $F_{\max II}$ alle möglichen Kräfte wirken lassen, ohne dass sich der Körper bewegt, und diese Kraft $F_{\max II}$ ist praktisch so groß wie vorher $F_{\max I}$! Erstaunlicherweise hängt offenbar die maximal mögliche Zugkraft nicht von der Größe der Auflagefläche ab!

Wir machen das Gleiche mit Fläche I und II noch einmal, setzen dabei aber jedesmal auf den Quader nacheinander je ein Gewichtsstück 4, dessen Gewichtskraft einmal genauso und einmal doppelt so groß ist wie die des Quaders. Dieser wird also einmal mit der doppelten und einmal mit der dreifachen Kraft wie vorhin auf die Unterlage gedrückt.

Ergebnis: $F_{\max I}$ ist wieder gleich $F_{\max II}$. Beide sind aber einmal doppelt und einmal dreimal so groß wie vorher. Offensichtlich ist F_{\max} proportional zu der Kraft, mit welcher der Körper auf die Unterlage drückt. Da diese Kraft senkrecht („normal“) auf der Unterlage steht, nennen wir sie auch Normalkraft F_N . Es gilt also

$$F_{\max} \sim F_N \text{)}.$$

Wiederholen wir die oben geschilderten Versuche mit den mit Sandpapier beklebten Flächen III und IV, auch je einmal ohne und zweimal mit zusätzlicher Belastung, so beobachten wir: Die maximal möglichen Zugkräfte $F_{\max III}$ und $F_{\max IV}$ sind bei gleicher Andruckkraft F_N wieder einander gleich, auch sie wachsen proportional zu F_N , ihre Beträge sind jedoch immer um den gleichen Faktor größer als die unter den gleichen Verhältnissen an den Flächen I und II gemessenen Kräfte $F_{\max I} = F_{\max II}$. Das liegt offenbar an der verschiedenen Beschaffenheit der Oberflächen. □

Bisher haben wir nur von den auf den Körper ausgeübten Zugkräften gesprochen. Da diese den Körper bis zu F_{\max} nicht in Bewegung setzen, muss auf ihn nach dem ersten Newton-

1) Bei einer schräg stehenden Fläche ist immer die senkrecht zu ihr wirksame Kraftkomponente, eben die „Normalkraft“, wichtig.

schen Axiom immer eine gleich große, entgegengesetzte Kraft wirken, die ihn kräftefrei macht. Diese Kraft ist die Haftreibungskraft \vec{F}'_R . Sie ist Reaktionskraft zu der Zugkraft, die über den Körper am Tisch angreift. Wir fassen zusammen:

Die Haftreibungskraft \vec{F}'_R ist der zur Oberfläche parallelen Zugkraft entgegen gerichtet und bis zu einem maximal möglichen Wert $F'_{R\max}$ dieser dem Betrage nach gleich. $F'_{R\max}$ hängt nicht von der Größe der Auflagefläche ab und ist proportional der Normalkraft F_N ¹⁾. Der Proportionalitätsfaktor ist die Haftreibungszahl μ' .

$$F'_{R\max} = \mu' F_N$$

μ' hängt von der Beschaffenheit beider Kontaktflächen ab.

(Tafel 1.43 zeigt einige Werte für μ' .)

Reibung der Bewegung oder Gleitreibung

□ **Versuch 7.** Wir ziehen den Quader des Bildes 1.42 jetzt mit verschiedenen konstanten Geschwindigkeiten über den Tisch und messen die jeweils dazu erforderliche Kraft. Sie hat bei allen Geschwindigkeiten den gleichen Betrag. Da wir den Körper geradlinig und gleichförmig bewegen, muss er nach dem ersten Newtonschen Axiom kräftefrei sein. Die Kraft, welche die Zugkraft kompensiert, ist die Gleitreibungskraft \vec{F}_R .

Allerdings ist jetzt nur eine einzige Zugkraft \vec{F} möglich, bei welcher der Körper weder beschleunigt noch abgebremst wird. Der Betrag der Gleitreibungskraft hängt also nicht von der Zugkraft ab. □

Spielt man die gleichen Versuchsvarianten durch wie bei der Haftreibung, so ergibt sich:

Die Gleitreibungskraft \vec{F}_R ist der zur Oberfläche parallelen Zugkraft entgegengesetzt gerichtet.

Ihr Betrag hängt nicht von der Größe der Auflagefläche und nicht von der Geschwindigkeit ab und ist proportional der Normalkraft F_N . Der Proportionalitätsfaktor ist die Gleitreibungszahl μ .

$$F_R = \mu F_N$$

μ hängt von der Beschaffenheit beider Kontaktflächen ab. Es gilt meist $\mu < \mu'$.

Es sei noch erwähnt, dass man bei den hier behandelten Reibungskräften, die außen an den Körpern wirken, von äußerer Reibung spricht, im Gegensatz zu der sog. inneren Reibung in Flüssigkeiten und Gasen (Abschn. 1.6.2.2). Oft kommen übrigens beide zusammen ins Spiel, z.B. bei der Schmierung. Man hat dann nicht mehr so einfache Verhältnisse, wie sie bisher vorlagen. Die hier ermittelten Gesetzmäßigkeiten haben dann oft nur den Charakter einer mehr oder weniger guten Näherung. Das wollen wir jedoch vorläufig unberücksichtigt lassen.

¹⁾ Warum das so ist, lässt sich mit elementaren Mitteln nicht erklären. Die Theorie der Reibung ist sehr kompliziert und noch nicht vollständig. Wir beschränken uns deshalb auf die experimentellen Ergebnisse. Genaue Messungen ergeben übrigens Abweichungen.

Rollreibung. Eine dritte Variante der Reibung ist die sogenannte Rollreibung. Sie tritt auf, wenn ein starres Rad auf einer deformierbaren Unterlage oder ein verformbares Rad auf einer starren Unterlage abrollt (Autoreifen auf Betonstraße) oder wenn beide, Rad und Unterlage, verformbar sind. Außerdem spielen oft noch Adhäsionskräfte zwischen Rad und Unterlage eine Rolle. Häufig erfasst man alle Einflüsse – wie bei der Gleitreibung – pauschal durch eine Rollreibungszahl μ_R , wobei man, stark vereinfachend, die Rollreibungskraft $F_{RR} = \mu_R F_N$ setzt (z.B. bei Autoreifen¹⁾). Oft allerdings ist es sinnvoll, der Tatsache Rechnung zu tragen, dass ein Rad mit größerem Durchmesser beim Abrollen eine geringere Verformung und damit eine geringere Rollreibungskraft verursacht als ein kleineres Rad. Zu diesem Zweck ersetzt man die Rollreibungszahl μ_R durch den Ausdruck f/r , wobei r der Radius des Rades ist. Man macht also den Ansatz:

Rollreibungskraft

$$F_{RR} = \frac{f}{r} F_N$$

Hierbei ist f die sog. Rollreibungslänge.

Übrigens leuchtet es sofort ein, dass Rollen ohne Gleiten nur möglich ist, wenn $F_{RR} < F'_{Rmax}$ ist, d.h. wenn $\mu_R < \mu'$ bzw. $(f/r) < \mu'$ gilt. Tafel 1.43 zeigt einige Werte für μ' , μ , μ_R und f .

Tafel 1.43 Reibungszahlen und Rollreibungslängen

Haft- und Gleitreibung	Haftreibungszahlen μ'		Gleitreibungszahlen μ	
	trocken	geschmiert	trocken	geschmiert
Stahl auf Stahl	0,15	0,12...0,11	0,09...0,03	0,009
Stahl auf Holz	0,6...0,5	0,1	0,5...0,2	0,08...0,02
Stahl auf Eis	0,027		0,014	
Gummi auf Asphalt	0,9		0,85	0,45 (nass)
Gummi auf Eis			0,15	
Rollreibung	Rollreibungszahlen μ_R			
Auto auf Asphaltstraße	0,025			
Auto auf Pflaster	0,04			
Eisenbahn	0,003			
	Rollreibungslängen f			
Stahl auf Stahl (z.B. Eisenbahn)	$5 \cdot 10^{-4}$ m			
Stahl auf Stahl in Kugellagern	$5 \cdot 10^{-6}$ m... 10^{-5} m			

Anwendungen. Ohne Haftreibung wäre weder Gehen noch Fahren möglich. Das merkt man deutlich bei zu kleiner Haftreibung, bei Glatteis. – Die Gleitreibung ist oft störend, z.B. in Lagern, und muss durch Schmierung vermindert werden. – In Bremsen nutzt man die Abhängigkeit der Gleitreibungskraft von der Normalkraft (der Kraft auf die Bremsfläche) aus. Die Funktionsweise mancher Förderer beruht auf dem Unterschied zwischen Gleit- und Haftreibungskraft.

Bei modernen Autos mit ihren geringen Strömungswiderständen (s. Abschn. 1.6.3.3) spielt die Rollreibungskraft der Reifen eine wesentliche Rolle. Zum Beispiel werden im Normalbetrieb etwa 25% des Kraftstoffverbrauchs durch die Rollreibungskraft verursacht.

¹⁾ Zur Rollreibung s.a. Abschn. 1.6.3.3.

Aufgaben zu Abschn. 1.3.3.2

1. Um auf horizontaler Unterlage einen Körper mit der Gewichtskraft $F_G = 30 \text{ N}$ mit konstanter Geschwindigkeit zu bewegen, benötigt man die Zugkraft $F = 2,4 \text{ N}$. Wie groß ist die Gleitreibungszahl?
2. Ein Mann zieht an einer um 30° gegen die Waagerechte geneigten Stange einen Metallklotz mit der Masse $m = 60 \text{ kg}$ auf trockenem Holz. Welche Kraft braucht er höchstens für konstante Geschwindigkeit? (Wir denken uns alle Kräfte im Schwerpunkt angreifend.)
3. Ein Körper bleibt auf einer 43° geneigten schiefen Ebene gerade noch liegen. Wie groß ist die Haftreibungszahl μ' ?
4. Mit einer verschieden neigbaren schiefen Ebene kann man Gleitreibungszahlen bestimmen. Wie geht man vor?
5. Wie stark dürfen Wagen mit Holzboden maximal beschleunigt werden, damit darauf stehende Maschinen aus Stahl sicher nicht rutschen?

6. Ein Rennwagen kann im ersten Moment des Anfahrens unter Umständen nicht stärker beschleunigen als ein Kleinwagen, wenn beide gleichartige Reifen haben. Wie kommt das und wie groß ist die maximale Beschleunigung bei gegebener Haftreibungszahl μ' ?
Wie unterscheiden sich Autos mit Vierrad- von solchen mit Zweiradantrieb?
Was ist zu einem Anfahren mit durchdrehenden Rädern zu sagen?
7. Wie muss man ein Auto mit Vorderradantrieb belasten, um an einer vereisten Steigung besser anfahren zu können?
8. In Tafel 1.43 sind für die Eisenbahn sowohl eine Rollreibungszahl μ_R als auch die Rollreibungslänge f angegeben.
 - a) Für welchen Radradius gilt der angegebene Wert für μ_R ?
 - b) Welchen Wert hat μ_R für ein Rad mit 1 m Durchmesser?

1.3.3.3 Trägheitskräfte

Eine weitere sehr wichtige Gruppe unter den Kräften sind die Trägheitskräfte. Zu ihrer Verdeutlichung diene

□ **Versuch 8** (Bild 1.44). Eine Kugel hängt an einem dünnen Faden. Der Faden ist so bemessen, dass er die Kugel noch bequem tragen, also die Gewichtskraft $\vec{F}_G = -\vec{F}_1$ übertragen kann, ohne zu reißen. Jetzt wird mit der Hand über den Griff die Kugel stark nach oben beschleunigt.

Ergebnis: Der Faden reißt. □

Da man erfahrungsgemäß einen Faden nicht zerreißen kann, ohne an beiden Enden zu ziehen, muss auch an seinem unteren Ende eine nach unten gerichtete Kraft aufgetreten sein, die sich zur Gewichtskraft addierte. Diese Kraft nennen wir die Trägheitskraft \vec{F}_{Tr} . Sie ist die Reaktionskraft zu der beschleunigenden Kraft \vec{F}_a , die zusätzlich zu \vec{F}_1 wirkt.

Die Trägheitskraft hat den gleichen Betrag wie die beschleunigende Kraft $\vec{F}_a = m \vec{a}$ und ist dieser entgegengesetzt gerichtet. $\vec{F}_{\text{Tr}} = -m \vec{a}$.

Die beschleunigende Kraft \vec{F}_a greift an der Kugel an, die Trägheitskraft \vec{F}_{Tr} am Faden; ihre Angriffspunkte sind also verschieden¹⁾.

¹⁾ Häufig spricht man von Trägheitskräften nur bei der Benutzung beschleunigter Bezugssysteme (s. den nächsten Abschn. 1.3.3.4).

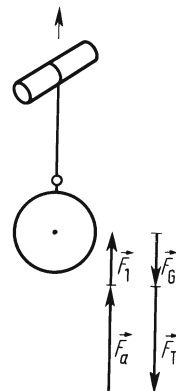


Bild 1.44 Wirkung der Trägheitskraft

1.3.3.4 Trägheitskräfte in beschleunigten Bezugssystemen. D'Alembertsches¹⁾ Prinzip

In Abschn. 1.3.3.3 beschrieben wir Versuch 8 (Bild 1.44) vom Standpunkt eines Beobachters aus, der sich neben dem Experimentator in Ruhe befand. Es ist jedoch auch eine andere Deutung möglich.

Wir denken uns einen Beobachter, der sich mit der Hand des Experimentators mitbewegt. Dieser Beobachter wird genauso stark beschleunigt wie die Kugel, an der die Hand über den Faden zieht. Der Beobachter befindet sich demnach in einem beschleunigten Bezugssystem. Bezieht er auf dieses die Bewegung der Kugel, so stellt er fest, dass sie in Ruhe ist, da sie ja genauso beschleunigt wird wie das Bezugssystem selbst. Der mitbeschleunigte Beobachter muss demnach schließen, dass sie kräftefrei ist. Andererseits weiß er, dass mit Hilfe des Fadens an der Kugel gezogen wird. Denn wäre das nicht der Fall, so bliebe sie ja gegen ihn zurück. Also schließt der mitbeschleunigte Beobachter, dass außer der Gewichtskraft noch eine andere Kraft an der Kugel angreift, die dem Betrage nach gleich der beschleunigenden Kraft $\vec{F}_a = m\vec{a}$, ihr aber entgegengesetzt ist. Auch diese Kraft nennt man „Trägheitskraft“. Im Gegensatz zur Deutung in Abschn. 1.3.3.3 greift jetzt die Trägheitskraft aber am beschleunigten Körper an, damit dieser kräftefrei ist.

Dieses Verfahren lässt sich bei jedem beschleunigten Körper anwenden. Man nennt es

D'Alembertsches Prinzip: In Bezug auf ein mit einem beschleunigten Körper mitbewegtes Bezugssystem befindet sich dieser in Ruhe. Die vektorielle Summe aller am Körper angreifenden Kräfte einschließlich der an ihm angreifenden Trägheitskraft $-m\vec{a}$ ist stets gleich Null.

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i + \vec{F}_{Tr} = 0; \quad \sum_{i=1}^N \vec{F}_i - m\vec{a} = 0$$

Der Vorteil des D'Alembertschen Prinzips liegt darin, dass man mit ihm die Erfassung der Kräfte, die an einem beschleunigten Körper angreifen, auf eine statische Gleichgewichtsbedingung zurückführen kann. Dadurch erleichtert es oft die Behandlung komplizierter Probleme.

Anwendungen. Alle Vorgänge, bei denen beim schnellen Abbremsen eines Körpers eine große Kraft auftreten soll, z.B. beim Hämmern, Pressen und dgl., nutzen die Trägheitskraft aus.

1.3.3.5 Scheinkräfte

Es gibt Fälle, in denen es einem Beobachter so scheint, als ob eine Kraft wirkte. Als Beispiel denken wir uns den nach rückwärts schauenden Beifahrer in einem Lastkraftwagen, der einen auf der Ladefläche befindlichen Körper beobachtet. Der Einfachheit halber soll sich Letzterer reibungsfrei auf der Ladefläche bewegen können. Wenn sich der LKW beschleunigt in Bewegung setzt, bleibt der Körper, vom außen ruhenden Beobachter aus gesehen, natürlich in Ruhe. Der beschleunigte Beobachter sieht jedoch, dass der Körper in Bezug auf ihn nach hinten beschleunigt wird. Daraus kann er, bei hinreichender physikalischer Phantasie, den Schluss ziehen, dass auf den Körper eine nach hinten gerichtete Kraft wirkt. Diese existiert natürlich nur für den beschleunigten Beobachter. Außerdem ist nir-

¹⁾ J. D'Alembert (1717 bis 1783).

gends die Wirkung einer Gegenkraft zu dieser Kraft zu entdecken, sodass das 2. Newtonsche Axiom nicht gilt. Eine solche Kraft nennt man Scheinkraft. Da natürlich der Körper die Beschleunigung des Bezugssystems aufgrund seiner Trägheit nicht mitmacht, nennt man auch eine solche Scheinkraft gelegentlich Trägheitskraft.

– Übrigens könnte der beschleunigte Beobachter auch vermuten, dass der Körper von einer geheimnisvollen Anziehungskraft am hinteren Wagenende angezogen würde. Überlegungen solcher Art sind der Einstieg in die Einsteinsche Theorie der Gravitation. Dies soll jedoch hier nicht näher ausgeführt werden. –

Eines sei noch festgestellt: Läge der Körper bei Beginn der Beschleunigung bereits an der hinteren Wand der Ladefläche, so würde er natürlich mitbeschleunigt, und wir hätten wieder den Sachverhalt, wie er in Abschn. 1.3.3.3 und 1.3.3.4 beschrieben ist. Die Trägheitskraft ist dann eine ganz handfeste Kraft, die z.B. die hintere Wand sogar beschädigen könnte.

Ein weiteres Beispiel für eine Scheinkraft ist die in Abschn. 1.5.3.1 beschriebene Coriolis-Kraft.

1.3.3.6 Antriebskräfte und Widerstandskräfte

Will man Bewegungen beschreiben, die unter der Einwirkung verschiedener Kräfte ablaufen, so empfiehlt es sich, alle wirkenden Kräfte in zwei Summen aufzuteilen, die auf Grund des d'Alembertschen Prinzips jeweils einander entgegengesetzt gleich sein müssen. Das sind die Summe der Antriebskräfte \vec{F}_{Ai} und die Summe aus Widerstandskräften \vec{F}_{Wi} und Trägheitskräften \vec{F}_{Tri} . Dabei gilt:

Summe aller Antriebskräfte = – [Summe aller Widerstandskräfte und aller Trägheitskräfte]

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_{Ai} = - \left[\sum_{i=1}^N \vec{F}_{Wi} + \sum_{i=1}^N \vec{F}_{Tri} \right] \quad \text{und für die Beträge} \quad \sum_{i=1}^N F_{Ai} = \sum_{i=1}^K F_{Wi} + \sum_{i=1}^L F_{Tri}$$

Man kann beide Kräftegruppen leicht an ihrer Richtung in Bezug auf eine auftretende Beschleunigung \vec{a} unterscheiden. Die \vec{F}_{Ai} sind der Beschleunigung gleich, die \vec{F}_{Wi} und \vec{F}_{Tri} entgegengerichtet. Ist $\vec{a} = 0$, so spielt es keine Rolle, welche Kräftegruppe als Antriebskräfte bezeichnet wird. Zu den Widerstandskräften gehören oft die Reibungskräfte, obwohl die Letzteren z.B. bei Bremsvorgängen auch die Rolle der Antriebskräfte übernehmen können. (Sie haben dann die gleiche Richtung wie \vec{a} !) Kommt a negativ heraus, so hat man für \vec{a} die falsche Richtung angenommen. Man muss dann einen neuen Ansatz mit der richtigen Richtung für \vec{a} machen.

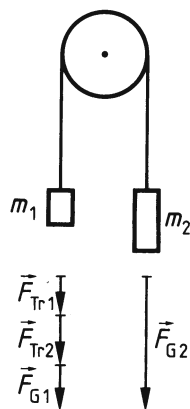


Bild 1.45 Zum Beispiel 11

Beispiel 11 (Bild 1.45). Zwei Körper mit den Massen m_1 und m_2 hängen an einer reibungsfreien festen Rolle. Wie stark werden sie beschleunigt?

$$\sum F_{Ai} = F_{G2}; \quad \sum F_{Tri} + \sum F_{Wi} = F_{Tri} + F_{Tr2} + F_{G1}$$

$$F_{G2} = F_{Tr1} + F_{Tr2} + F_{G1}; \quad m_2 g = m_1 a + m_2 a + m_1 g$$

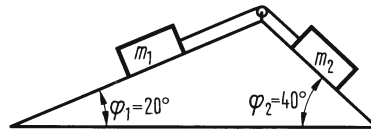
$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g$$

Aufgaben zu Abschn. 1.3.3

1. Ein Dampfhammer mit der Masse 250 kg fällt aus 30 cm Höhe auf das obere Ende eines Pfahles und treibt ihn dann 3 cm in den Erdboden. Welche Kraft übt er auf ihn aus, wenn man eine gleichmäßige Verzögerung annimmt?
2. Ein Prellbock bremsen einen mit der Geschwindigkeit 1 m/s fahrenden Eisenbahnwagen der Masse 18 t auf dem Weg 12 cm ab. Welche mittlere Kraft muss er aufnehmen (willkürliche Annahme: $a = \text{const}$)?
3. Eine Aufzugkabine hat die Masse 10^3 kg. Welche Kraft wirkt im Tragseil, wenn sich die Kabine
 - a) mit der Beschleunigung $1,5 \text{ m/s}^2$ abwärts,
 - b) mit $1,5 \text{ m/s}^2$ aufwärts bewegt?
4. Am Ende eines Förderbandes sollen die geförderten Gegenstände auf einer um 15° nach

unten geneigten Rutsche nach 2 m zur Ruhe kommen. Wie groß muss die Geschwindigkeit des Förderbandes sein, wenn auf der Rutsche die Reibungszahl $\mu = 0,3$ ist?

5. In der in Bild 1.46 gezeigten Anordnung bewegen sich die beiden gleichen Körper ($m_1 = m_2 = 30 \text{ kg}$) a) ohne Reibung und b) mit $\mu = 0,1$. Wie groß sind jeweils die Beschleunigung und die Fadenspannung? (Die Rolle bleibt unberücksichtigt.)

**Bild 1.46** Zur Aufgabe 5**1.3.4 Übergeordnete Begriffe**

Unter dieser Überschrift lernen wir neue physikalische Größen kennen, die zur Erfassung mechanischer Vorgänge, im Grunde genommen, nicht nötig sind, deren Einführung sich jedoch als sehr zweckmäßig erwiesen hat. Es handelt sich um die Größen Arbeit, Energie, Leistung und Impuls. Dabei wird sich herausstellen, dass die beiden Größen Energie und Impuls sogar von ganz zentraler Bedeutung für die gesamte Physik sind (s. Abschn. 1.3.4.2 und 1.3.4.4).

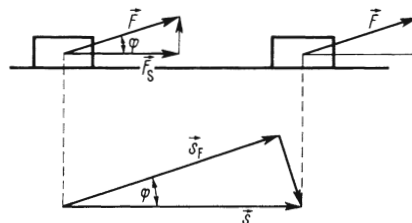
1.3.4.1 Arbeit

Der Begriff der Arbeit besitzt in der Umgangssprache eine vielfältige Bedeutung. Um in der Physik mit ihm operieren zu können, bedarf er einer eindeutigen Festlegung.

Definition: Wird ein Körper unter Einwirkung einer Kraft \vec{F} eine bestimmte Wegstrecke \vec{s} weit bewegt, so wird von der Kraft die Arbeit W verrichtet. Diese ist das Produkt der Beträge des zurückgelegten Weges und der Komponente der Kraft in Richtung des Weges. Gleichwertig ist die folgende

Definition: Die Arbeit W ist gleich dem Produkt der Beträge der wirkenden Kraft \vec{F} und der Komponente des Weges \vec{s} in Richtung der Kraft.

Bild 1.47 möge das verdeutlichen. \vec{F}_s ist die Komponente der Kraft \vec{F} in Richtung des Weges \vec{s} , s_F die Wegkomponente in Richtung der Kraft \vec{F} . Gemäß den obigen Definitionen ergibt sich $W = s F_s = s F \cos \varphi$ und $W = F s_F = F s \cos \varphi$, in beiden Fällen also das Gleiche.

**Bild 1.47** Zur Definition der Arbeit

Zusammenfassung: Schließen die Richtungen der wirkenden Kraft \vec{F} und des zurückgelegten Weges \vec{s} den Winkel φ miteinander ein, so gilt

$$W = F s \cos \varphi$$

Aus der Definition der Arbeit folgt, dass sie eine skalare Größe ist. Man nennt daher das Produkt $F s \cos \varphi$ auch das skalare Produkt der beiden Vektoren \vec{F} und \vec{s} und schreibt dann einfach

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} \text{)}$$

Die Arbeit ist das skalare Produkt aus Kraft und Weg.

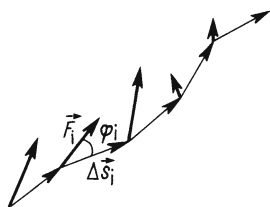


Bild 1.48 Arbeit längs eines beliebigen Weges

Ist die Kraft nicht während des ganzen Weges konstant und/oder ändern sich die Richtungen des Weges und der Kraft gegeneinander, so ist die Arbeit W gleich der Summe aus vielen kleinen Arbeitsbeträgen $\Delta W_i = F_i \Delta s_i \cos \varphi_i$, die man erhält, wenn man längs des Weges Δs_i die Kraft F_i und den Winkel φ_i als konstant annimmt (Bild 1.48).

$$W = \sum_i F_i \Delta s_i \cos \varphi_i$$

Ändert sich die Kraft mit dem Weg kontinuierlich, so wird

$$W = \lim_{\Delta s_i \rightarrow 0} \sum_i F_i \Delta s_i \cos \varphi_i = \int_{\vec{s}_1}^{\vec{s}_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} \text{)}^2$$

Einheit der Arbeit

Sie ergibt sich aus der Definition. Im Internationalen Einheitensystem:

$$1 \text{ Newton} \cdot 1 \text{ Meter} = 1 \text{ Joule } ^3)$$

$$1 \text{ Nm} = 1 \text{ J}$$

Im Folgenden betrachten wir wichtige Beispiele.

Hubarbeit

Wird ein Körper gleichförmig senkrecht nach oben gehoben, so wirkt längs des ganzen Hubweges \vec{h} eine Kraft \vec{F} , die \vec{h} gleichgerichtet und dem Betrag nach gleich der Gewichtskraft $F_G = m g$ ist. Damit ergibt sich für die

Hubarbeit

$$W_H = F_G h = m g h$$

¹⁾ S. z.B. [1]

²⁾ Das Integral ist ein sog. „Linienintegral“, das längs des vorgegebenen Weges zu bilden ist.

³⁾ J. P. Joule (1818 bis 1889).

Selbst wenn der Körper längs des schrägen Weges \vec{s} (Bild 1.49) reibungsfrei bis in die Höhe h gehoben wird (schiefe Ebene), ist die Wegkomponente in Richtung der Kraft wieder h , und es ergibt sich ebenfalls $W_H = m g h$. Das gilt natürlich auch für krummlinige Wege, da man sich diese aus lauter kleinen geraden Wegstücken $\Delta\vec{s}_i$ zusammengesetzt denken kann (Bild 1.50).

Die Summe der senkrechten Wegkomponenten Δh_i ergibt wieder \vec{h} . Also ist auch hier $W_H = \sum F_G \Delta h_i = F_G \sum \Delta h_i = F_G h$. Offenbar hängt der Betrag der Hubarbeit nur von der Hubhöhe h und der Gewichtskraft F_G ab, ist im Übrigen jedoch vom Wege unabhängig¹⁾.

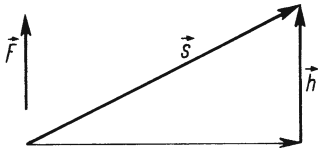


Bild 1.49 Hubarbeit längs eines schrägen Weges

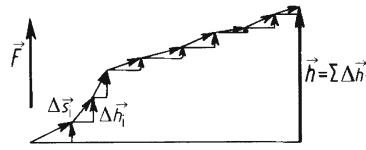


Bild 1.50 Hubarbeit längs eines beliebigen Weges

Interessant ist noch, dass definitionsgemäß keine Arbeit verrichtet wird, wenn ein Körper sich reibungsfrei gleichförmig so bewegt, dass die Gewichtskraft immer senkrecht auf dem Weg steht. Das ist z.B. bei den Erdsatelliten der Fall.

Reibungsarbeit

Wird ein Körper gegen eine Reibungskraft \vec{F}_R gleichförmig bewegt, so ist dazu eine Zugkraft $\vec{F} = -\vec{F}_R$ nötig. Da \vec{F}_R immer der Richtung des Weges \vec{s} entgegengesetzt liegt, hat \vec{F} die Richtung von \vec{s} . Es ergibt sich also für die

Reibungsarbeit

$$W_R = F_R s = \mu F_N s$$

F_R kann dabei eine Gleitreibungs- oder eine Rollreibungskraft sein.

Beschleunigungsarbeit

Ein Körper wird aus der Ruhe heraus längs eines Weges \vec{s} durch eine konstante Kraft \vec{F} gleichmäßig beschleunigt. Dann sind $\vec{F} = m \vec{a}$ und \vec{s} gleichgerichtet, und es ergibt sich für die

Beschleunigungsarbeit

$$W_B = F s = m a s$$

oder mit $a = v^2/2s$ durch Einsetzen von a $W_B = m \frac{v^2}{2s} s$, und schließlich

$$W_B = \frac{1}{2} m v^2$$

¹⁾ Die Abnahme der Gewichtskraft F_G mit der Höhe wurde hier vernachlässigt (s. Abschn. 1.4).

Diese Formel gilt auch bei veränderlicher wegabhängiger Kraft F . Man erhält nämlich

$$W = \int_{s_1}^{s_2} F \, ds = \int_{s_1}^{s_2} m a \, ds = m \int_{s_1}^{s_2} a \, ds$$

Mit $a = dv/dt$ und $ds = v \, dt$ ergibt das

$$W = m \int_{s=s_1}^{s_2} \frac{dv}{dt} v \, dt = m \int_{v_1}^{v_2} v \, dv = m \left[\frac{v^2}{2} \right]_{v_1}^{v_2} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

und mit $v_1 = 0$ und $v_2 = v$

$$W = \frac{1}{2} m v^2$$

Die Beschleunigungsarbeit, die zur Erzielung einer bestimmten Geschwindigkeit nötig ist, hängt also nur von der Endgeschwindigkeit und der Masse des Körpers, nicht jedoch von der beschleunigenden Kraft ab. Das wird verständlich, wenn man sich klar macht, dass eine kleine Kraft längs eines langen, eine große Kraft nur längs eines kurzen Weges wirken muss, um die gleiche Geschwindigkeit zu erreichen.

Elastische Verformungsarbeit

Will man z.B. die Feder eines Kraftmessers verlängern, so muss der dabei überstrichene Weg unter der Wirkung einer zunehmenden Kraft zurückgelegt werden. Diese ist also nicht konstant, sondern hängt vom Weg ab. Wir betrachten hier nur Verformungen, bei denen das lineare Kraftgesetz $\vec{F} = -D\vec{s}$ gilt (s. Abschn. 1.3.3.1 und Bild 1.51). Zur Berechnung der jetzt verrichteten Arbeit denkt man sich den Gesamtweg s in viele kleine Wegstücke Δs_i zerlegt, längs derer die Kraft F_i als konstant angenommen wird. Die Beträge der Kraft F_i sollen jedoch, wie aus Bild 1.51 ersichtlich, mit s wachsen. Die Arbeit ΔW_i längs Δs_i ist gleich $F_i \Delta s_i$, entspricht also dem Flächeninhalt des zugehörigen Rechtecks. Die Summe aller Rechteckflächen entspricht der Gesamtarbeit.

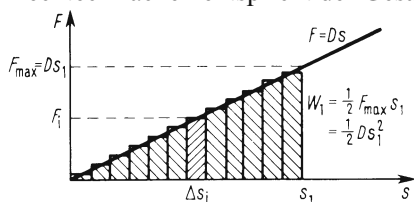


Bild 1.51 Elastische Verformungsarbeit. Arbeitsdiagramm

Man sieht leicht ein, dass sich bei $\Delta s_i \rightarrow 0$ die Treppenlinie in Bild 1.51 immer mehr der Kraft-Weg-Kurve nähert. Damit entspricht der unter ihr liegende Flächeninhalt der Gesamtarbeit. Das Kraft-Weg-Diagramm (Bild 1.51) nennt man in der Technik daher oft auch „Arbeitsdiagramm“. Man liest aus ihm ab:

Elastische Verformungsarbeit

$$W_E = \frac{1}{2} F_{\max} s = \frac{1}{2} D s s = \frac{1}{2} D s^2$$

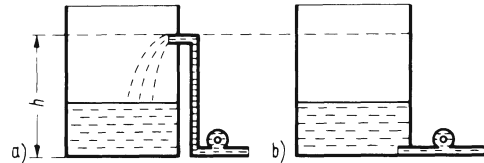
Mathematisch erhält man dieses Ergebnis aus $W = \int_0^s \vec{F} \cdot d\vec{s}$. Da F immer parallel zu s ist, kann man wieder das Linienintegral als gewöhnliches Integral schreiben.

$$W = \int_0^s F \, ds = \int_0^s D s \, ds = \frac{1}{2} D s^2$$

Aufgaben zu Abschn. 1.3.4.1

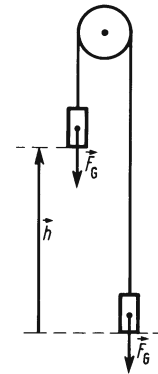
1. Welche Kraft und welche Arbeit sind mindestens nötig, um einen Rammbar mit der Masse 250 kg in 2 s gleichmäßig beschleunigt auf 2 m Höhe zu heben?
2. Welche Arbeit verrichtet eine Lokomotive mit der Masse 100 t, die aus dem Stand auf der Strecke 4 km auf die Geschwindigkeit 20 m/s beschleunigt, wenn die konstante Reibungskraft 10^4 N wirkt?
3. Eine Feder ist durch die Kraft $F_1 = 1,5$ N vorgespannt. Wie groß ist die Endkraft, wenn für weiteres Spannen um 10 cm die Arbeit 0,25 J erforderlich ist (mit F - s -Diagramm)?

4. Ein Tank mit 2 m² Grundfläche soll 1,5 m hoch mit Wasser gefüllt werden (Bild 1.52). Was ist günstiger, a) wenn die Pumpe das Wasser von oben einströmen lässt oder b) durch eine Öffnung am Boden hineindrückt? Welche Arbeiten werden in beiden Fällen geleistet?

**Bild 1.52** Zur Aufgabe 4**1.3.4.2 Energie**

Ein Körper, der sich in der Höhe h über einem bestimmten Ausgangsniveau befindet, vermag einen zweiten gleich schweren Körper über eine reibungsfreie Rolle in die gleiche Höhe zu heben, also Hubarbeit zu verrichten (Bild 1.53). In dem oben befindlichen Körper steckt demnach ein Vorrat an Arbeit, die er an den zweiten Körper abgeben kann, und zwar genau so viel, wie vorher aufgebracht werden musste, um ihn selbst um die Höhe h zu heben. Arbeit kann man also offenbar speichern.

Die solcherart gespeicherte Arbeit, den Arbeitsvorrat, nennt man Energie¹⁾.

**Bild 1.53** Hubarbeit aus Lageenergie

An dieser Stelle wollen wir bereits darauf hinweisen, dass der Energiebegriff mehr umfasst, als es hier bisher dargestellt wurde. Man beachte deshalb unbedingt den Schluss dieses Abschnittes und Abschn. 2.4.2. Ganz allgemein kann man jedoch hier schon folgende Feststellung treffen:

Energie kann von einem System von makroskopischen Körpern auf ein anderes System von makroskopischen Körpern grundsätzlich auf zwei Arten übertragen werden, entweder durch Verrichten von Arbeit oder Wärmeaustausch.

Wir wollen uns in der Mechanik ausschließlich auf die erste Art beschränken.

Man unterscheidet je nach Art der Arbeitsspeicherung verschiedene mechanische Energieformen. Diese werden jetzt vorgestellt.

¹⁾ Arbeit und Energie haben also die gleiche Dimension.

Potentielle Energie

Energie der Lage. Der Körper, von dem oben die Rede war, besitzt einen Arbeitsvorrat nur auf Grund der Tatsache, dass er sich in einer bestimmten Höhe über einem Niveau befindet, auf das er unter Arbeitsabgabe hinabsinken kann. Beim Speichern der Arbeit wurde keine Eigenschaft des Körpers (Form, Farbe oder dgl.) geändert. Es genügt, ihn in die höhere Lage zu bringen. Man nennt daher den auf diese Weise gespeicherten Arbeitsvorrat Energie der Lage oder

Lageenergie

$$W_L = F_G h = m g h$$

Da h auf ein willkürlich wählbares Niveau bezogen wurde, ist klar, dass zur Angabe der Lageenergie die Festlegung des Bezugsortes nötig ist.

Die Lageenergie kann auf verschiedene Weise wieder in Arbeit verwandelt werden. Zum Beispiel kann, wie schon besprochen, ein zweiter Körper gehoben, also Hubarbeit verrichtet werden. Lässt man den Körper frei fallen, so verrichtet er längs seines Fallweges Beschleunigungsarbeit. Hängt man den Körper an eine Feder und lässt ihn absinken, so spannt er die Feder und verrichtet Verformungsarbeit. Und schließlich kann man den Körper zwischen zwei Bremsbahnen gleichförmig sinken lassen. Dann verrichtet er Reibungsarbeit.

Spannungsenergie. Spannt man z.B. eine senkrecht hängende Feder, so vermag diese einen unten angehängten Körper gegen die Gewichtskraft F_G in die Höhe \vec{s} zu heben und zu beschleunigen (Bild 1.54). Sie kann also Hubarbeit und Beschleunigungsarbeit verrichten. Diesen in der gespannten Feder steckenden Arbeitsvorrat nennt man

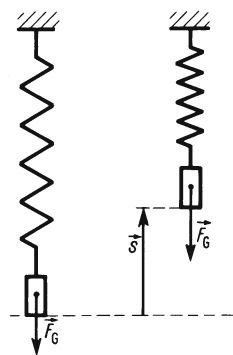


Bild 1.54 Hubarbeit aus Spannungsenergie

Spannungsenergie

$$W_s = \frac{1}{2} D s^2$$

Dass die Spannungsenergie einer Feder auch in Form von Beschleunigungs- und Reibungsarbeit wieder abgegeben werden kann, weiß jeder, der sich einmal mit einem Spielzeugauto mit Federmotor beschäftigt hat.

Man kann die Lageenergie und die Spannungsenergie, die beide in einem in Ruhe befindlichen System stecken können, unter einem einheitlichen Begriff zusammenfassen:

Sowohl Lageenergie $W_L = m g h$ als auch Spannungsenergie $W_s = (1/2) D s^2$ bezeichnet man als potentielle Energie W_{pot} .

Kinetische Energie

Gibt man einem Körper mit der Masse m eine nach oben gerichtete Anfangsgeschwindigkeit v , so kann er sich selbst in eine bestimmte Höhe heben, er kann also Hubarbeit verrichten. In diesem Falle steckt der durch die Beschleunigungsarbeit geschaffene Arbeitsvorrat offenbar in der Bewegung des Körpers. Man nennt diesen Arbeitsvorrat daher Energie der Bewegung

Bewegungsenergie oder kinetische Energie

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2$$

Bezugsniveau. Aus den oben beschriebenen Beispielen folgt, dass der Betrag der Lageenergie davon abhängt, auf welche Ausgangs- oder Endhöhe sie bezogen wird. Auch die Spannenergie in einer Feder hängt davon ab, um welchen Betrag sie sich entspannen kann. Und schließlich ist auch die Angabe des Betrages einer Geschwindigkeit und damit der Bewegungsenergie eines Körpers nur in Bezug auf einen bestimmten Bezugsort eindeutig. Es gilt daher allgemein:

Die Angabe eines Energiebetrages ist nur sinnvoll bei gleichzeitiger Angabe des Bezugsniveaus.

Energiesatz der Mechanik

In dem obengenannten Fall hat der steigende Körper zu Beginn eine bestimmte Bewegungsenergie, die sich während des Steigens in Hubarbeit umwandelt, bis er im höchsten Punkt seiner Bahn in Ruhe ist, also keine Bewegungsenergie mehr besitzt. Dafür befindet er sich jetzt aber auf einer gegenüber dem Ausgangsniveau erhöhten Lage. In ihm steckt also Lageenergie. Hält man den Körper jetzt nicht fest, so wird diese für die Beschleunigungsarbeit beim Fall nach unten verbraucht, und der Körper gewinnt wieder Bewegungsenergie.

Wie wir aus der Kinematik (Abschn. 1.1.4.1) wissen, kommt ein mit der Geschwindigkeit v_0 senkrecht nach oben geworfener Körper mit der dem Betrage nach gleichen Geschwindigkeit v_0 in der Ausgangshöhe wieder an. Er hat also am Anfang und Ende seines Fluges die gleiche Bewegungsenergie $W_{\text{kin}0} = (1/2) m v_0^2$. Die Vermutung liegt nahe, dass dann auch seine maximale Lageenergie $W_{\text{Lmax}} = m g h_{\text{max}}$ gleich der anfangs hineingesteckten Bewegungsenergie $W_{\text{kin}0} = (1/2) m v_0^2$ sein müsste. Das lässt sich anhand der Ergebnisse von Abschn. 1.1.4.1 leicht bestätigen. Dort erhält man aufgrund kinematischer Überlegungen für die maximale Steighöhe $h_{\text{max}} = v_0^2/2g$. Dann wird $W_{\text{Lmax}} = m g h_{\text{max}} = m g v_0^2/2g = (1/2) m v_0^2$. Damit ist unsere Vermutung bestätigt.

Man kann sogar leicht zeigen, dass bei einem senkrecht nach oben geworfenen Körper in jedem Punkt seiner Bahn die Summe aus der noch vorhandenen Bewegungsenergie $W_{\text{kin}} = (1/2) m v^2$ und der schon gewonnenen Lageenergie $W_{\text{L}} = m g h$ gleich der anfangs hineingesteckten Bewegungsenergie $W_{\text{kin}0} = (1/2) m v_0^2$ ist. Zur Verdeutlichung rechne man die folgende Aufgabe: Man berechne für einen mit $v_0 = 10$ m/s senkrecht nach oben geworfenen Körper die Momentangeschwindigkeiten in verschiedenen Höhen (s. Abschn. 1.1.4.1) und bilde $(1/2) m v^2 + m g h$.

In dem bisher behandelten Beispiel bleibt offensichtlich $W_{\text{kin}} + W_L$ unverändert gleich der anfangs hineingesteckten Energie. Man kann zeigen, dass hier ein Sachverhalt vorliegt, der ganz allgemein gültig ist, auch unter Einschluss der zweiten Art der potentiellen Energie, der Spannungsenergie.

Ein Körper der Masse m wird an eine nicht gespannte Feder gehängt und sinkt um die Höhe s tiefer (Bild 1.55), verliert also die Lageenergie mgs . Dabei spannt er die Feder und wird beschleunigt. Aus den Newtonschen Axiomen folgt für die Kräfte $F_G = F_{\text{Tr}} + F_s$, also $mg = ma + Ds$. Während des Weges ds verliert er die Lageenergie $mg ds$ und gewinnt die Beschleunigungsarbeit $ma ds$; in die Feder wird $Ds ds$ hineingesteckt. $mg ds = ma ds + Ds ds$.

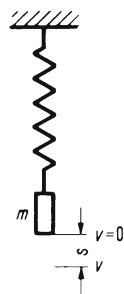


Bild 1.55 Zur Herleitung des Energiesatzes der Mechanik

Summiert man auf, so folgt

$$\int_0^s mg ds = \int_0^s ma ds = \int_0^v Ds ds$$

und man erhält mit

$$\int_0^s ma ds = \int_0^s m \frac{dv}{dt} ds = \int_0^v m \frac{ds}{dt} ds = \int_0^v m v dv$$

schließlich

$$mgs = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Ds^2.$$

Können sich Lageenergie, Spannungsenergie und Bewegungsenergie wechselseitig ineinander umwandeln und wird dem betrachteten System weder Energie zu- noch abgeführt – man spricht von einem abgeschlossenen System –, so bleibt die Gesamtenergie erhalten.

Energiesatz der Mechanik: In einem gegen Zufuhr oder Abgabe von Arbeit abgeschlossenen mechanischen System¹⁾ bleibt die Summe aus potentieller Energie und Bewegungsenergie konstant.

$$W_{\text{pot}} + W_{\text{kin}} = W_L + W_S + W_{\text{kin}} = \text{const.}$$

Bei der Betrachtung der mechanischen Energiearten fällt auf, dass die Hubarbeit Lageenergie, die elastische Verformungsarbeit Spannungsenergie und die Beschleunigungsarbeit Bewegungsenergie erzeugen. Die Reibungsarbeit hingegen liefert keine Energie, die sich als mechanische Arbeit wiedergewinnen lässt. Doch auch die Reibungsarbeit verschwindet nicht einfach. Sie erzeugt Wärmeenergie. Wie wir in Abschn. 2.4.2 sehen werden, können wir einen allgemein gültigen Energie-Erhaltungssatz formulieren, der außer den mechanischen noch weitere Energieformen, nämlich Wärmeenergie, Lichtenergie, elektrische, magnetische und Atomenergie umfasst. Dieser Energiesatz ist einer der wichtigsten Erfahrungssätze, die wir besitzen. Eigentlich wird dadurch erst richtig klar, warum es sinnvoll war, die Begriffe „Arbeit“ und „Energie“ einzuführen.

Auch der Energiesatz der Mechanik ist jedoch schon von großem Nutzen, solange wir es – wie das hier der Fall ist – nur mit mechanischen Vorgängen zu tun haben. Man kann dann

¹⁾ Die Erzeugung von Wärmeenergie z.B. durch Reibung oder plastische Verformung ist natürlich „Abgabe von Arbeit“.

sogar die Reibungsarbeit mit berücksichtigen, wenn man sich klar macht, dass durch sie dem System ein bestimmter Energiebetrag entzogen wird. Stellt man das in Rechnung, so kann man mit dem Energiesatz häufig Aufgaben recht elegant lösen, die mit den Newtonschen Axiomen ebenfalls, jedoch manchmal nur viel schwieriger lösbar wären. Die Anwendung des Energiesatzes ist immer dann vorteilhaft, wenn man nur „Bilanz zu ziehen“ braucht, d.h., wenn nur Anfangs- und Endzustand eines Systems interessieren, ohne dass man nach dem tatsächlichen Ablauf eines Vorganges fragt. Das Beispiel des senkrecht nach oben geworfenen Körpers (S. 71) verdeutlicht dies.

Anwendungen. Lageenergie: Speicherkraftwerke, Gegengewichte bei Aufzügen.

Spannungsenergie: Federn in Schaltern, Schützen und dgl., Federmotoren.

Bewegungsenergie: Hämmern, Stanzen und dgl.

Reibungsarbeit: Abbau von Bewegungsenergie in Bremsen.

Aufgaben zu Abschn. 1.3.4.2

1. Die Aufgaben 1, 2 und 4 zu Abschn. 1.3.3 löse man mit Hilfe des Energiesatzes.

2. Was haben schiefe Ebene, Schraube, Flaschenzug und Hebel gemeinsam?

3. Ein Wagen rollt die Strecke $s_1 = 100$ m weit eine Gefällstrecke mit $\varphi = 20^\circ$ herunter, legt die waagerechte Strecke $s_2 = 100$ m zurück und kommt auf der Steigung ($\varphi = 20^\circ$) nach der Strecke s_3 zur Ruhe (Bild 1.56). Wie groß ist s_3 ? (Rollreibungszahl $\mu_R = 0,03$).

4. Auf eine um 15 cm zusammengedrückte Feder mit der Federkonstanten 2 N/cm wird eine Kugel mit der Masse 80 g gelegt. Wie hoch

springt die Kugel, wenn die Feder sich plötzlich entspannt?

5. Welche Geschwindigkeit hat eine Pendelkugel, die an einem 2,5 m langen Faden hängt, im tiefsten Punkt ihrer Bahn, wenn der Faden anfangs um 30° gegen die Senkrechte ausgelenkt wurde?

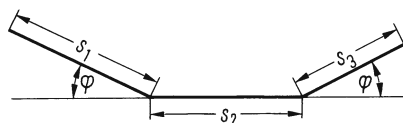


Bild 1.56 Zur Aufgabe 5

1.3.4.3 Energiestrom oder Leistung

Will man angeben, in welcher Zeit ein bestimmter Energiebetrag ausgetauscht, d.h. eine bestimmte Arbeit verrichtet wird, so bedient man sich des Begriffes Energiestrom oder Leistung – Formelbuchstabe P –

Definition:

$$\text{Energiestrom} = \text{Leistung} = \frac{\text{Arbeit}}{\text{dazu benötigte Zeit}}$$

Einheit der Leistung: Im Internationalen Einheitensystem

$$\frac{1 \text{ Joule}}{1 \text{ Sekunde}} = 1 \text{ Watt} \quad 1 \frac{\text{J}}{\text{s}} = 1 \text{ W}$$

Da es sich bei der Leistung, wie z.B. bei der Geschwindigkeit und der Beschleunigung, um eine Größe handelt, die von einem bestimmten Zeitintervall abhängt, ist es sinnvoll, zwischen mittlerer und Momentanleistung zu unterscheiden.

Mittlere Leistung

Wir betrachten einen Bremsvorgang mit konstanter Bremskraft F_R . Zu ihm gehört ein Bremsweg s und demnach eine Arbeit $W = F_R s$. Teilt man diese gesamte Arbeit durch die ganze Bremszeit t , so erhält man die mittlere Leistung.

Definition:

$$\text{Mittlere Leistung} = \frac{\text{gesamte Arbeit}}{\text{gesamte dazu benötigte Zeit}} \quad \bar{P} = \frac{W}{t}$$

Momentanleistung

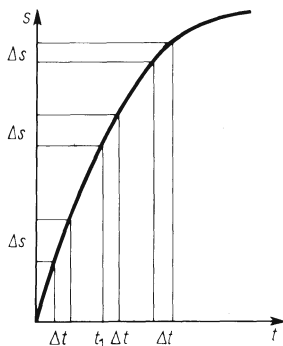


Bild 1.57 $s = f(t)$ bei einem Bremsvorgang

Im obigen Beispiel nehmen die in gleichen kleinen Zeitintervallen Δt zurückgelegten Wege Δs und damit die zugehörigen Arbeitsbeträge $\Delta W = F \Delta s$ laufend ab (Bild 1.57). Also verringern sich auch die den einzelnen Zeitintervallen entsprechenden Durchschnittsleistungen $\bar{P} = \Delta W / \Delta t = F \Delta s / \Delta t$.

Wählt man jetzt das auf einen Zeitpunkt t_1 folgende Zeitintervall Δt immer kleiner und lässt es schließlich gegen Null gehen, so wird auch die zugehörige Arbeit $\Delta W = F \Delta s$ immer kleiner, und die Durchschnittsleistung strebt einem Grenzwert zu. Diesen Grenzwert bezeichnet man als Momentanleistung P zur Zeit t_1 .

Definition: Momentanleistung (kurz: Leistung)

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} = \dot{W}$$

Bei längs ds konstanter Kraft F (wie in unserem Beispiel) ist $dW = F ds$. Dann wird

$$P = F ds/dt = Fv.$$

Momentanleistung = Kraft \times Momentangeschwindigkeit

$$P = Fv \quad (1.15)$$

Beispiel 12. Ein Körper mit der Masse 5 kg wird 1,5 s lang aus der Ruhe auf die Geschwindigkeit 3 m/s beschleunigt, behält diese 5 s lang bei und wird dann durch die ständig wirkende Gleitreibungskraft $F_R = 2$ N wieder abgebremst (Bild 1.58). Während der Beschleunigung ist also eine Antriebskraft $F = ma + F_R = 12$ N, für die anschließende gleichförmige Bewegung nur noch $F = F_R = 2$ N nötig.

Daraus ergibt sich die Momentanleistung $P = Fv$ (s. Bild 1.58). Wie man sieht, wächst sie bis zu einer „Spitzenleistung“ $\dot{P} = 36$ Watt an, während die „Dauerleistung“ nur $P_D = 6$ Watt beträgt. Das ist wichtig! Ein Antriebsmotor muss also nicht nur die Dauerleistung aufbringen, sondern kurzzeitig auch die Spitzenleistung, damit überhaupt die gewünschte Beschleunigung erzielt wird.

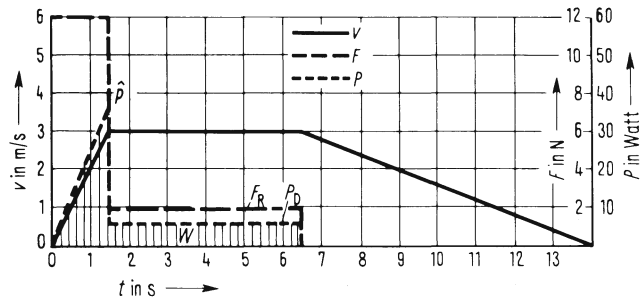


Bild 1.58 Momentangeswindigkeit, Antriebskraft und Momentanleistung als Funktion der Zeit

Die durch die Antriebskraft aufgebrachte Durchschnittsleistung \bar{P} ist gleich dem Quotienten aus der bis $t = 6,5$ s verrichteten Arbeit W und der Zeit $t = 6,5$ s.

Wie man sich in Analogie zum v - t -Diagramm klarmachen kann, entspricht der Arbeit W die Fläche unter der P - t -Kurve. Daher ergibt sich für die Durchschnittsleistung $\bar{P} = 57 \text{ J}/6,5 \text{ s} = 8,77 \text{ W}$.

Wirkungsgrad

In dem gerade behandelten Beispiel wurde während der Beschleunigung eine Arbeit $W_{\text{Ges}} = 27 \text{ J}$ aufgewendet. Davon wurde jedoch ein Anteil $W_{\text{R}} = F_{\text{R}} \cdot (1/2) a t^2 = 4,5 \text{ J}$ als Reibungsarbeit verbraucht, so dass nur $W_{\text{a}} = (1/2) m v^2 = 22,5 \text{ J}$ als mechanische Energie erhalten blieb. Bezeichnet man diesen Anteil als Nutzarbeit W_{N} , so ist unter Umständen interessant, welchen Bruchteil der Gesamtarbeit er ausmacht. Man bezeichnet diesen Bruchteil als Wirkungsgrad η_{w}

Definition:

$$\text{Wirkungsgrad} = \frac{\text{Nutzarbeit}}{\text{Gesamtarbeit}} \quad \eta_{\text{w}} = \frac{W_{\text{N}}}{W_{\text{ges}}}$$

In unserem Beispiel ist $\eta_{\text{w}} = 22,5 \text{ J}/27 \text{ J} = 83,3\%$. Die Nutzarbeit wird oft erst zu einem späteren Zeitpunkt und in einem anderen Zeitintervall abgegeben, als demjenigen, in dem die Gesamtarbeit aufgewendet wurde. – Man denke z.B. an eine gespannte Feder. – Häufig jedoch werden beide gleichzeitig verrichtet, z.B. bei einer Beschleunigung (unser Beispiel) oder bei einem Getriebe. Dann gibt man vielfach als Wirkungsgrad η_{p} das Verhältnis der Nutzleistung P_{N} zur Gesamtleistung P_{Ges} an. $\eta_{\text{p}} = P_{\text{N}}/P_{\text{Ges}}$.

Nur unter der Bedingung, dass W_{N} und W_{Ges} in einem gleichen Zeitintervall aufgewendet werden, ist η_{p} sinnvoll, und es gilt $\eta_{\text{p}} = \eta_{\text{w}}$.

Die Erzielung großer Wirkungsgrade spielt in der Technik eine wichtige wirtschaftliche Rolle.

Aufgaben zu Abschn. 1.3.4.2

1. Eine 2-Zylinder-Kolbenmaschine leistet 150 kW bei einer Drehzahl 120/min. Welche mittlere Kraft drückt beim Hin- und Hergang auf den Kolben, wenn dessen Weg 30 cm ist?
2. Die Leistung einer Kaplan turbine beträgt 11 000 kW. Wie viel Kubikmeter Wasser werden bei dem nutzbaren Gefälle 8 m und dem Wirkungsgrad 93 % pro Sekunde zugeführt?
3. Welche mittlere Leistung haben Flugzeugmotoren bei dem Gesamtwirkungsgrad 20%, wenn sie ein Flugzeug mit der Masse 5 t in 5 min auf die Höhe 10 km und die Geschwindigkeit 720 km/h bringen?
4. Die Luftreibungskraft wächst mit dem Quadrat der Geschwindigkeit. Welche Leistung müsste ein Motor haben, der für die Geschwindigkeit 110 km/h 22,1 kW benötigt, um mit demselben Wagen mit der Geschwindigkeit 150 km/h zu fahren? Die Rollreibung werde vernachlässigt.
5. Wie groß ist die Spitzenleistung eines Hochspringers mit der Masse 75 kg, der seinen Schwerpunkt während des Absprunghöhe 0,4 m hoch hebt und ihm dabei eine solche Absprunggeschwindigkeit erteilt, dass er noch weitere 0,6 m hoch fliegt?

1.3.4.4 Impuls und Kraftstoß

□ **Versuch 9.** Zwei an langen Fäden aufgehängte Stahlkugeln (Bild 1.59) bewegen sich hintereinander her, Kugel 1 langsamer als Kugel 2. Sie stoßen zusammen und prallen wieder auseinander. Dabei wird Kugel 1 beschleunigt, Kugel 2 verzögert. □

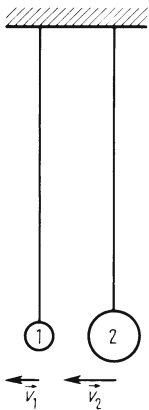


Bild 1.59 Zum Impulssatz

Will man die Geschwindigkeitsänderungen $\Delta \vec{v}_1$ und $\Delta \vec{v}_2$ miteinander vergleichen, so überlegt man sich, dass wegen „*actio = reactio*“ auf beide Kugeln entgegengesetzt gerichtete und gleich große mittlere Kräfte $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ während der Zeit Δt gewirkt haben.

Dann ergibt sich mit $\vec{F}_1 = m_1 \vec{a}_1$ und $\vec{F}_2 = m_2 \vec{a}_2$ ¹⁾

$$m_1 \vec{a}_1 = -m_2 \vec{a}_2 \quad (1.16)$$

$$m_1 \frac{\Delta \vec{v}_1}{\Delta t} = -m_2 \frac{\Delta \vec{v}_2}{\Delta t} \quad (1.17)$$

$$m_1 \Delta \vec{v}_1 = -m_2 \Delta \vec{v}_2 \quad (1.18)$$

$$\Delta \vec{v}_1 = -\frac{m_2}{m_1} \Delta \vec{v}_2 \quad (1.19)$$

Die Geschwindigkeitsänderungen verhalten sich dem Betrage nach umgekehrt proportional zu den trägen Massen und haben entgegengesetzte Richtungen.

Impulssatz

Da wir die Kräfte und die Stoßzeit selbst gar nicht zu kennen brauchten, um diese Aussage zu gewinnen, hätten wir auch gleich von Gl. (1.18) ausgehen können. Hier kommen nur Produkte aus Masse und Geschwindigkeit vor. Weil das häufig der Fall ist, hat man dafür eine neue Größe eingeführt, den Impuls \vec{p}

¹⁾ \vec{a}_1 und \vec{a}_2 seien hier mittlere Beschleunigungen.

Definition:

Impuls = Masse \times Geschwindigkeit

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (1.20)$$

Newton nannte das Produkt $m\vec{v} = \vec{p}$ Bewegungsgröße.

Der Impuls \vec{p} ist ein Vektor. Er hat die Richtung der Geschwindigkeit \vec{v} .

Benutzt man die Definition (1.20), so wird aus Gl. (1.18) mit $m_1 \Delta\vec{v}_1 = \Delta\vec{p}_1$ und $m_2 \Delta\vec{v}_2 = \Delta\vec{p}_2$

$$\Delta\vec{p}_2 = -\Delta\vec{p}_1 \quad (1.21)$$

$$\Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 = 0 \quad (1.22)$$

Die vektorielle Summe der Impulsänderungen ist gleich Null. Das bedeutet, dass die vektorielle Summe der Impulse konstant bleibt.

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{const} \quad (1.23)$$

Wir wollen das an unserem Versuch verdeutlichen. Vor dem Stoß ist $\vec{p}_1 = m_1\vec{v}_1$ und $\vec{p}_2 = m_2\vec{v}_2$, nach dem Stoß $\vec{p}'_1 = m_1(\vec{v}_1 + \Delta\vec{v}_1)$ und $\vec{p}'_2 = m_2(\vec{v}_2 + \Delta\vec{v}_2)$. Also ist der Gesamtimpuls nach dem Stoß

$$\vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = m_1(\vec{v}_1 + \Delta\vec{v}_1) + m_2(\vec{v}_2 + \Delta\vec{v}_2) \quad (1.24)$$

aus Gl. (1.19) folgt $\Delta v_2 = -\frac{m_1}{m_2}\Delta v_1$, und damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 &= m_1\vec{v}_1 + m_1\Delta\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 - m_2\frac{m_1}{m_2}\Delta\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_1\vec{v}_1 \\ \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 &= \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_{\text{Ges}} = \text{const} \end{aligned} \quad (1.25)$$

Der Gesamtimpuls bleibt also erhalten.

Natürlich durften die Kugeln dabei nicht von außen zusätzlich beschleunigt werden. Es durften nur die Stoßkräfte zwischen beiden Kugeln wirken. Man nennt ein System, in dem nur innere Wechselwirkungskräfte wirken und das nicht durch äußere Kräfte beeinflusst wird, ebenfalls ein abgeschlossenes System (vgl. auch Abschn. 1.3.4.2). Mit diesem Begriff formulieren wir den

Satz von der Erhaltung des Impulses (Impulssatz). In einem gegen äußere Kräfte abgeschlossenen System bleibt der Gesamtimpuls – dieser ist die Vektorsumme der Einzelimpulse – konstant. Die Vektorsumme aller Impulsänderungen ist gleich Null.

$$\vec{p}_{\text{Ges}} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \text{const}$$

$$\Delta\vec{p}_{\text{Ges}} = \sum_{i=1}^N \Delta\vec{p}_i = 0$$

Dieser Satz ist für mechanische Vorgänge, einschließlich der Bewegung von Molekülen und Atomen, von ähnlicher Bedeutung wie der Energiesatz. Auch mit ihm kann man wieder recht einfach Vorgänge behandeln, bei denen nur Anfangs- und Endzustand von Interesse sind, ohne dass man nach dem Ablauf fragt. Unser obiger Versuch macht das deutlich. Ohne die Wechselwirkungskräfte und ihre Wirkzeit zu kennen, können wir das Verhältnis der Geschwindigkeitsänderungen berechnen.

Man kann die Gültigkeit des Impulssatzes unmittelbar erfahren, wenn man versucht, von einem kleinen Boot aus kräftig ans Ufer zu springen. Man wird dabei ins Wasser fallen, wenn man nicht berücksichtigt, dass das Boot einen gleich großen Impuls wie man selbst nach der anderen Seite bekommt. Es gibt viele nützliche Anwendungsbeispiele. Eines ist die Rakete. Bei ihr nützt man die Tatsache aus, dass der Impuls, welchen das Treibgas nach der einen Richtung erfährt, der Rakete nach der anderen Richtung mit dem gleichen Betrag mitgeteilt wird. Man nennt das Rückstoß.

Raketengleichung. Man kann mit Hilfe des Impulssatzes ausrechnen, welche Fluggeschwindigkeit \vec{v} eine Rakete nach Ausstoß einer bestimmten Treibmasse hat, die aus der Rakete mit der Geschwindigkeit \vec{v}_{Tr} relativ zur Rakete austritt¹⁾ (Bild 1.60). Der Impuls, den das Massenelement dm_{Tr} der Treibgase jeweils erhält, ist $dm_{\text{Tr}} \vec{v}_{\text{Tr}}$. Der Gesamtimpuls der Treibgase ändert sich also jeweils um $d\vec{p}_{\text{Tr}} = dm_{\text{Tr}} \vec{v}_{\text{Tr}}$. Die Rakete erfährt dabei die Impulsänderung $d\vec{p}_{\text{R}} = m_{\text{R}} d\vec{v}$; m_{R} ist dabei die in dem betreffenden Zeitpunkt vorhandene Masse. Es leuchtet ein, dass mit abnehmender Raketenmasse m_{R} der Geschwindigkeitszuwachs immer größer wird.

Nach dem Impulssatz gilt $m_{\text{R}} d\vec{v} = dm_{\text{Tr}} \vec{v}_{\text{Tr}}$. Damit erhält man $d\vec{v} = -\vec{v}_{\text{Tr}} dm_{\text{Tr}}/m_{\text{R}}$. Der Massenzuwachs der schon ausgestoßenen Treibgase ist gleich der Abnahme der Raketenmasse, also $dm_{\text{Tr}} = -dm_{\text{R}}$. Damit wird $d\vec{v} = \vec{v}_{\text{Tr}} dm_{\text{R}}/m_{\text{R}}$. Zählt man alle Geschwindigkeitsänderungen $d\vec{v}$ zusammen, ergibt sich mit

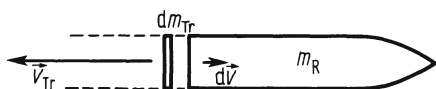


Bild 1.60 Zur Herleitung der Raketengleichung

$$\vec{v} = \vec{v}_{\text{Tr}} \ln \frac{m}{m_0} + \vec{v}_0 \quad \text{oder}$$

$$\int_{v_0}^v d\vec{v} = \int_{m_0}^m \vec{v}_{\text{Tr}} dm_{\text{R}}/m_{\text{R}}$$

$$\vec{v} = -\vec{v}_{\text{Tr}} \ln \frac{m_0}{m} + \vec{v}_0; \quad \text{Raketengleichung}$$

\vec{v}_0 ist dabei die Anfangsgeschwindigkeit, m_0 die Startmasse der Rakete, \vec{v}_{Tr} die Ausströmgeschwindigkeit der Treibgase und \vec{v} , die Fluggeschwindigkeit zu dem Zeitpunkt, in dem die Rakete nur noch die Masse m hat. Die ausgestoßene Treibmasse ist demnach $m_0 - m$.

Man sieht, dass z.B. mit $v_0 = 0$ die Fluggeschwindigkeit der Rakete erst den Betrag der Ausströmungsgeschwindigkeit der Treibgase v_{Tr} erreicht, wenn $m_0/m = e = 2,718 \dots$ ist, d.h. wenn die Masse auf den Bruchteil $1/e$ ihres Startwertes abgesunken ist. Daraus folgt, dass bei vorgegebener Endgeschwindigkeit v hohe Treibstoffgeschwindigkeiten günstigere Massenverhältnisse ergeben.

¹⁾ Die Erdanziehung sei dabei vernachlässigt (z.B. Start einer Rakete im Weltraum).

Kraftstoß

Bei Raketen wie bei anderen Vorrichtungen, die den Rückstoß ausnutzen, interessiert man sich oft für die dabei auftretende Rückstoßkraft, auch Schubkraft oder Schub genannt. Diese wollen wir jetzt berechnen. Nach dem 2. Newtonschen Axiom ist $\vec{F} = m\vec{a} = m d\vec{v}/dt$. Nun ist $m d\vec{v} = d\vec{p}$. Damit wird das

zweite Newtonsche Axiom

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (1.26)$$

$$\text{Kraft} = \frac{\text{Impulsänderung}}{\text{dazu benötigtes Zeitintervall}}$$

Das ist eine wichtige Verallgemeinerung des zweiten Newtonschen Axioms, denn sie gilt auch, wenn die Masse sich ändert.

Dies machen wir uns am Beispiel der Rakete klar. Sie erfährt eine Schubkraft $\vec{F} = m_R d\vec{v}/dt$. Wie wir oben zeigten, ist aber die Impulsänderung der Rakete $m_R d\vec{v}$ gleich der Impulsänderung $-dm_{Tr} \vec{v}_{Tr}$ eines Massenelementes dm_{Tr} der Treibgase, das mit der konstanten Geschwindigkeit \vec{v}_{Tr} austritt. Also wird die Schubkraft

$$\vec{F} = \frac{m_R d\vec{v}}{dt} = -\frac{dm_{Tr} \vec{v}_{Tr}}{dt} = \vec{v}_{Tr} \frac{dm_R}{dt}$$

gleich \vec{v}_{Tr} mal der Änderung der Raketenmasse pro Zeit. Immer gilt hierbei $\vec{F} = d\vec{p}/dt$. Ändern sich m und \vec{v} mit der Zeit, ist

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{dm}{dt} \quad (\text{Produktregel})$$

Aus $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ folgt die Impulsänderung $d\vec{p}$ in der Zeit dt : $d\vec{p} = \vec{F} dt$. Sie ist umso größer, je größer die wirkende Kraft \vec{F} ist, und je längere Zeit dt diese wirkt. Die Summe aller Impulsänderungen ergibt die vektorielle Differenz zwischen Anfangsimpuls \vec{p}_1 und Endimpuls \vec{p}_2

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2} d\vec{p} = \int_0^t \vec{F} dt$$

Definition: $\int_0^t \vec{F} dt$ nennt man Kraftstoß.

Endimpuls minus Anfangsimpuls = Kraftstoß

Bei konstanter Kraft \vec{F} , die während der Zeit t wirkt, ist der Kraftstoß einfach gleich $\vec{F}t$, also wird

$$\Delta\vec{p} = \vec{F}t.$$

Beispiel 13. Gegen eine Wand prasseln pro Sekunde 100 Stahlkugeln mit je der Masse 2 g. Sie prallen mit der Geschwindigkeit $v_1 = 2 \text{ m/s}$ auf und fliegen mit $v_1 = 1,5 \text{ m/s}$ entgegengesetzt zurück. Wie groß ist die mittlere Kraft auf die Wand?

Wir berechnen zuerst die Impulsänderung Δp_K einer einzelnen Kugel

$$\Delta p_K = p_{K2} - p_{K1} = m (v_2 - v_1) = 2 \text{ g} [1,5 \text{ m/s} - (-2 \text{ m/s})]$$

(\vec{v}_2 ist ja \vec{v}_1 entgegengesetzt gerichtet!) $\Delta p_K = 7 \text{ g m/s}$. Die Impulsänderung aller Kugeln in einer Sekunde ist $\Delta p = 100 \Delta p_K = 700 \text{ g m/s}$. Mit $\Delta t = 1 \text{ s}$ ergibt sich dann

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{0,7 \text{ kgm}}{1 \text{ s} \cdot \text{s}} = 0,7 \text{ N}$$

Zusammenhang zwischen Impuls und Bewegungsenergie

In manchen Fällen ist es nützlich, die Bewegungsenergie $W_{\text{kin}} = mv^2/2$ eines Körpers direkt mit dem Betrag seines Impulses $p = mv$ in Zusammenhang zu bringen. Durch einfache algebraische Umformung erhält man

$$W_{\text{kin}} = \frac{p^2}{2m} \quad (1.27)$$

Anwendungen. Man benutzt den Rückstoß zum Antrieb von Raketen, rotierenden Rasensprengern, Düsenhubschraubern, Schiffen und Flugzeugen. Störend wirkt der Rückstoß bei Schusswaffen.

1.3.4.5 Anwendung von Impuls- und Energiesatz, Stoßgesetze

Bei dem in Abschn. 1.3.4.4 beschriebenen Versuch 9 (Bild 1.59) konnten wir bei Kenntnis der Anfangsimpulse $m_1\vec{v}_1$ und $m_2\vec{v}_2$ mit Hilfe des Impulssatzes nur das Verhältnis der Geschwindigkeitsänderungen beider Kugeln ausrechnen, nicht jedoch ihre tatsächlichen Werte. Ebenso wenig können wir die Geschwindigkeiten beider Kugeln nach dem Stoß $\vec{u}_1 = \vec{v}_1 + \Delta\vec{v}_1$ und $\vec{u}_2 = \vec{v}_2 + \Delta\vec{v}_2$ erfassen. Das ist auch verständlich, denn für zwei Unbekannte u_1 und u_2 haben wir mit dem Impulssatz bisher nur eine Gleichung. Wir benötigen also noch eine zweite. Diese liefert uns der Energiesatz. Wir betrachten zunächst einen Spezialfall, bei dem wir annehmen, die Körper seien elastisch, d.h., die Summe ihrer Bewegungsenergien sei nach dem Stoß noch genauso groß wie vorher, es gehe also keine Bewegungsenergie verloren¹⁾. Während des Stoßes ist sie natürlich vorübergehend in Spannungsenergie verwandelt worden. – Einen derartigen Stoß nennt man elastisch.

Gerader zentraler Stoß

Vorläufig sollen sich die Massenmittelpunkte der Kugeln auf einer gemeinsamen waagerechten Geraden bewegen. Dadurch wirken die Stoßkräfte parallel zur Bewegungsrichtung, die potentielle Energie bleibt unverändert, und es tritt keine Rotation auf.

Elastischer Stoß. Der Impulssatz liefert uns die Gleichung

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 \quad (1.28)$$

¹⁾ Bei Kenntnis der elastischen Eigenschaften der Kugeln könnten wir auch die Newtonschen Axiome benutzen. Das würde aber eine recht komplizierte Rechnung ergeben.

der Energiesatz die Gleichung

$$m_1 \vec{v}_1^2 / 2 + m_2 \vec{v}_2^2 / 2 = m_1 \vec{u}_1^2 / 2 + m_2 \vec{u}_2^2 / 2 \quad (1.29)$$

Wir formen beide Gleichungen um. Aus Gl. (1.28) wird

$$m_1(\vec{v}_1 - \vec{u}_1) = m_2(\vec{u}_2 - \vec{v}_2) \quad (1.30)$$

aus Gl. (1.29)

$$m_1(\vec{v}_1^2 - \vec{u}_1^2) = m_2(\vec{u}_2^2 - \vec{v}_2^2) \quad (1.31)$$

$$m_1(\vec{v}_1 - \vec{u}_1)(\vec{v}_1 + \vec{u}_1) = m_2(\vec{u}_2 - \vec{v}_2)(\vec{u}_2 + \vec{v}_2) \quad (1.32)$$

Setzt man Gl. (1.30) in Gl. (1.32) ein, so erhält man

$$\vec{v}_1 + \vec{u}_1 = \vec{u}_2 + \vec{v}_2 \quad (1.33)$$

Löst man diese Gleichung nach \vec{u}_1 auf und setzt sie in Gl. (1.28) ein, so wird schließlich

$$\vec{u}_1 = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_2 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_1 \quad (1.34)$$

Genauso erhält man durch Elimination von \vec{u}_1 aus Gl. (1.33) und Gl. (1.28)

$$\vec{u}_2 = \frac{2m_1}{m_2 + m_1} \vec{v}_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \vec{v}_2 \quad (1.35)$$

Die Gleichungen (1.34) und (1.35) liefern uns jetzt also bei Kenntnis der Massen m_1 und m_2 und der Geschwindigkeiten \vec{v}_1 und \vec{v}_2 , die die Stoßpartner vor dem Stoß hatten, deren Geschwindigkeiten \vec{u}_1 und \vec{u}_2 nach dem Stoß.

Diskussion von Spezialfällen. 1. Wir betrachten zwei gleiche Körper, $m_1 = m_2 = m$. Dann wird $\vec{u}_1 = \vec{v}_2$ und $\vec{u}_2 = \vec{v}_1$. Beide Körper vertauschen einfach ihre Geschwindigkeiten. Ist insbesondere einer vorher in Ruhe, z.B. $\vec{v}_1 = 0$, so ist nachher $\vec{u}_1 = \vec{v}_2$ und $\vec{u}_2 = 0$, d.h. der zweite Körper ist in Ruhe, und der erste fliegt weiter. Das sieht im Versuch recht verblüffend aus.

2. Eine Kugel mit m_1 prallt elastisch mit \vec{v}_1 gegen eine ruhende Wand. Nun ist die Masse der Wand m_2 sehr groß gegen m_1 und $\vec{v}_2 = 0$. Wegen $m_2 \gg m_1$ ist $\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \approx -1$, und es wird $\vec{u}_1 = -\vec{v}_1$. Das heißt, die Kugel fliegt mit der entgegengesetzt gleichen Geschwindigkeit wieder zurück. Ihre Impulsänderung $\Delta \vec{p} = \vec{p}'_1 - \vec{p}_1$ ist $\Delta \vec{p} = m_1 \vec{u}_1 - m_1 \vec{v}_1 = m_1(-\vec{v}_1) - m_1 \vec{v}_1 = -2m_1 \vec{v}_1$. Demnach hat die Wand den Kraftstoß $2m_1 \vec{v}_1$ erfahren. Auf sie wurde jedoch keine Energie übertragen!

Unelastischer Stoß. Bleibt nicht die ganze Bewegungsenergie beim Stoß erhalten, sondern geht ein Teil verloren, so ist der Stoß unelastisch. Der Verlust der Bewegungsenergie ΔW_{kin} kann z.B. als Reibungsarbeit verbraucht werden oder in einer bleibenden Formänderung der Stoßpartner stecken. Weiß man, wie viel Energie verloren geht, so kann man zur Berechnung der Geschwindigkeiten wieder mit Impuls- und Energiesatz rechnen:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 \quad (1.36)$$

$$\frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \vec{u}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{u}_2^2 + \Delta W_{\text{kin}} \quad (1.37)$$

¹⁾ $\vec{v}_1^2 = v_1^2$ (s. z.B. [1]).

Ist ΔW_{kin} unbekannt, so lässt sich die Energiebilanz natürlich nicht ziehen, und \vec{u}_1 sowie \vec{u}_2 lassen sich nicht berechnen. Es gibt jedoch zahlreiche Fälle, in denen sich beide Stoßpartner nach dem Stoß mit gemeinsamer Geschwindigkeit weiter bewegen. Stößt z.B. ein Eisenbahnwagen auf einen zweiten, mit dem er beim Stoß automatisch gekuppelt wird, so ist $\vec{u}_1 = \vec{u}_2 = \vec{u}$. Da man jetzt nur noch eine Unbekannte, die gemeinsame Geschwindigkeit \vec{u} , hat, liefert uns der Impulssatz allein die Lösung.

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 \quad (1.38)$$

$$\vec{u} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_2 \quad (1.39)$$

Man kann dann nachträglich die Bewegungsenergie nach dem Stoß, $(1/2)(m_1 + m_2)u^2$, und damit auch ΔW_{kin} berechnen.

Diskussion von Spezialfällen. Beide Stoßpartner haben gleiche Massen $m_1 = m_2 = m$. Dann wird $\vec{u} = (1/2)(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$. Bewegen sich beide vor dem Stoß in der gleichen Richtung, so ist der Betrag von \vec{u} gleich dem arithmetischen Mittel der beiden Ausgangsgeschwindigkeiten.

Ist Körper 2 vor dem Stoß in Ruhe, also $\vec{v}_2 = 0$, so wird demnach $\vec{u} = (1/2)\vec{v}_1$. Interessant ist in diesem Falle der Verlust an Bewegungsenergie. Dieser ist

$$\Delta W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 m u^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 m \cdot \frac{1}{4} v_1^2 = \frac{1}{2} W_{\text{kin}1}$$

Das heißt: Genau die Hälfte der ursprünglich vorhandenen Bewegungsenergie geht verloren.

Schräger zentraler Stoß

Bewegen sich die Massenmittelpunkte zweier Stoßpartner schräg aufeinander zu, so wirken die elastischen Wechselwirkungskräfte nur in der Richtung der auf den Berührungsflächen senkrecht stehenden Stoßgeraden (1–2 in Bild 1.61). Senkrecht dazu kann also kein Impuls ausgetauscht werden. Daher ändern sich nur die Geschwindigkeitskomponenten in Richtung der oben genannten Geraden. Für sie gelten die für den geraden zentralen Stoß ermittelten Formeln. Die senkrecht dazu stehenden Geschwindigkeitskomponenten bleiben erhalten.

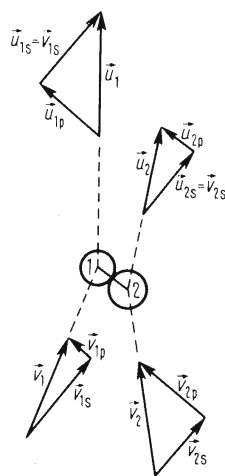


Bild 1.61 Schräger zentraler Stoß zweier Körper

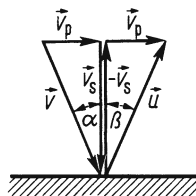


Bild 1.62 Schräger zentraler Stoß eines Körpers auf eine Wand

Beispiel 14. Bei elastischem schrägen Aufprall auf eine Wand (Bild 1.62) bleibt die Geschwindigkeitskomponente \vec{v}_p parallel zur Wand ungeändert, die senkrechte Komponente \vec{v}_s kehrt sich um. Die Bewegung spielt sich also in einer Ebene senkrecht zur Wand ab, und der „Einfallswinkel“ α ist gleich dem „Ausfallswinkel“ β .

Nichtzentraler Stoß. Bei ausgedehnten Körpern kann es geschehen, dass die Stoßgerade nicht mit der Verbindungslinie der Massenmittelpunkte übereinstimmt. Dann geraten die Stoßpartner zusätzlich in Drehung. Das soll hier jedoch nicht näher behandelt werden.

Anwendungen. Messung von Geschossgeschwindigkeiten mit dem „ballistischen Pendel“ (s. Aufgabe 1). Berechnung der Vorgänge beim Rangierbetrieb der Bahn. Abbremsung der schnellen Neutronen im Kernreaktor (Abschn. 6.2.4.1).

Aufgaben zu Abschn. 1.3.4.4 und 1.3.4.5

1. Ein ballistisches Pendel (Bild 1.63) besteht aus einer an einem ca. 1 m langen Seil aufgehängten Sandkiste der Masse $m = 20$ kg. Nach Einschlag eines Geschosses der Masse $m_k = 10$ g schlägt es so aus, dass sich der Schwerpunkt um $h = 5$ cm hebt. Wie schnell ist das Geschoss?

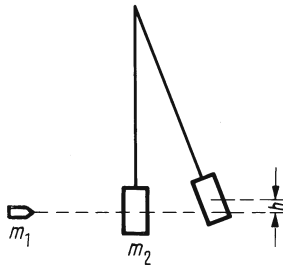


Bild 1.63 Ballistisches Pendel

2. Eine Lore der Masse $m = 600$ kg fährt horizontal mit der Geschwindigkeit $v_1 = 1,2$ m/s. Wie schnell fährt sie weiter, nachdem senkrecht von oben 400 kg Erz hineingefallen sind?

3. Zwei gleiche Autos stoßen zusammen. Man vergleiche die Verformungsarbeiten, wenn a) beide mit gleicher Geschwindigkeit v einander entgegenfahren und b) das eine Auto mit $2v$ gegen das zweite ruhende trifft. c) Wie groß ist die Verformungsarbeit, wenn ein Auto der gleichen Masse mit $2v$ gegen eine feste Betonwand fährt und nicht zurückprallt?

4. Auf drei gleiche zusammenhängende Eisenbahnwagen stößt noch ein solcher mit der Ge-

schwindigkeit $v = 12$ km/h und wird automatisch angekuppelt. Wie schnell rollen alle Wagen weiter?

5. Beim Rangierbetrieb nützt man Folgendes aus: Stößt ein Wagen auf einen stehenden Zug aus gleichen Wagen, die nicht gekuppelt sind, so bleibt der Wagen stehen, während am anderen Ende des Zuges ein Wagen mit der gleichen Geschwindigkeit fortrollt. Stoßen mehrere Wagen, so rollen am anderen Ende gleich viele weg und nicht ein einzelner mit erhöhter Geschwindigkeit. (Man kann das leicht mit nebeneinander liegenden gleichen Münzen ausprobieren.) Wie kommt das?

6. Ein Neutron der Masse m_N mit der Geschwindigkeit 300 m/s und ein Heliumkern der Masse $m_{He} = 4m_N$, der sich in der gleichen Richtung wie das Neutron mit der Geschwindigkeit 800 m/s bewegt, stoßen elastisch zusammen. Welche Geschwindigkeiten haben beide nach dem Stoß?

7. Wie viel Treibmasse muss eine Rakete mit der Startmasse $2,5 \cdot 10^5$ kg pro Sekunde ausstoßen, um mit der Beschleunigung 5 m/s² senkrecht nach oben zu starten? Geschwindigkeit der Treibmasse $v_{Tr} = 2,5$ km/s.

8. Eine Rakete und ein Geschoss gleicher Masse steigen gleich hoch. Wo gibt es die größere Rückstoßkraft beim Start? Warum?

9. Mit welcher Kraft wird ein Rasensprenger angetrieben, aus dessen Düsen pro Sekunde 2 l Wasser mit 20 m/s austreten?

1.4 Massenanziehung oder Gravitation

Zu den erstaunlichsten physikalischen Erscheinungen gehört die Tatsache, dass alle Körper durch ihre bloße Existenz eine Anziehungskraft aufeinander ausüben. Man nennt diese Erscheinung Massenanziehung oder Gravitation. Ihre bekannteste Wirkung ist die Gewichtskraft, welche die Erde auf alle Körper ausübt. Wir lernten sie bereits in Abschn. 1.3.2.1 kennen. Wie aus dem dritten Newtonschen Axiom folgt, gehört zu jeder Kraft eine Gegenkraft. Also müssen wir schließen, dass nicht nur die Erde jeden Körper, sondern dieser ebenso die Erde anzieht. Demnach besitzen alle Körper die Fähigkeit, auf andere eine Anziehungskraft, Schwerkraft oder Gravitationskraft, auszuüben.

1.4.1 Schwere Masse

Die Eigenschaft der Körper, welche die Ursache für die Gravitationskraft ist, nennt man schwere Masse oder Gravitationsladung m_s .

Sie ist genauso eine Eigenschaft der Körper, wie z.B. die, einen Raum einzunehmen oder diejenige, träge zu sein. Die Bezeichnung „schwere Masse“ ist etwas unglücklich, weil dadurch leicht die Gefahr einer Verwechslung mit der trägen Masse besteht. Allerdings wird dabei in der Praxis meist nicht viel Schaden angerichtet, wie wir gleich sehen werden. Auf gar keinen Fall darf aber die schwere Masse mit der Gewichtskraft, deren Ursache sie ist, verwechselt werden.

Wie für jede physikalische Größe brauchen wir auch für die schwere Masse m_s ein Messverfahren.

Definition: Bringt man zwei verschiedene Körper 1 und 2 jeweils in die gleiche Entfernung r zu einem beliebigen dritten Körper 3 (Bild 1.64), so sollen sich die schweren Massen m_{s1} und m_{s2} verhalten wie die Anziehungskräfte F_{13} und F_{23} , welche dann wirken.

$$m_{s1} : m_{s2} = F_{13} : F_{23} \quad \text{oder} \quad m_s \sim F$$

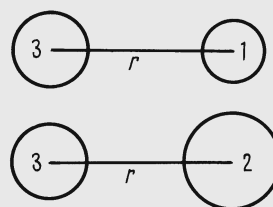


Bild 1.64 Zur Definition der schweren Masse

Aus Erfahrung wissen wir aber (Abschn. 1.3.2.1), dass die Anziehungskraft der Erde auf verschiedene Körper auch proportional zu deren trägen Massen m ist (sonst fielen am gleichen Ort nicht alle Körper gleich stark beschleunigt). Also gilt

Die schwere Masse m_s eines Körpers ist seiner trägen Masse m proportional.

$$m_s \sim m$$

Schwere Massen verschiedener Körper kann man also miteinander vergleichen, indem man ihre trägen Massen misst.

Aus diesem Grunde lohnt es sich nicht, für die schwere Masse eine eigene Maßeinheit einzuführen.

Die Einsteinsche Gravitationstheorie (häufig auch sachlich unzutreffend „Allgemeine Relativitätstheorie“ genannt) geht übrigens von der Grundhypothese der identischen Gleichheit von schwerer und träger Masse aus. Dies ist einer der entscheidenden Unterschiede zu der Newtonschen Gravitationstheorie, in der ja gleichsam außerhalb des Gebäudes dieser Theorie eine künstliche Zusatzhypothese über diesen Sachverhalt aufgestellt werden muss.

1.4.2 Gravitationsgesetz

Die Gravitationskraft, die uns am besten vertraut ist und die wir täglich spüren, ist die Gewichtskraft, welche die Erde auf alle Körper ausübt. Newton erkannte als Erster, dass auch die Kräfte, welche die Himmelskörper auf ihren Bahnen halten, Gravitationskräfte sind. Das gilt u. a. auch für den Mond. Da er sich praktisch auf einer Kreisbahn um die Erde bewegt, muss er nach Abschn. 1.2.1.2 ständig in radialer Richtung auf den Erdmittelpunkt zu beschleunigt werden. Die Umlaufzeit des Mondes ist $T = 27,4$ Tage, sein Bahnradius gleich 60 Erdradien, $r = 60 R_E$.

Daraus ergibt sich die Radialbeschleunigung $a_r = 2,73 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2$. Vergleicht man diese mit der Fallbeschleunigung $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, so erhält man

$$a_r = \frac{g}{3600} = \frac{g}{60^2}.$$

Das Fallen eines Körpers auf der Erdoberfläche, also im Abstand $1 R_E$ vom Erdmittelpunkt, wird genauso durch eine Gravitationskraft hervorgerufen wie die Radialbeschleunigung des Mondes im Abstand $60 R_E$ (s. auch Abschn. 1.5.1.1 und 1.5.1.2). Da aber bei konstanter träger Masse die beschleunigende Kraft F proportional der Beschleunigung a ist, nämlich $F = ma$, folgt, dass die auf den Mond wirkende Anziehungskraft 60^2 mal kleiner sein muss, als sie es auf der Erdoberfläche wäre. Daraus zog Newton den Schluss:

Die Gravitationskraft F ist umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes r der Massenmittelpunkte zweier sich anziehender Körper.

$$F \sim \frac{1}{r^2}$$

In der Umgebung der Erde wird jeder Körper demnach „leichter“, je größer r wird, d.h. je mehr er sich vom Erdmittelpunkt entfernt.

Wie wir von der Gewichtskraft her wissen, ist die Gravitationskraft, mit der ein Körper angezogen wird, seiner trägen Masse proportional. Da wegen *actio = reactio* jedoch nicht zwischen angezogenem und anziehendem Körper unterschieden werden kann, muss die Gravitationskraft auch der trägen Masse des zweiten Körpers proportional sein. Also ergibt sich das

Gravitationsgesetz

$$F \sim \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

oder mit der „Gravitationskonstanten“ γ

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Bestimmung der Gravitationskonstanten γ

Würde man von vornherein die Masse der Erde m_E kennen, so wäre die Bestimmung von γ recht einfach. Denn es gilt ja für Körper mit der Masse m auf der Erdoberfläche $mg = \gamma m m_E / R_E^2$ und damit $\gamma = g R_E^2 / m_E$ ¹⁾. Doch gelingt die Bestimmung der Erdmasse erst über die Kenntnis von γ . Daher ist dieser Weg nicht möglich. Man muss darum γ im Laboratorium messen.

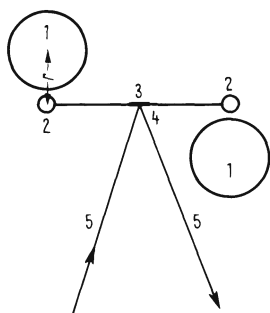


Bild 1.65 Prinzip der Drehwaage nach Cavendish

Die Beschleunigung ermittelt man durch Weg-Zeit-Messung, wobei die sehr kleinen Wege über den möglichst langen Lichtzeiger 5, der am sich mitdrehenden Spiegel 4 reflektiert wird, gemessen werden. Solche Messungen erfordern große Sorgfalt. Hat man bei ihnen jedoch die Beschleunigung a der kleinen Kugeln in Richtung auf die großen ermittelt, so kann man jetzt, da deren Massen m_1 bekannt sind, $\gamma = ar^2/m_1$ berechnen; r ist dabei der Abstand der Massenmittelpunkte der großen und der kleinen Kugeln. Präzisionsmessungen ergaben

$$\gamma = 6,67259(85) \cdot 10^{11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$$

Ist γ bekannt, kann man nun die Masse der Erde m_E berechnen. Denn aus

$$mg = \gamma m m_E / R_E^2$$

folgt

$$m_E = g R_E^2 / \gamma \approx 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

Man mache sich noch einmal klar, dass die Ermittlung der Masse unserer Erde erst möglich wurde, nachdem man im Laborversuch γ gemessen hatte!

¹⁾ Siehe Fußnote 2 auf Seite 53.

Dazu ersetzt man die Erde durch einen Körper bekannter Masse (z.B. eine Bleikugel mit $m_1 = 10 \text{ kg}$) und lässt diese eine zweite viel kleinere Kugel anziehen. Meist benutzt man dazu eine von Cavendish (1731 bis 1810) im Jahre 1798 angegebene symmetrische Anordnung, wie sie in Bild 1.65 schematisch dargestellt ist. Zwei kleine Kugeln 2 können sich an einer dünnen Stange möglichst leicht um die senkrechte Achse 3 bewegen. In der Nähe der feststehenden großen Kugeln 1 „fallen“ sie beschleunigt auf diese zu.

1.4.3 Schwerefeld oder Gravitationsfeld

Wie wir oben sahen, übt jeder Körper der Masse m_1 in seiner Umgebung auf andere in der Entfernung r befindliche Körper der Masse m die Anziehungskraft $F = \gamma m_1 m/r^2$ aus (Bild 1.66)¹⁾. Da Kräfte immer auf den Massenmittelpunkt²⁾ gerichtet sind, liegen ihre Vektoren auf den in Bild 1.66 gezeichneten Mittelpunktstrahlen. Diese bezeichnet man deshalb auch als „Kraftlinien“³⁾.

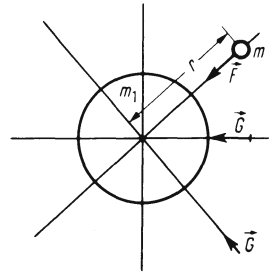


Bild 1.66 Zum Gravitationsfeld

Das Auftreten einer Anziehungskraft erfordert stets die Mitwirkung zweier Körper, dessen, der zieht, und dessen, der gezogen wird. Denken wir uns willkürlich als ziehenden Körper denjenigen der Masse m_1 , so kann nur dann eine Kraft entstehen, wenn wir einen zweiten Körper der Masse m in seine Nähe bringen. Andererseits ist auch keine Kraft ohne Körper 1 möglich. Durch sein Vorhandensein hat er also gewissermaßen den Raum um sich herum darauf vorbereitet, bei Erscheinen eines zweiten Körpers auf diesen eine Kraft auszuüben. Man sagt, er habe um sich ein Kraftfeld aufgebaut. Da es sich hier um Schwerkraft oder Gravitationskräfte handelt, nennt man dieses Kraftfeld Schwerefeld oder Gravitationsfeld.

1.4.3.1 Gravitationsfeldstärke

Die Anziehungskraft des Körpers der Masse m_1 auf denjenigen der Masse m im Abstand r ist bekanntlich $F = \gamma m_1 m/r^2$ hängt also von der Masse beider Körper ab. Die Kraft F ist demnach an einer bestimmten Stelle im Schwerefeld des ersten Körpers umso größer, je größer die Masse m des zweiten ist. Man kann jedoch eine Größe einführen, die bei gegebenem m_1 nur noch vom Ort im Schwerefeld abhängt. Sie kennzeichnet sozusagen, in welcher Weise ein Körper den Zustand des Raumes in seiner Umgebung verändert hat. Diese Größe ist die

Gravitationsfeldstärke \vec{G} . Man gewinnt sie, indem man die Gravitationskraft \vec{F} durch die Masse m des angezogenen Körpers teilt.

$$\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m}$$

\vec{G} ist ein Vektor mit der Richtung der Anziehungskraft \vec{F} und dem Betrag

$$G = F/m = \gamma m_1/r^2.$$

¹⁾ Zur Veranschaulichung denke man sich für die folgenden Betrachtungen als Körper der Masse m_1 z.B. die Erde.

²⁾ Bei homogenen Kugeln ist das der geometrische Mittelpunkt.

³⁾ Die Verhältnisse im Inneren eines Körpers sind komplizierter. Wir behandeln sie hier nicht.

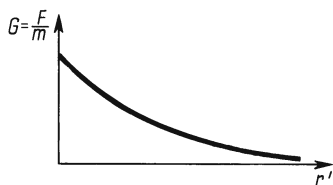


Bild 1.67 Gravitationsfeldstärke G als Funktion des Abstandes r' von der Oberfläche einer homogenen Kugel

Wie man sieht, ist G bei gegebenem m_1 nur noch eine Funktion des Ortes r . Bei einer homogenen Kugel mit dem Radius R ändert sich der Betrag G in der in Bild 1.67 gezeichneten Weise mit dem Abstand von der Oberfläche $r' = r - R$. Wie man sieht, geht G erst gegen Null, wenn r gegen unendlich geht. Die Meinung, eine Rakete könne „ein Schwerfeld verlassen“, z.B. das der Erde, ist demnach falsch. Man kann

höchstens sagen, eine Rakete verlässt den Bereich nennenswerter Anziehungskräfte oder Feldstärken; dieser ist natürlich nicht scharf begrenzt.

Interessant ist noch, dass auf der Erdoberfläche wegen $\vec{F} = m \vec{g}$ die Gravitationsfeldstärke $\vec{G} = \vec{F}/m = \vec{g}$, also gleich der Fallbeschleunigung wird. Trotz dieses Ergebnisses sind im Grunde genommen Feldstärke und Beschleunigung dem physikalischen Wesen nach verschieden. Die Feldstärke ist eine Größe, die den veränderten Zustand des Raumes in der Umgebung eines Körpers kennzeichnet. Sie ist also vor der Kraft da, die erst durch Mitwirkung eines zweiten Körpers entsteht. Dagegen wird die Beschleunigung ja erst wieder durch diese Kraft hervorgerufen.

1.4.3.2 Arbeit und potentielle Energie im Schwerfeld

Für Raketenstarts in größere Höhen kann man die Hubarbeit nicht mehr einfach als $W = F_G h$ berechnen, denn – wie wir oben sahen – nimmt die Gewichtskraft F_G außerhalb der Erde ja quadratisch mit der Entfernung vom Erdmittelpunkt ab. Das ist für Raumfahrer sehr erfreulich, denn so braucht man in größerer Entfernung von der Erde nicht mehr eine so große Arbeit aufzuwenden wie auf der Erdoberfläche, wenn man einen Körper gegen die Erdanziehungskraft um die gleiche Strecke heben will.

Hubarbeit. Wird ein Körper der Masse m in radialer Richtung um dr gehoben – auf der Erde ist das „senkrecht nach oben“ – so ist, da die Anziehungskraft \vec{F} auch die Richtung des Radius \vec{r} hat, $dW = F dr$. Berücksichtigt man die Abhängigkeit der Kraft \vec{F} von der Entfernung vom Massenmittelpunkt r und summiert man alle dW , so erhält man

$$W = \int_{r=r_1}^{r_2} dW = \int_{r=r_1}^{r_2} F dr = \int_{r=r_1}^{r_2} \gamma \frac{m_1 m}{r^2} dr = \gamma m_1 m \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr$$

Die Hubarbeit, die verrichtet wird, wenn ein Körper der Masse m im Schwerfeld des Körpers der Masse m_1 von r_1 nach r_2 gehoben wird (Bild 1.68), ist

$$W = \gamma m_1 m \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Auf der Erde ist an der Oberfläche $r_1 = R_E$, und in der Höhe h ist $r_2 = R_E + h$.

Auch wenn man den Körper nicht in Richtung des Radius, sondern auf einem anderen Wege (in Bild 1.68 s_2) von r_1 bis r_2 bringt, erhält man dasselbe Ergebnis. Die Kraft zeigt überall nur auf den Massenmittelpunkt, sodass von allen Wegstücken nur die radialen

Komponenten dr einen Beitrag liefern. Die Hubarbeit ist also von der Art des zurückgelegten Weges unabhängig.

Beispiel 15. Eine Rakete mit $m = 50$ t soll von der Erde aus in $h = 600$ km Höhe steigen. Wie groß ist die Hubarbeit?

$$W = \gamma m_E m \left[\frac{1}{R_E} - \frac{1}{R_E + h} \right] = 2,6 \cdot 10^{11} \text{ J}$$

(Bleibe die Gewichtskraft konstant, ergäbe sich mit $W = mgh$ etwa $3 \cdot 10^{11}$ J).

Potentielle Energie. Die Hubarbeit W wird als potentielle Energie W_{pot} gespeichert. Demnach hängt auch W_{pot} bei gegebenen Massen m_1 und m nur von r_1 und r_2 ab. In Bezug auf eine Kugelfläche mit dem Radius r_1 hat ein Körper auf einer anderen konzentrischen Kugelfläche mit dem Radius r_2 überall die gleiche potentielle Energie.

Man nennt daher solche Flächen auch Äquipotentialflächen, d.h. Flächen gleicher potentieller Energie bzw. gleichen Potentials (s. u.) (Bild 1.68).

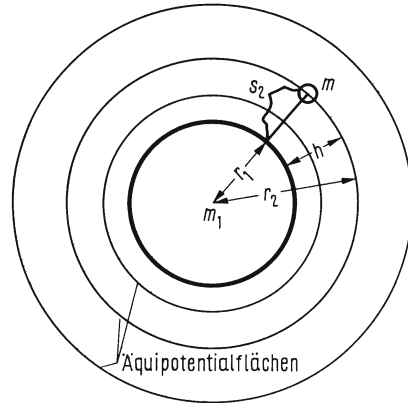


Bild 1.68 Zur Hubarbeit im Schwerefeld

$$\text{In Bezug auf } r_1 \text{ ist } W_{\text{pot}} = W = \gamma m_1 m \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Da es keine wirklich punktförmigen Körper gibt, kann r_1 niemals gleich Null werden. Diesen Fall braucht man bei der Berechnung von W_{pot} also nicht zu berücksichtigen. Dagegen ist es üblich, als Bezugsort für W_{pot} manchmal $r_1 = \infty$ zu wählen. Dann wird

$$W_{\text{pot}} = -\gamma m_1 m \frac{1}{r_2} \text{ in Bezug auf } r_1 = \infty$$

Das ist, wie man sich leicht ausrechnet, bis auf das Minuszeichen, genau die Arbeit, die man leisten muss, um den einen Körper im Schwerefeld des anderen aus der Entfernung r_2 unendlich weit weg zu bringen. Das negative Vorzeichen hat seinen Grund nur in der Wahl des unendlich weit entfernten Bezugsortes. Auch die potentielle Energie eines auf dem Fußboden liegenden Gegenstandes ist ja negativ, wenn man sie auf die Zimmerdecke bezieht.

Beispiel 16. An der Erdoberfläche hat ein Körper der Masse 1 kg in Bezug auf diese keine Lageenergie, in Bezug auf einen unendlich weit entfernten Punkt jedoch

$$W_{\text{pot}} = -\gamma m_E m \frac{1}{R_E} = -6,25 \cdot 10^{-7} \text{ J.}$$

Das entspricht der Arbeit, die erforderlich ist, um ihn von der Erdoberfläche unendlich weit zu entfernen. Übrigens können unsere Weltraumfahrer von Glück sagen, dass die Gravitationskraft mit $1/r^2$ und nicht mit $1/r$ abnimmt. Im letzten Fall wäre nämlich

$$W_{\text{pot}} = \int_{r_1}^{r_2} F dr = \text{const} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} dr = \text{const} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

Wollte man dann einen Körper von der Erde ($r_1 = R_E$) in den Weltraum ($r_2 = \infty$) befördern, müsste man eine unendlich große Arbeit leisten, da $\ln \infty = \infty$ ist.

1.4.3.3 Gravitationspotential

Wie die Gravitationskraft so hängt auch die potentielle Energie nicht nur vom Ort und der Masse m_1 des Körpers ab, der das Schwerefeld um sich herum aufgebaut hat, sondern auch noch von der Masse m des Körpers, der sich in diesem Kraftfeld an einer bestimmten Stelle befindet. Das heißt aber, dass man das Kraftfeld durch die Benutzung der potentiellen Energien nicht allgemein genug beschreiben kann.

Um wie bei Einführung der Feldstärke (vgl. Abschn. 1.4.3.1) eine Größe zu erhalten, die bei gegebener Masse m_1 nur noch vom Ort im Schwerefeld abhängt, teilt man die jeweilige potentielle Energie durch die Masse m des Körpers, der diese Energie besitzt, und erhält das sog. Gravitationspotential. Es gilt die

Definition: Der Quotient aus der potentiellen Energie eines Körpers und seiner Masse ist das Gravitationspotential φ_{Grav} .

$$\varphi_{\text{Grav}} = \frac{W_{\text{pot}}}{m}$$

In Bezug auf r_1 ist
$$\varphi_{\text{Grav}} = \gamma m_1 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

In Bezug auf $r_1 = \infty$ ist
$$\varphi_{\text{Grav}} = -\gamma m_1 \frac{1}{r_2}$$

In Bild 1.69 ist das auf $r_1 = \infty$ bezogene Gravitationspotential am Beispiel der Erde dargestellt. Die ausgezogenen Kurven zeigen φ_{Grav} als Funktion von r_2 .

Denkt man sich diese Kurven um die Ordinatenachse rotierend – wie es in Bild 1.69 angedeutet ist –, so erzeugen sie einen „Potentialtrichter“.

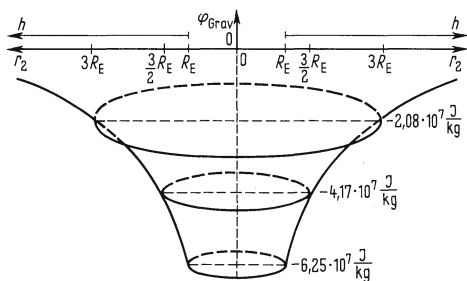


Bild 1.69 Potentialtrichter der Erde φ_{Grav} , bezogen auf ∞

$$\varphi_{\text{Grav}} = \frac{-\gamma m_E}{r_2}$$

Wir Erdbewohner sitzen, sozusagen, normalerweise am Boden dieses Trichters (bei $r_2 = R_E$). Wollen wir uns in größere Höhen $h = r_2 - R_E$ begeben, so müssen wir uns an der Wand dieses Trichters hinaufbewegen, um die zugehörigen Potentialdifferenzen zu überwinden. Die Hubarbeit, die wir dabei verrichten müssen, erhalten wir sehr einfach, indem wir die entsprechenden Potentialdifferenzen $\Delta\varphi_{\text{Grav}}$ mit der Masse des Körpers multiplizieren, den wir transportieren wollen.

$$W = \Delta\varphi_{\text{Grav}} m$$

Beispiel 17. Um einen Körper mit der Masse $m = 10^3$ kg von der Erdoberfläche ($r_2 = R_E$) in eine Höhe zu heben, die dem halben Erdradius entspricht ($r_2 = 3 R_E/2$), müssen wir die Potentialdifferenz $\Delta\varphi_{\text{Grav}} = -4,17 \cdot 10^{-7} \text{ J/kg} - (-6,25 \cdot 10^7 \text{ J/kg}) = 2,08 \cdot 10^7 \text{ J/kg}$ überwinden und die Arbeit $W = \Delta\varphi_{\text{Grav}} m = (2,08 \cdot 10^7 \text{ J/kg}) \cdot 10^3 \text{ kg} = 2,08 \cdot 10^{10} \text{ J}$ aufwenden.

Anwendungen. Die Anziehungskraft des Mondes bewirkt auf der sich drehenden Erde Ebbe und Flut, die sogenannten Gezeiten. An manchen Küsten wandeln Gezeitenkraftwerke die dabei geleistete Hubarbeit in elektrische Energie um. Erz-, Salz- oder Öllagerstätten bewirken durch ihre verschiedene Dichte geringfügige Änderungen der Schwerkraft an der Erdoberfläche. Auf dieser Tatsache beruht ein wichtiges Messverfahren der Geophysik, die Gravimetrie, zum Auffinden solcher Bodenschätze.

Aufgaben zu Abschn. 1.4

1. In welcher Entfernung vom Erdmittelpunkt wird zwischen Erde und Mond ein Raumschiff schwerelos? (Abstand Erdmittelpunkt–Mondmittelpunkt gleich 60 Erdradien; Masse des Mondes = $(1/81)$ Erdmasse; Erdradius = 6380 km.)
2. Welche Anziehungskraft übt die Erde auf einen Körper der Masse 1 kg auf dem Mond, welche der Mond auf einen gleichen Körper auf der Erde aus? (Durchmesser vernachlässigen.)
3. a) Man zeichne ein Diagramm, in dem die Fallbeschleunigung (Ordinate) als Funktion der Höhe über der Erdoberfläche (Abszisse) bis 5000 km aufgetragen wird.
- b) In einem entsprechenden Diagramm trage man als Ordinate die potentielle Energie eines Körpers der Masse 1 kg bezogen auf die Erdoberfläche auf.
4. Ein Raumfahrer hat sich 2 m von einer kugelförmigen Raumstation mit 20 m Durchmesser und der Masse $2 \cdot 10^6$ kg entfernt. Wie lange würde es dauern, bis er nur durch die Gravitationskraft wieder auf der Station angekommen wäre? (Es sei eine konstante mittlere Fallbeschleunigung angenommen).
5. Welche Anfangsgeschwindigkeit braucht ein Geschoss, um von der Erde in den Weltraum ($r \rightarrow \infty$) zu gelangen?

1.5 Dynamik der Drehbewegungen

In diesem Abschnitt gehen wir über die bloße Beschreibung von Drehbewegungen (Abschn. 1.2) hinaus und untersuchen ihre Ursachen. Wir tun das in zwei Schritten. Zunächst nehmen wir an, die gesamte Masse eines sich auf einer Kreisbahn bewegenden Körpers sei in einem Punkt vereinigt, wir benutzen also das Modell des sog. Massenpunktes. Danach stellen wir auch die Ausdehnung eines sich drehenden Körpers in Rechnung. Dazu werden wir das Modell des sog. starren Körpers verwenden.

1.5.1 Massenpunkt

Für die folgenden Betrachtungen denken wir uns die Körper als Massenpunkte. (Vgl. Abschn. 1.3.2.3)

1.5.1.1 Zentripetalkraft und Zentrifugalkraft

□ **Versuch 10** (Bild 1.70). Eine Kugel 1 wird an einem Faden 2 unter Einschaltung eines Kraftmessers 3 mit der Hand 4 gleichförmig im Kreise herumgeschwungen. Der Kraftmesser zeigt eine im Faden wirkende Kraft an, die umso größer ist, je schneller die Kugel bewegt wird. Der Faden und damit die Kraft zeigen nicht genau auf den Kreismittelpunkt. Man muss mit leicht kreisender Handbewegung immer etwas schräg nach vorn ziehen. □

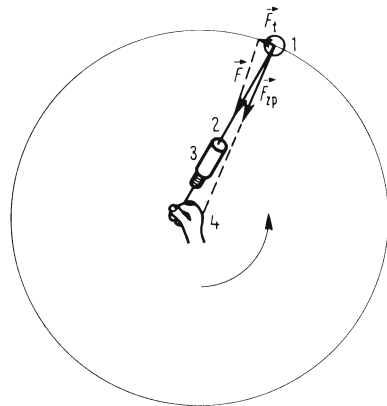


Bild 1.70 Kräfte bei der Kreisbewegung

Zur Erklärung des Versuches 10 zerlegen wir die Kraft \vec{F} in eine tangentielle und eine radiale Komponente, \vec{F}_t und \vec{F}_{zp} . Die Tangentialkraft \vec{F}_t dient zur Kompensation der Luftreibungskraft \vec{F}_R , welche die Kugel auf ihrer Bahn erfährt. Wird \vec{F}_t größer als \vec{F}_R , wird die Kugel tangential beschleunigt.

Das Auftreten der viel größeren Radialkraft \vec{F}_{zp} verstehen wir, wenn wir uns an das erste Newtonsche Axiom erinnern (vgl. Abschn. 1.3.1). Danach wirkt nur solange keine äußere Kraft auf einen Körper, wie er in Ruhe oder in geradlinig gleichförmiger Bewegung ist.

Auf eine Kreisbahn muss er also auch bei konstantem Betrag der Bahngeschwindigkeit ständig durch eine Kraft gezwungen werden. Wie wir aus Abschn. 1.2.1.2 wissen, erfährt der Körper dabei die Radialbeschleunigung $a_r = v^2/r = \omega^2 r$, die nur die Änderung der Richtung, nicht jedoch die Änderung des Betrages der Bahngeschwindigkeit \vec{v} hervorruft.

Die Ursache für die Radialbeschleunigung \vec{a}_r ist die Zentripetalkraft¹⁾ $F_{zp} = m \vec{a}_r$ mit dem Betrag $F_{zp} = m v^2/r = m \omega^2 r$. Sie greift an dem Körper an, der auf die Kreisbahn gezwungen wird.

Lassen wir in Versuch 10 den Körper los, so fliegt er in Richtung seiner momentanen Bahngeschwindigkeit in tangentialer Richtung weg (vgl. z.B. auch Funken am Schleifstein.)

Zu jeder Kraft gehört nach dem dritten Newtonschen Axiom eine Gegenkraft. Man spürt sie in unserem Versuch an der im Zentrum befindlichen Hand. Sie entsteht durch die Trägheit der Kugel, ist also eine Trägheitskraft (vgl. Abschn. 1.3.3.3). Ihre Radialkomponente muss der an der Kugel angreifenden Zentripetalkraft entgegengesetzt gleich sein. Da man durch sie an der Hand den Eindruck hat, der Körper zöge nach außen, würde also das Zentrum fliehen, bekommt sie den Namen Fliehkraft oder Zentrifugalkraft¹⁾ \vec{F}_{zf} .

Die Zentrifugalkraft \vec{F}_{zf} ist die Gegenkraft zur Zentripetalkraft \vec{F}_{zp} . Daher gilt $\vec{F}_{zf} = -\vec{F}_{zp}$.

In Versuch 10 ist die Person, welche die Kugel im Kreis herumschleudert, ein äußerer Beobachter. Sie spürt deutlich, dass die Zentrifugalkraft an ihrer Hand und nicht an der Kugel angreift. Darum gilt:

Vom äußeren Beobachter aus betrachtet greift die Zentrifugalkraft \vec{F}_{zf} nicht an dem Körper an, der auf die Kreisbahn gezwungen wird.

Versetzen wir uns jedoch in die Lage eines Astronauten, der mit seinem Raumschiff die Erde umkreist, so ist eine andere Betrachtungsweise zweckmäßig; denn der Astronaut ist ein mit seinem Raumschiff radial mitbeschleunigter Beobachter. Für ihn erscheint das Raumschiff in Ruhe. Also muss er, wie in Abschn. 1.3.3.4 beschrieben, schließen, dass die von der Erde aus wirkende Gravitationskraft durch eine gleich große, entgegengesetzt gerichtete Kraft kompensiert wird. Es gilt deshalb:

¹⁾ Lat. petere = zu erreichen suchen; lat. fugare = fliehen.

Für den mitbeschleunigten Beobachter greift auch die Zentrifugalkraft an dem auf der Kreisbahn bewegten Körper an.

Zur Angabe des Angriffspunktes der Zentrifugalkraft gehört daher stets die Angabe des Beobachterstandpunktes. Welcher Standpunkt der zweckmäßigere ist, hängt vom jeweiligen Problem ab. (Vgl. auch die Abschn. 1.3.3.3 und 1.3.3.4).

Beispiele 18. Die Schaufel einer Dampfturbine bewegt sich auf dem Umfang des Laufrades mit 1 m Halbmesser mit der Drehzahl 3000 min^{-1} . Wie viel mal größer als ihre Gewichtskraft muss die Zentripetalkraft sein, die die Schaufel auf ihre Kreisbahn zwingt?

$$\frac{F_{zp}}{F_G} = \frac{m \omega^2 r}{mg} = \frac{\omega^2 r}{g} = \frac{4\pi^2 n^2 r}{g} = \frac{4\pi^2 \cdot 2500 \cdot 1 \text{ ms}^2}{s^2 \cdot 9,81 \text{ m}} = 10\,000$$

Alle Befestigungen müssen also die 10 000fache Gewichtskraft der Schaufel übertragen können!

19. In einer Trockenschleuder rotiert die Wäsche so schnell, dass die Kräfte, die die Wassertröpfchen im Gewebe festhalten, nicht mehr ausreichen, um für sie die Zentripetalkraft aufzubringen. Die Wassertröpfchen fliegen in tangentialer Richtung aus der Wäsche heraus.

20. Ein Auto kann nur deshalb eine Kurve durchfahren, weil die Haftreibungskraft zwischen Straße und Rädern die erforderliche Zentripetalkraft liefert. Da diese quadratisch mit der Bahngeschwindigkeit v anwächst, $F_{zp} = mv^2/r$, kann es geschehen, dass die Haftreibungskraft bei zu schneller Fahrt nicht mehr ausreicht und das Auto sich geradlinig weiterbewegt. Es wird nicht etwa durch die Fliehkraft aus der Kurve „hinausgetragen“, wie oft fälschlich angenommen wird, denn die Fliehkraft greift ja, vom äußeren Beobachter aus gesehen, nicht am Auto, sondern als Reaktionskraft auf die Zentripetalkraft an der Straße an.

21. Wegen der Erddrehung wird ein kleiner Teil der Gravitationskraft dazu benutzt, um die Zentripetalkraft für die rotierende Erdmasse zu liefern (s. Aufgabe 1 zu Abschn. 1.5.1). Nach den Polen zu nimmt dieser Teil wegen des kleineren effektiven Radius ab und verschwindet dort. Das ist die Ursache für die Abplattung der Erde an den Polen.

Anwendungen. Siehe die folgenden Aufgaben.

Aufgaben zu Abschn. 1.5.1

- a) Wie viel Prozent der Gravitationskraft werden am Äquator der Erde als Zentripetalkraft benötigt?

b) Man berechne die Gravitationskraft auf einen Körper der Masse 1 kg an den Polen. Dabei werde die Erde als Kugel und die resultierende Gewichtskraft (gleich Gravitationskraft minus senkrechter Komponente der Zentripetalkraft) in 45° Breite zu 9,81 N angenommen.
- Wie schnell muss ein „Steilwandfahrer“ an der Innenwand eines senkrecht stehenden Zylinders mit 10 m Durchmesser mindestens fahren, um nicht herabzufallen? ($\mu_r = 0,2$).
- Welchen Winkel schließen die beiden 20 cm langen Pendel eines Fliehkraftreglers (Bild 1.71)

ein, der sich mit 90 Umdrehungen pro Minute dreht? (Die Masse der Pendelstangen werde vernachlässigt.) – Die Abhängigkeit der Höhe des mit den Pendeln verbundenen Schiebers 1 von der Drehzahl kann man z.B. zum Verstellen der Drosselklappe eines Vergasermotors und damit zur Drehzahlregelung benutzen.

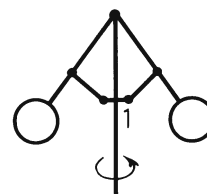


Bild 1.71 Fliehkraftregler

4. Welche Neigung gegen die Waagerechte muss eine Kurve mit 800 m Radius haben, damit sie von einem Motorrad mit 100 km/h sicher durchfahren werden kann? Die Resultierende aus Gewichtskraft und Fliehkraft soll dabei senkrecht auf der Straßenoberfläche stehen.

5. Eine Bremsstrommel dreht sich an einer waagerechten Achse. Sie soll von innen mit Wasser gekühlt werden. Ab welcher Drehzahl haftet das Kühlwasser ringförmig an der Innenwand mit 50 cm Durchmesser?

1.5.2 Starrer Körper

Zur Beschreibung von Bewegungen, bei denen ein Körper sich um seine eigene Achse dreht, reicht das Modell des Massenpunktes, das wir bisher benutzten, nicht mehr aus. Wir erweitern daher unser Modell zu dem des sog. starren Körpers.

Einen starren Körper denken wir uns aus vielen einzelnen Massenpunkten zusammengesetzt, die ihre Lage gegeneinander unverändert beibehalten, gleichgültig, welchen Einflüssen der Körper unterliegt.

Wir sehen dabei also von Verformungen vollständig ab. Die Benutzung von derartigen Modellvorstellungen wie der des Massenpunktes oder des starren Körpers ist oft die einzige Möglichkeit, komplizierte Vorgänge mit vernünftigem Rechenaufwand zu behandeln. Man kann mit ihrer Hilfe im Allgemeinen so viel erfassen, dass weitere Einflüsse, wie z.B. geringfügige Verformungen eines wirklichen Körpers, der von unseren Modellvorstellungen abweicht (Zahnrad, Propeller oder dgl.), durch eine relativ einfache Korrekturrechnung oder experimentell ermittelt werden können. Meist kommt man jedoch mit den Modellen allein aus.

1.5.2.1 Energie eines rotierenden starren Körpers. Massenträgheitsmoment

Zur Berechnung der Bewegungsenergie, die in einem rotierenden starren Körper steckt, benutzen wir Bild 1.72. Der dort gezeichnete Körper rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die Drehachse D (senkrecht zur Bildebene).

Von allen Massenpunkten sind nur fünf mit den Masselementen Δm_1 bis Δm_5 eingezeichnet. Ihre Abstände zur Drehachse sind r_1 bis r_5 . Den ganzen Körper denken wir uns aus N einzelnen Massenpunkten zusammengesetzt. Die Bewegungsenergie eines Massenpunktes Δm_i auf seiner Kreisbahn um D ist

$$\Delta W_i = \frac{1}{2} \Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \Delta m_i (r_i \omega)^2 \quad (\text{wegen } v = r\omega)$$

Dann ist die gesamte Bewegungsenergie

$$W_{\text{kin}} = \sum_{i=1}^N \Delta W_i = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \Delta m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \Delta m_i r_i^2 \omega^2$$

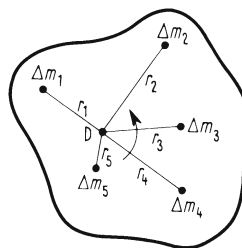


Bild 1.72 Zur Definition des Massenträgheitsmomentes

Die allen Summanden gemeinsamen Faktoren $1/2$ und ω^2 kann man ausklammern und erhält

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^N r_i^2 \Delta m_i$$

Die Summe $\sum_{i=1}^N r_i^2 \Delta m_i$ ist nur von der Massenverteilung des Körpers in Bezug auf seine Drehachse abhängig. Sie ist also eine charakteristische Konstante, die neben der Winkelgeschwindigkeit den Energieinhalt bestimmt. Man gibt ihr daher einen eigenen Namen, nämlich Massenträgheitsmoment.

Definition: Ein Körper aus N Massenelementen Δm_i mit den Abständen r_i von der Drehachse hat in Bezug auf diese das Massenträgheitsmoment

$$J = \sum_{i=1}^N r_i^2 \Delta m_i$$

Bei kontinuierlicher Massenverteilung ist

$$J = \lim_{\substack{\Delta m_i \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^N r_i^2 \Delta m_i = \int_0^{m_{\text{Gesamt}}} r^2 dm \quad 1)$$

Bei homogenen Körpern mit der Dichte ρ und dem Volumen V gilt

$$J = \int_0^{m_{\text{Gesamt}}} \rho r^2 dV$$

Das Massenträgheitsmoment hängt nicht nur von der Gesamtmasse des Körpers, sondern auch von dessen Form und der Lage der Drehachse ab.

Damit wird die

Bewegungsenergie eines rotierenden Körpers, die sog. Rotationsenergie

$$W_{\text{rot}} = \frac{1}{2} J \omega^2$$

Vergleicht man diese Formel mit derjenigen für die Bewegungsenergie eines Körpers mit der trägen Masse m , der sich mit der Bahngeschwindigkeit v bewegt, der sog. „Translationsenergie“, $W_{\text{kin}} = (1/2) m v^2$ und setzt die Winkelgeschwindigkeit ω in Analogie zur Bahngeschwindigkeit v , so sieht man, dass bei den Drehbewegungen das Massenträgheitsmoment J die Rolle spielt, die bei der Bahnbewegung die träge Masse m inne hat. Daher wird auch der (nicht besonders glücklich gewählte) Name verständlich.

¹⁾ Siehe z.B. [1].

Anwendungen. In Pressen und Stanzen wird Rotationsenergie gespeichert, die beim Arbeitsvorgang in Verformungsarbeit umgewandelt wird. Das Schwungrad in Dampfturbinen und Verbrennungsmotoren speichert Energie und sorgt dadurch für eine gleichmäßige Arbeitsabgabe trotz impulsartiger Energiezufuhr. Spielzeugautos fahren vielfach mit Rotationsenergie.

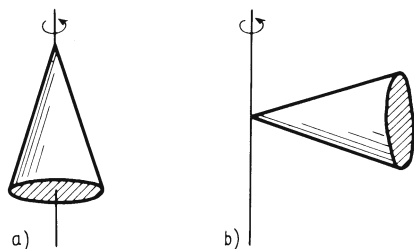


Bild 1.73 Unterschiedliche Massenträgheitsmomente eines Körpers bei Rotation um verschiedene Achsen

Ein Körper hat je nach Lage der Achse, um die er rotiert, verschiedene Massenträgheitsmomente. Bild 1.73 zeigt z.B. zwei Fälle. Im Fall a) befinden sich alle Massenelemente relativ dicht an der Drehachse, im Fall b) sind sie im Mittel viel weiter von ihr entfernt und haben also auch viel größere Bahngeschwindigkeiten. Der Inhalt an Bewegungsenergie muss in Fall b) bei gleicher Winkelgeschwindigkeit ω demnach viel größer sein und derselbe Körper muss hier ein viel größeres Massenträgheitsmoment besitzen.

Man muss bei der Angabe des Massenträgheitsmomentes für einen Körper immer die Lage der Drehachse angeben, für die es gelten soll.

Häufig berechnet¹⁾ man Massenträgheitsmomente in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt gehende Achse. Bild 1.74 zeigt fünf Beispiele.

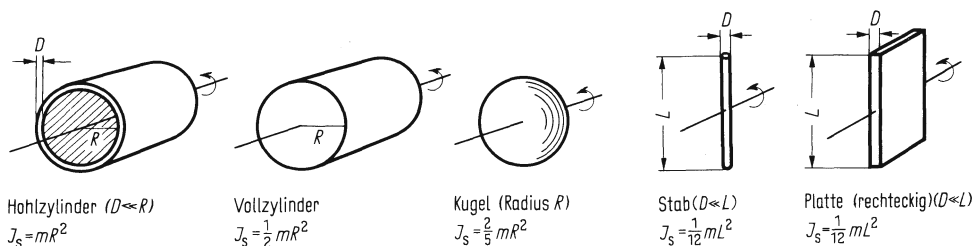


Bild 1.74 Massenträgheitsmomente verschiedener Körper in Bezug auf Schwerpunktsachsen

Hauptträgheitsachsen, Hauptträgheitsmomente

Bestimmt man experimentell die Massenträgheitsmomente eines starren Körpers in Bezug auf beliebige Schwerpunktsachsen, so findet man im Allgemeinen, dass der Körper in Bezug auf eine dieser Achsen sein größtes und in Bezug auf eine andere sein kleinstes Massenträgheitsmoment besitzt²⁾. In Bild 1.75 z.B. sind dies die mit y und z bezeichneten Achsen. Erstaunlicherweise stehen diese beiden Schwerpunktsachsen immer senkrecht aufeinander.

¹⁾ Siehe z.B. [1].

²⁾ Es gibt Ausnahmen, z.B. Kugeln.

Man nennt die aufeinander senkrecht stehenden Schwerpunktsachsen mit dem größten und kleinsten Massenträgheitsmoment sowie eine auf diesen beiden senkrecht stehende dritte Achse mit einem mittleren Massenträgheitsmoment Hauptträgheitsachsen und die zugehörigen Massenträgheitsmomente Hauptträgheitsmomente.

Die Translationsbewegung eines Körpers lässt sich in drei gleichzeitige, voneinander unabhängige Bewegungen in drei zueinander senkrechten Richtungen zerlegen (vgl. Abschn. 1.1.4.1). Wie hier nicht bewiesen werden soll, gilt entsprechend:

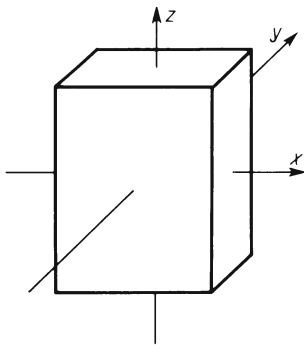


Bild 1.75 Hauptträgheitsachsen; $J_y = J_{\max}$; $J_z = J_{\min}$

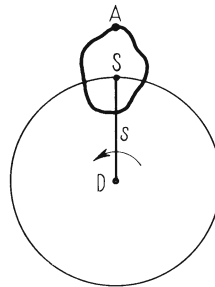


Bild 1.76 Zum Steinerschen Satz

Die Rotation eines starren Körpers um eine beliebige Schwerpunktschse lässt sich als Überlagerung dreier gleichzeitiger, voneinander unabhängiger Rotationen um die drei Hauptträgheitsachsen darstellen. In Bezug auf andere, senkrecht aufeinander stehende Achsen ist dies nicht möglich.

Die Winkelgeschwindigkeit eines um eine beliebige Schwerpunktschse rotierenden starren Körpers ist z.B.

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_x + \vec{\omega}_y + \vec{\omega}_z$$

Steinerscher Satz. Wenn man das Massenträgheitsmoment in Bezug auf eine Schwerpunktschse kennt, kann man auf einfache Weise auch dasjenige in Bezug auf eine beliebige andere Achse berechnen, die der Schwerpunktschse parallel liegt. Wir betrachten dazu Bild 1.76. Der dort gezeichnete Körper rotiert um die Drehachse D, die einer durch den Schwerpunkt S gehenden Achse parallel ist. In Bezug auf die Schwerpunktschse sei das Massenträgheitsmoment J_s bekannt. D soll von S den Abstand s haben.

Wir berechnen die gesamte Bewegungsenergie des Körpers. Dazu denken wir uns vorübergehend im Punkte S ein Gelenk, sodass der Körper während der Rotation um D sich nicht gleichzeitig um sich selbst dreht. – Der Punkt A soll immer oben bleiben. – Dann können wir uns den Körper als Massenpunkt mit der Masse m denken, und seine Bewegungsenergie ist $(1/2)mv^2$, wobei $v = s\omega$ die für alle Massenelemente des Körpers gleiche Bahngeschwindigkeit auf ihren Bahnen mit gleichem Radius ist.

Im Allgemeinen befindet sich in S jedoch kein Gelenk. Also dreht sich der Körper in der gleichen Zeit einmal um seinen Schwerpunkt, während dieser eine volle Umdrehung um D vollführt. Die Winkelgeschwindigkeit des Schwerpunktes um D und die des Körpers um S sind also einander gleich. Die

Gesamtenergie vermehrt sich somit um die Rotationsenergie des sich um S drehenden Körpers, $(1/2) J_s \omega^2$. Also wird

$$W = \frac{1}{2} J_s \omega^2 + \frac{1}{2} m v^2$$

Mit $v = s\omega$ ergibt sich

$$W = \frac{1}{2} J_s \omega^2 + \frac{1}{2} m s^2 \omega^2 = \frac{1}{2} (J_s + m s^2) \omega^2$$

und

$$W = \frac{1}{2} J \omega^2 \quad \text{mit} \quad J_s = J_s + m s^2$$

Rotiert ein Körper um eine Achse, die parallel zu einer Schwerpunktsachse und von dieser um die Strecke s entfernt liegt, so ist das Massenträgheitsmoment J in Bezug auf diese Achse gleich demjenigen in Bezug auf die entsprechende Schwerpunktsachse J_s , vermehrt um das Produkt aus der Masse m des Körpers und dem Quadrat des Abstandes s beider Achsen.

$$J = J_s + m s^2 \quad \text{Steinerscher Satz}$$

Beispiel 22. Ein Vollzylinder mit der Masse m und dem Radius R rotiert um eine Mantellinie. Dann ist $J = J_s + m R^2 = (1/2) m R^2 + m R^2 = (3/2) m R^2$.

Aufgaben zu Abschn. 1.5.2.1

- Bei einer Presse wird in einem Schwungrad Rotationsenergie gespeichert, die als Verformungsarbeit abgegeben wird. Welche Masse muss man einem ringförmigen Schwungrad mit 1 m Durchmesser geben, damit es bei 2 Umdrehungen pro Sekunde die Energie 400 J enthält? (Die Speichen werden vernachlässigt.)
- Kugeln rollen auf einer schiefen Ebene bis in die Höhe 70 cm. Welche Schwerpunktgeschwindigkeit müssen sie am Anfang haben?
- Eine Kugel und ein Vollzylinder mit gleichem Radius und gleicher Masse rollen aus gleicher Höhe eine schiefe Ebene herunter. Welcher Körper kommt eher unten an?
- Ein Spielzeugauto mit der Gesamtmasse 200 g soll mit seinem Schwungradantrieb die waagerechte Strecke 5 m zurücklegen ($\mu_R = 0,05$). Mit welcher Anfangsdrehzahl muss sich das Schwungrad (Vollscheibe mit der Masse 50 g und 4 cm Durchmesser) drehen? Die Translationsenergie des Autos kann vernachlässigt werden.

1.5.2.2 Drehmoment

Ein starrer Körper ist um eine durch Punkt D gehende Achse mit festen Lagern drehbar gelagert (Bild 1.77a). Lässt man eine Kraft \vec{F} so angreifen, dass die Verlängerung ihrer Richtung über den Angriffspunkt A hinaus, ihre „Wirkungslinie“, senkrecht durch die Drehachse geht, so kann man erfahrungsgemäß den Körper nicht drehen. Das gelingt erst, wenn die Kraft \vec{F} schräg zu der in Bild 1.77b mit \vec{r} bezeichneten Verbindungsstrecke vom Drehpunkt zum Angriffspunkt zieht. Man kann jetzt die Kraft \vec{F} in eine Komponente parallel zur Drehachse, die „Axialkomponente“ \vec{F}_A , und eine in der Drehebene liegende Komponente \vec{F}_E zerlegen. \vec{F}_A bewirkt wegen der festen Lager keine Drehung. \vec{F}_E besitzt jedoch eine Komponente \vec{F}_M , senkrecht zum „Radiusvektor“ \vec{r} , die den Körper in Drehung versetzt, während die Komponente \vec{F}_T nur Querkräfte auf die festen Lager ausübt, die hier nicht interessieren. Erfahrungsgemäß kann man einen Körper umso leichter drehen, je wei-

ter außen man zieht, d.h. je größer r ist, und je größer die wirksame Kraftkomponente $F_M = F_E \sin(\sphericalangle \vec{r}; \vec{F}_E)^{1)}$ ist. Es hat sich deshalb als zweckmäßig erwiesen, für das Produkt rF_M eine eigene Größe, das Drehmoment \vec{M} , einzuführen. Man benutzt es gleichzeitig zur Angabe der durch \vec{F}_M hervorgerufenen Winkelbeschleunigung. Das Drehmoment beschreibt man deshalb zweckmäßigerweise durch einen Vektor \vec{M} , der senkrecht auf der Drehebene steht und dessen Richtung durch die sog. Rechtsschraubenregel bestimmt ist (s. unten). Da dieser Vektor die Richtung der Drehachse hat, nennt man ihn axiales Drehmoment.

Ein Drehmoment entsteht stets durch ein Kräftepaar (vgl. Abschn. 1.5.3.7). Hier wird die zweite Kraft, die gleich groß wie \vec{F}_E , aber dieser entgegengesetzt gerichtet ist, durch die Lager aufgebracht. Zusammengefasst ergibt sich die

Definition: Das Drehmoment \vec{M} kennzeichnet ein Paar von gleich großen Kräften \vec{F}_E und $-\vec{F}_E$, die an einem starren Körper im Abstand des sog. Radiusvektors \vec{r} voneinander in entgegengesetzten Richtungen angreifen. \vec{M} ist ein Vektor, dessen Richtung durch die Rechtsschraubenregel festgelegt ist, d.h., er hat die Richtung, in der sich eine Schraube mit Rechtsgewinde vorwärts bewegt, wenn man sie so dreht, dass man auf dem kürzesten Wege aus der Richtung von \vec{r} in die Richtung von \vec{F}_E gelangt (Bild 1.78). Sein Betrag M ist das Produkt aus dem Betrag des Radiusvektors \vec{r} und dem Betrag der wirksamen Kraftkomponente \vec{F}_M der in der Drehebene liegenden Kraft \vec{F}_E .

$$M = rF_M = rF_E \sin(\sphericalangle \vec{r}; \vec{F}_E)$$

In der Sprache der Vektorrechnung entspricht diese Definition der Bildung des sog. „vektoriellen Produktes“ aus \vec{r} und \vec{F}_E .

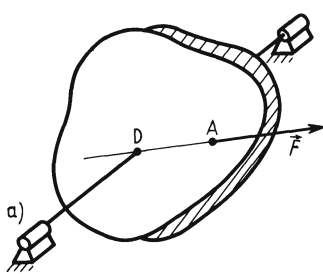


Bild 1.77 Zur Definition des Drehmomentes

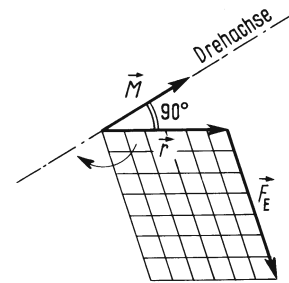
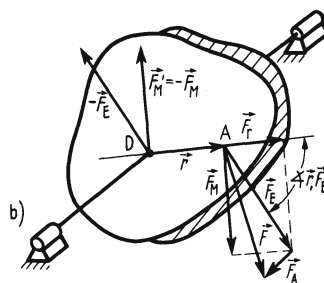


Bild 1.78 Zur Definition des Drehmomentes

Das axiale Drehmoment \vec{M} ist das vektorielle Produkt aus Radiusvektor \vec{r} und Kraft \vec{F}_E in der Drehebene

$$M = r \times F_E^{2)}$$

¹⁾ $\sin(180^\circ - \gamma) = \sin \gamma$. Welcher Winkel zwischen den Richtungen von \vec{r} und \vec{F}_E gewählt wird, ist also gleichgültig.

²⁾ Siehe z.B. [1].

Wirkung eines Drehmomentes

□ **Versuch 11** (Bild 1.79). Ein Rad 1 ist um eine Achse, die durch den Mittelpunkt D geht, drehbar gelagert. Es trägt eine Scheibe 2, auf die ein Faden 3 gewickelt ist, an dem ein Gewichtstück 4 mit der Masse m_G hängt. Gibt man dieses frei, so wirkt im Faden die Kraft $\vec{F} = m_G (\vec{g} - \vec{a})$, welche am Umfang der Scheibe ein konstantes Drehmoment $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ erzeugt. Das Rad vollführt eine beschleunigte Drehbewegung. □

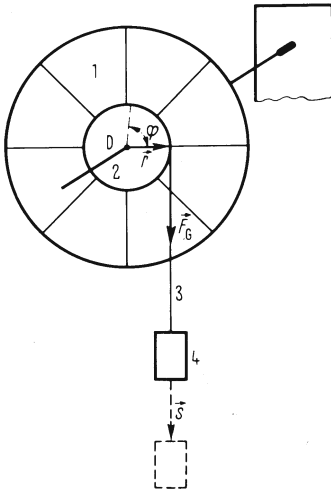


Bild 1.79 Winkelbeschleunigung und Arbeit bei Drehbewegungen

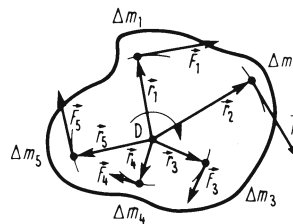


Bild 1.80 Drehmoment und Winkelbeschleunigung

Wir interessieren uns jetzt für den Zusammenhang zwischen dem Drehmoment \vec{M} und der Winkelbeschleunigung $\vec{\alpha}$, die durch \vec{M} verursacht wird. Zu diesem Zweck betrachten wir Bild 1.80. Der dort gezeichnete starre Körper soll die Winkelbeschleunigung $\vec{\alpha}$ erfahren. Dazu müssen seine sämtlichen Massenpunkte Δm_1 bis Δm_N , von denen nur fünf herausgezeichnet sind, die Bahnbeschleunigungen \vec{a}_1 bis \vec{a}_N erhalten. Diese werden durch die jeweils senkrecht auf den Radiusvektoren \vec{r}_1 und \vec{r}_N an den Massenpunkten angreifenden Kräfte \vec{F}_1 bis \vec{F}_N hervorgerufen. Es entstehen also auch N Drehmomente mit den Beträgen $r_1 F_1$ bis $r_N F_N$, die alle die gleiche Richtung haben. Man kann sie daher zu einem einzigen Drehmoment mit dem Betrag

$$M = r_1 F_1 + r_2 F_2 + \dots + r_N F_N$$

zusammenfassen. Daraus folgt

$$M = \sum_{i=1}^N r_i F_i = \sum_{i=1}^N r_i \Delta m_i a_i$$

und wegen $a = \alpha r$ (vgl. Abschn. 1.2.2)

$$M = \sum r_i \Delta m_i \alpha r_i = \alpha \sum r_i^2 \Delta m_i$$

Die Summe über alle $r_i^2 \Delta m_i$ ist aber bekanntlich das Massenträgheitsmoment J des Körpers. Also ist $M = \alpha J$. Berücksichtigt man außerdem noch, dass \vec{M} und $\vec{\alpha}$ nach der Rechtsschraubenregel die gleiche Richtung haben, so ergibt sich die

Dynamische Grundgleichung für Drehbewegungen:

Drehmoment = Massenträgheitsmoment \times Winkelbeschleunigung

$$\vec{M} = J\vec{\alpha} \quad (1.40)$$

Beispiel 23. In Versuch 11 (Bild 1.79) zieht die Kraft 20 N an dem Rad senkrecht zum konstanten Radius $r = 8$ cm. Es entsteht die Winkelbeschleunigung $20/s^2$. Wie groß ist das Massenträgheitsmoment des Rades?

Es gilt $M = rF = J\alpha$. Also

$$J = \frac{rF}{\alpha} = \frac{8 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot 20 \text{ N s}^2}{20} = 8 \cdot 10^{-2} \text{ N ms}^2 = 8 \cdot 10^{-2} \text{ kgm}$$

Haben zwei am gleichen Körper wirkende Drehmomente entgegengesetzte Richtungen, so heben sie sich teilweise auf. Sind außerdem ihre Beträge noch gleich, so ist das resultierende Drehmoment gleich Null, und ein ruhender Körper wird nicht gedreht. Er befindet sich im statischen Gleichgewicht. Verallgemeinert man diese Überlegung auf mehrere Drehmomente, so ergibt sich:

Ist ein Körper im statischen Gleichgewicht, so ist die Vektorsumme aller Drehmomente gleich Null.

1.5.2.3 Arbeit und Leistung bei Drehbewegungen

In Versuch 11 (Bild 1.79) wird das Rad aus der Ruhe heraus in beschleunigte Drehung versetzt. Nach der Zeit t enthält es die Rotationsenergie $(1/2)J\omega^2$. Diese ist nach dem Energiesatz gleich der Arbeit, welche die Kraft \vec{F} längs des in der Zeit t zurückgelegten Weges \vec{s} geleistet hat. Sie ist $W = Fs$. Das Rad hat sich in dieser Zeit um den Winkel φ gedreht. Also ist $s = r\varphi$. Damit wird wegen $Fr = M$

Arbeit = Drehmoment \times überstrichener Winkel

$$W = M\varphi \quad \text{bei} \quad M = \text{const}$$

Dass diese Arbeit gleich der Rotationsenergie $(1/2)J\omega^2$ ist, lässt sich leicht zeigen. Denn es ist

$$M = J\alpha \quad \text{und} \quad \varphi = (1/2)\alpha t^2. \quad \text{Also ist} \quad W = M\varphi = J\alpha(1/2)\alpha t^2 = (1/2)J\alpha^2 t^2 = (1/2)J\omega^2.$$

Hängt das Drehmoment von der Zeit und damit vom jeweils erreichten Drehwinkel ab, so wird

$$W = \int_{W_0}^{W_1} dW = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} M d\varphi$$

Hierbei ist W_0 die Rotationsenergie des Körpers vor, W_1 diejenige nach der Beschleunigung und $\varphi_1 - \varphi_0$ der überstrichene Drehwinkel.

¹⁾ Im Allgemeinen Fall können \vec{M} und $\vec{\alpha}$ auch verschiedene Richtungen haben, s. z.B. Abschn. 1.5.3.3.

Nach Abschn. 1.3.4.3 erhält man die Momentanleistung, wenn man den Quotienten aus der in einem Zeitintervall dt geleisteten Arbeit dW und diesem Zeitintervall bildet. Das liefert uns hier unter Annahme eines während dt konstanten Drehmomentes M

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{M d\varphi}{dt} = M \omega$$

Leistung = Drehmoment \times Winkelgeschwindigkeit

$$P = M \omega$$

Diese Gleichung ist wichtig für die Berechnung der Leistung von Motoren. Aus ihr folgt, dass man die gleiche Leistung bei kleiner Drehzahl und großem Drehmoment erhalten kann wie bei hoher Drehzahl und kleinem Drehmoment. Man vergleiche z.B. einen Dieselmotor mit großem Drehmoment mit einem relativ kleinen Ottomotor hoher Drehzahl bei gleicher Leistung. Oft hängt das Drehmoment eines Motors von der Drehzahl ab (Bild 1.81).

Wichtig! Zur Erzielung einer großen Winkelbeschleunigung – bei Kraftwagen derjenigen der Räder, wodurch auch eine große Bahnbeschleunigung erreicht wird – kommt es nicht so sehr auf eine hohe Leistung bei der Enddrehzahl, sondern auf ein großes Drehmoment schon bei kleineren Drehzahlen an.

Die Leistung eines Motors lässt sich gut mit einem Bremsband (Bild 1.82) messen. Es gilt:

$$P = F_R v = F_R r \omega$$

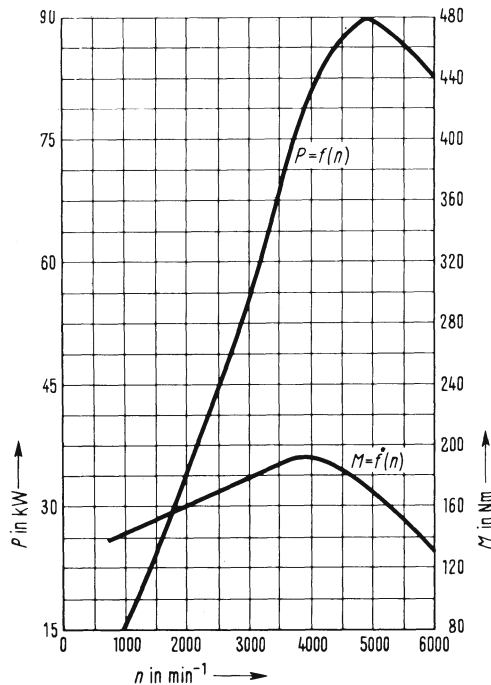


Bild 1.81 Drehmoment und Leistung eines Verbrennungsmotors als Funktion der Drehzahl

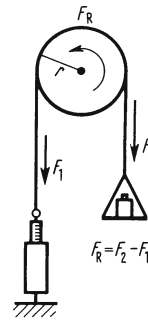


Bild 1.82 Leistungsmessung mit dem Bremsband

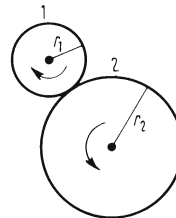


Bild 1.83 Getriebe als Drehmomentwandler

Getriebe als Drehmomentwandler. Bild 1.83 zeigt zwei Zahnräder mit den Radien r_1 und r_2 . Rad 1 treibt ohne Schlupf Rad 2 an. Dann müssen die Umfangs-Bahngeschwindigkeiten einander gleich sein: $r_1 \omega_1 = r_2 \omega_2$. Also verhalten sich die Winkelgeschwindigkeiten umgekehrt wie die Radien, $\omega_1/\omega_2 = r_2/r_1$. Die von Rad 2 abgegebene Leistung, $P_2 = M_2 \omega_2$, muss gleich der von Rad 1 aufgenommenen Leistung $P_1 = M_1 \omega_1$ sein. Also ist $M_1 \omega_1 = M_2 \omega_2$ oder

$$M_2/M_1 = \omega_1/\omega_2 = r_2/r_1$$

Aufgaben zu Abschn. 1.5.2.2 und 1.5.2.3

- Man kann an dem losen Fadenende einer auf dem Tisch liegenden Garnrolle so ziehen, dass sich der Faden von selbst wieder aufwickelt. Wie ist das möglich? Man mache eine Skizze!
- Ein Vollzylinder aus einem Material mit der Dichte $\rho = 7,6 \text{ g/cm}^3$, mit 10 cm Durchmesser und 40 cm Länge soll in 3 s die Drehzahl 240 min^{-1} erhalten. Wie groß müssen das Drehmoment und bei weiterer gleichmäßiger Beschleunigung die Endleistung des Antriebsmotors sein, wenn dieser die Enddrehzahl 3000 min^{-1} erreicht?
- Ein Werkstück ist von einem Motor der Endleistung 0,2 kW in 10 s auf die Enddrehzahl 1200 min^{-1} gebracht worden. Wie groß ist das Massenträgheitsmoment?
- Ein Auto der Masse 800 kg soll in 12 s von 108 km/h bis zum Stillstand gebracht werden. Welche Bremskraft muss an jeder der vier Bremsstrommeln mit 30 cm Durchmesser angreifen? Raddurchmesser 60 cm. (Die Rotationsenergie der Räder werde vernachlässigt.)
- Beschleunigt man einen Wagen, so müssen die Räder zusätzlich in Drehung versetzt werden. Man berechne die zur Beschleunigung a des Wagens notwendige Gesamtkraft F . Um wie viel erhöht sich scheinbar die Gesamtmasse durch ein Rad mit dem Massenträgheitsmoment J_R und dem Radius r ?

1.5.2.4 Vergleich zwischen geradliniger Bewegung und Drehbewegung

Mit den in den vorhergehenden Abschnitten eingeführten Größen lässt sich der in Abschnitt 1.2.3 für die Kinematik begonnene Vergleich zwischen geradliniger Bewegung (Translation) und Drehbewegung (Rotation) auf die Dynamik erweitern. Die in Tafel 1.84 aufgeführten Analogien erleichtern nicht nur das Behalten der Formeln, sondern weisen auch auf physikalisch bemerkenswerte Zusammenhänge hin.

Tafel 1.84

Translation		Rotation	
Weg	\vec{s}	Winkel	φ
Geschwindigkeit	\vec{v}	Winkelgeschwindigkeit	$\vec{\omega}$
Beschleunigung	\vec{a}	Winkelbeschleunigung	$\vec{\alpha}$
Träge Masse	m	Massenträgheitsmoment	J
Kraft	$\vec{F} = m \vec{a}$	Drehmoment	$\vec{M} = J \vec{\alpha}$
Arbeit	$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$	Arbeit	$W = M \varphi$
Leistung	$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$	Leistung	$P = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$
Translationsenergie	$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2$	Rotationsenergie	$W_{\text{rot}} = \frac{1}{2} J \omega^2$
Bahnimpuls	$\vec{p} = m \vec{v}$	Drehimpuls	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

Wie man sieht, erhält man alle einander entsprechenden Beziehungen, wenn man in ihnen die in den ersten fünf Zeilen aufgeführten Größen austauscht.

Eine sehr nützliche Größe bei der Untersuchung und Beschreibung der Translation ist der Impuls $\vec{p} = m \vec{v}$ (s. Abschn. 1.3.4.4). Die ihm analoge Größe bei den Drehbewegungen ist

der in der letzten Zeile der Tafel 1.84 bereits aufgeführte Drehimpuls. Er spielt in den folgenden Kapiteln eine wichtige Rolle.

1.5.3 Drehimpuls

1.5.3.1 Drehimpuls eines Massenpunktes

Ein punktförmig angenommener Körper mit der Masse m , ein sog. Massenpunkt, der sich mit der Bahngeschwindigkeit \vec{v} bewegt, hat nach Abschn. 1.3.4.4 den Bahnimpuls $\vec{p} = m\vec{v}$. Nun ist es eine bekannte Erscheinung, dass man z.B. einem Auto, auch wenn es auf einer schnurgeraden Straße fährt, vom Straßenrand aus nur nachblicken kann, wenn man ständig den Kopf dreht. Vom außenstehenden Beobachter aus gesehen, vollführt das Auto also deutlich eine Drehbewegung (Bild 1.85). Jetzt kann man sich z.B. zunächst nur dafür interessieren, wie schnell man jeweils den Kopf drehen muss, d.h., wie groß die momentanen Winkelgeschwindigkeiten sind.

Diese erhält man offensichtlich, wenn man von der Bahngeschwindigkeit in jedem Bahnpunkt die jeweilige Komponente v_{\perp} senkrecht zum „Ortsvektor“ $\vec{r}^{1)}$ ausrechnet und durch den Betrag von r teilt. Es gilt

$$\omega = \frac{v_{\perp}}{r} \quad \text{mit} \quad v_{\perp} = v \sin(\sphericalangle \vec{r}; \vec{v})$$

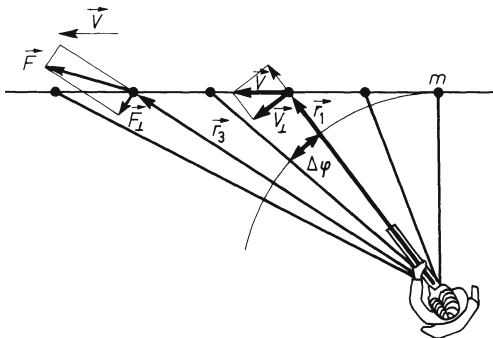


Bild 1.85 Drehimpuls eines Massenpunktes

Man kann sogar noch ein Stück weiter gehen und dem Körper formal in jedem Punkt seiner Bahn in Bezug auf den Beobachterstandpunkt ein Massenträgheitsmoment zuordnen. Da der Körper nur ein einziger Massenpunkt im Abstand r ist, folgt aus der Definition des Massenträgheitsmomentes (Abschn. 1.5.2.1)

$$J = m r^2$$

In Analogie zum Bahnimpuls $p = m\vec{v}$; kann man nun eine entsprechende Größe für die beobachtbare Drehbewegung einführen.

Definition: Ein auf einer beliebigen Bahn bewegter Massenpunkt besitzt zu einem bestimmten Zeitpunkt in Bezug auf einen im Abstand r befindlichen Bezugspunkt die momentane Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{v_{\perp}}{r} = \frac{v \sin(\sphericalangle \vec{r}; \vec{v})}{r}$$

und das momentane Massenträgheitsmoment

$$J = m r^2$$

Das Produkt $L = J\omega$ heißt momentaner Drehimpuls in Bezug auf einen bestimmten Bezugspunkt.

¹⁾ Es ist üblich, bei Drehbewegungen den Ortsvektor mit \vec{r} zu bezeichnen.

Für L ergibt sich:

$$L = mr^2\omega = mr^2 \frac{v_{\perp}}{r} = mr v_{\perp} = r p_{\perp}$$

Hierbei ist p_{\perp} die senkrecht auf dem jeweiligen Ortsvektor stehende Komponente des Bahnimpulses. Es gilt

$$p_{\perp} = p \sin(\sphericalangle \vec{r}; \vec{v}) = p \sin(\sphericalangle \vec{r}; \vec{p})$$

Setzt man die letzte Beziehung ein, so wird $L = r p \sin(\sphericalangle \vec{r}; \vec{p})$. Dieser Ausdruck ist der Betrag des vektoriellen Produktes der Vektoren \vec{r} und \vec{p} . Offenbar ist es sinnvoll, den Drehimpuls auch als Vektor mit der Richtung dieses vektoriellen Produktes einzuführen, da man auf diese Weise auch die Drehrichtung kennzeichnen kann. Damit erhält man schließlich die

Definition: Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$.

Der Drehimpuls ist ein Vektor, der gemäß der Rechtsschraubenregel senkrecht auf der von \vec{r} und \vec{p} aufgespannten Ebene steht (Bild 1.86).

Drehimpuls und Drehmoment

Bei den Bahnbewegungen gilt laut Abschn. 1.3.4.4 das 2. Newtonsche Axiom $\vec{F} = d\vec{p}/dt$. Es erhebt sich die Frage, ob eine analoge Beziehung auch für den Zusammenhang zwischen Drehimpuls und Drehmoment gilt.

Um dies zu untersuchen, lassen wir in irgend einem Punkt der Bahn eine Kraft \vec{F} auf den Körper wirken (Bild 1.85), sodass in Bezug auf den Beobachter auch formal das Drehmoment $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ mit dem Betrag $M = r F \sin(\sphericalangle \vec{r}; \vec{F}) = r F_{\perp}$ wirkt. Die Kraft F_{\perp} beschleunigt den Körper mit der Momentanbeschleunigung $a_{\perp} = dv_{\perp}/dt$ senkrecht zum Radius und ändert damit den Drehimpuls. Es gilt für das momentane Drehmoment:

$$\frac{dL}{dt} = r m \frac{dv_{\perp}}{dt} = r m a_{\perp} = r F_{\perp} = M$$

Allgemein gilt die wichtige Beziehung

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Nicht so anschaulich, dafür aber mathematisch eleganter, erhält man dieses Ergebnis folgendermaßen:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p})$$

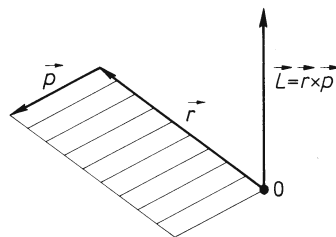


Bild 1.86 Zur Definition des Drehimpulses

Denn nach der Produktregel gilt

$$\frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}$$

Nun ist aber $d\vec{r} \parallel \vec{p}$ (s. Bild 1.87a); also sind der Winkel zwischen beiden und damit auch das vektorielle Produkt $d\vec{r}/dt \times \vec{p}$ gleich Null. Also gilt mit $\vec{r} \times \vec{p} = \vec{L}$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

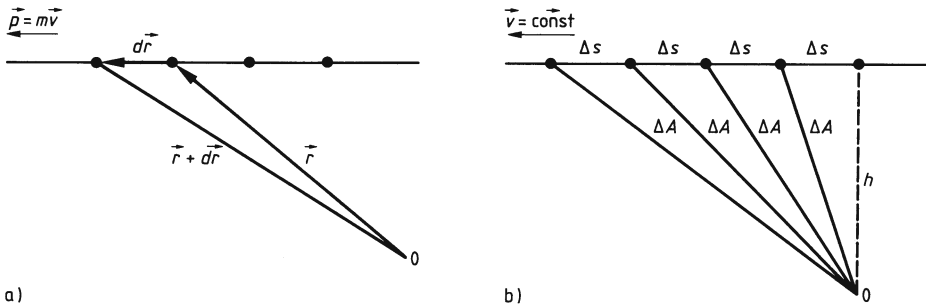


Bild 1.87 a) Änderung des Ortsvektors im Zeitintervall dt ; b) Zum „Flächensatz“
Es gilt $\vec{v} = d\vec{r}/dt$

Man sieht sofort, dass immer dann, wenn der Körper sich kräftefrei bewegt oder wenn eine Kraft nur in radialer Richtung wirkt, d.h., wenn kein Drehmoment vorhanden ist, der Drehimpuls konstant bleibt.

Die Tatsache, dass bei Fehlen eines Drehmomentes die Momentangeschwindigkeit konstant bleibt, hat natürlich zur Folge, dass die in gleichen Zeiten Δt zurückgelegten Strecken Δs alle gleich groß sind (Bild 1.87 b). Daraus folgt aber weiter, dass alle vom Radiusvektor \vec{r} in gleichen Zeiten überstrichenen Flächen ΔA gleich groß sind. Denn alle Flächen haben die gleiche Höhe h und damit den gleichen Inhalt $\Delta A = \Delta s h / 2$. Man nennt dies den

Flächensatz: Bei konstantem Drehimpuls überstreicht der Radiusvektor in gleichen Zeiten gleiche Flächen (s. auch Abschn. 1.5.4.).

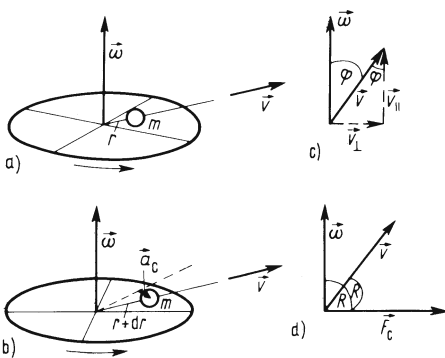


Bild 1.88 Zur Herleitung der Corioliskraft

Eine interessante Folgerung der Konstanz des Drehimpulses ist die nur in rotierenden Bezugssystemen auftretende sog.

Corioliskraft

Auf einer mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden Scheibe (Bild 1.88 a) befindet sich im Abstand r von der Drehachse ein punktförmig angenommener Körper mit der Masse m . Er besitzt also in Bezug auf die Drehachse das Massenträgheitsmoment $m r^2$ und, da er die gleiche Winkelgeschwindigkeit wie die Scheibe hat, den Dreh-

impuls $L = mr^2 \omega$. Wird der Körper jetzt mit der Geschwindigkeit $v = v_r$ in radialer Richtung reibungsfrei nach außen bewegt (Bild 1.88b), so bemerkt ein Beobachter, der sich mit der Scheibe mitdreht, dass der Körper gegen ihn zurückbleibt. Das liegt daran, dass wegen des Fehlens äußerer Kräfte der Drehimpuls $L = mr^2 \omega$ konstant bleibt. Mit größer werdendem Abstand r von der Drehachse muss daher die Winkelgeschwindigkeit des Körpers abnehmen.

Der Beobachter, der sich mit der Scheibe mitdreht, hat den Eindruck, dass auf den Körper eine Kraft wirkt, die ihn tangential entgegen der Drehrichtung „nach hinten“ beschleunigt. Diese Kraft heißt nach ihrem Entdecker Corioliskraft¹⁾. Sie lässt sich mit Hilfe des Satzes von der Erhaltung des Drehimpulses berechnen. r und ω hängen beide von der Zeit ab. Wir erhalten deshalb mit Hilfe der Produktregel

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d(mr^2\omega)}{dt} = mr^2 \frac{d\omega}{dt} + m\omega 2r \frac{dr}{dt}$$

Wegen $L = \text{const}$ ist aber $dL/dt = 0$. Außerdem ist $dr/dt = v_r$, und $r d\omega/dt = r a_c$ ist die, vom mitbewegten Beobachter aus gesehen, „nach hinten“ auftretende Coriolisbeschleunigung. Damit ergibt sich für den Betrag der Corioliskraft $F_C = m 2v_r \omega$. Bewegt der Körper sich nicht, wie im obigen Beispiel, in der Scheibenebene, sondern parallel zur Drehachse senkrecht nach oben, so ändert sich während der Bewegung sein Abstand von der Drehachse nicht. Damit bleibt auch seine Winkelgeschwindigkeit konstant, und daher ist keine Corioliskraft zu beobachten. In diesem Fall ist \vec{v} parallel zu $\vec{\omega}$ gerichtet.

Interessanterweise tritt auch dann eine Corioliskraft auf, wenn ihre Wirkung nicht so unmittelbar zu sehen ist wie im oben beschriebenen ersten Fall:

Wenn man nämlich den Körper nicht radial bewegt, sondern ihn relativ zur Scheibe auf einer Kreisbahn mit konstantem Radius r mit der Relativgeschwindigkeit v_t kreisen lässt, so stellt ein außerhalb der Scheibe stehender Beobachter fest, dass der Körper eine Winkelgeschwindigkeit ω' hat, die je nach Richtung von v_t größer oder kleiner als ω ist (Bild 1.89). Es gilt $\omega' = \omega \pm v_t/r$. Der außen stehende Beobachter schließt daraus richtig, dass der Körper die Radialbeschleunigung $a_r = \omega'^2 r$ erfährt.

Eigentlich sollte man nun erwarten, dass ein zweiter mit der Scheibe mitrotierender Beobachter einfach die Summe aus der Radialbeschleunigung $\omega^2 r$, die der Körper erfahren würde, wenn er relativ zur Scheibe ruhte, und v_t^2/r , der Radialbeschleunigung relativ zur Scheibe, beobachten würde.

So einfach ist die Sache jedoch nicht. Setzt man nämlich in die Formel für a_r die resultierende Winkelgeschwindigkeit ein, so ergibt sich

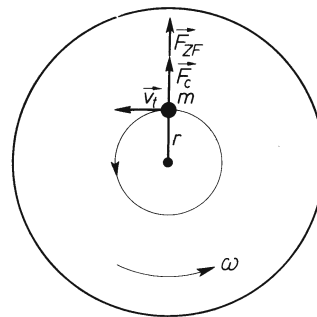


Bild 1.89 Zur Corioliskraft. Ein Körper mit der Masse m bewegt sich mit der Geschwindigkeit v_t relativ zu einer Scheibe, die ihrerseits mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotiert.

¹⁾ G. G. Coriolis (1792 bis 1843).

$$a_r = \omega^2 r = \left(\omega \pm \frac{v_t}{r} \right)^2 r = \omega^2 r \pm 2v_t \omega + \frac{v_t^2}{r}$$

Zu den beiden erwarteten Gliedern kommt auch hier wieder die bereits am Anfang hergeleitete Coriolisbeschleunigung $a_C = 2 v_t \omega$. Je nach Richtung von \vec{v}_t ist \vec{a}_C radial nach innen oder nach außen gerichtet. In jedem Falle steht sie aber wieder senkrecht auf der Relativgeschwindigkeit. Um \vec{a}_C zu bewirken, ist eine ebenfalls natürlich senkrecht auf der Relativgeschwindigkeit stehende Kraft erforderlich.

Die zu dieser Kraft entgegengesetzt gerichtete Trägheitskraft ist die Corioliskraft $F_{ct} = m 2 v_t \omega$.

Verallgemeinerung: Man kann den Fall, in dem sich der Körper radial bewegt und den zuletzt beschriebenen, in dem er sich tangential bewegt, zusammenfassen:

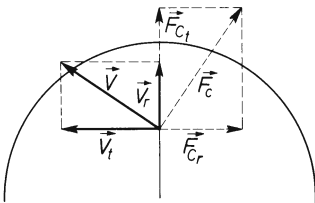


Bild 1.90 Die Komponenten der Corioliskraft sind beide proportional zu den Geschwindigkeitskomponenten, durch die sie verursacht werden; $F_{Cr} = 2 m \omega v_r$ und $F_{Ct} = 2 m \omega v_t$. Also muss auch $2 m \omega v$ gelten, und außerdem muss \vec{F}_C senkrecht auf \vec{v} stehen.

Da man in der Drehebene liegende Geschwindigkeiten beliebiger Richtung als Überlagerung je einer Radial- und Tangentialkomponente darstellen kann, $\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_t$, ergibt sich, dass auch die resultierende Corioliskraft in der Drehebene liegt und senkrecht auf \vec{v} steht (Bild 1.90).

Offenbar ist also für das Auftreten einer Corioliskraft nur die senkrecht zu $\vec{\omega}$ in der Drehebene liegende Geschwindigkeitskomponente v_{\perp} wichtig. Deren Betrag ist aber gemäß Bild 1.88c gleich $v \sin \varphi$, wobei φ der Winkel zwischen \vec{v} und $\vec{\omega}$ ist. Berücksichtigt man noch die Richtungen von \vec{v} , $\vec{\omega}$ und \vec{F}_C (Bild 1.88 d), so gilt für die

Corioliskraft

$$\vec{F}_C = m 2 \vec{v} \times \vec{\omega}$$

Ihr Betrag ist

$$F_C = m 2 v \omega \sin(\sphericalangle \vec{v}; \vec{\omega}).$$

Hierbei ist $\vec{\omega}$ die momentane Winkelgeschwindigkeit des Körpers.

Anwendungen. Alle Körper, die sich auf der Erde bewegen, erfahren eine Corioliskraft, die z.B. für alle sich auf der nördlichen Halbkugel bewegenden Körper (Flüsse, Wind, usw.) eine Rechtsabweichung bewirkt.

Wie aus den vorhergehenden Betrachtungen ohne Weiteres einleuchtet, ist die Corioliskraft eine nur für den mit dem Bezugssystem rotierenden Beobachter bedeutsame Scheinkraft im Sinne von Abschn. 1.3.3.5. Sie wird jedoch zu einer sehr realen Kraft, wenn man z.B. relativ zu einem mit $\vec{\omega}$ rotierenden Maschinenteil einen Körper mit der Geschwindigkeit \vec{v} bewegt. Dann ist zusätzlich zu evtl. erforderlichen Zentripetalkräften eine weitere Führungskraft aufzuwenden, die entgegengesetzt gleich der Corioliskraft ist.

1.5.3.2 Drehimpuls eines Systems von Massenpunkten bei Wirken innerer und äußerer Kräfte

Definition: Der Drehimpuls eines Systems von N Massenpunkten in Bezug auf einen bestimmten Bezugspunkt ist gleich der vektoriellen Summe der Einzeldrehimpulse. Es gilt

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{L}_i$$

Es fragt sich jetzt, in welcher Weise dieser Drehimpuls vielleicht allein durch innere Wechselwirkungskräfte zwischen den Massenpunkten geändert werden könnte. Man denke hierbei z.B. an ein Planetensystem, in dem jeder Planet auf jeden anderen eine Anziehungskraft ausübt, oder eine Anzahl von Elektronen, die sich gegenseitig abstoßen. In Bild 1.91 ist ein System von 3 Massenpunkten gezeichnet. Zusätzlich zu den inneren Wechselwirkungskräften sind noch drei äußere Kräfte \vec{F}_1 , \vec{F}_2 und \vec{F}_3 eingezeichnet, die wir vorläufig als nicht vorhanden annehmen wollen.

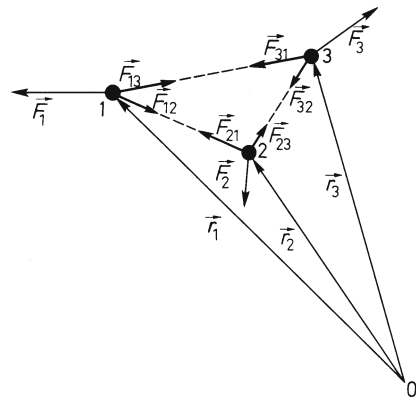


Bild 1.91 Innere und äußere Kräfte, die an einem System von Massenpunkten angreifen

Wichtig hierbei ist stets, dass die Wechselwirkungskräfte nach dem 3. Newtonschen Axiom einander immer entgegengesetzt gleich sind. Es gilt also:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}; \quad \vec{F}_{13} = -\vec{F}_{31}; \quad \vec{F}_{23} = -\vec{F}_{32}.$$

Wir berechnen jetzt das Gesamtdrehmoment aller Wechselwirkungskräfte:

$$\begin{aligned} M &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{21} + \vec{r}_1 \times \vec{F}_{13} + \vec{r}_3 \times \vec{F}_{31} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{23} + \vec{r}_3 \times \vec{F}_{32} \\ &= (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{12} + (\vec{r}_1 - \vec{r}_3) \times \vec{F}_{13} + (\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \times \vec{F}_{23} = 0 \end{aligned}$$

Denn der Vektor $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ liegt als Verbindung der Punkte 1 und 2 parallel zu \vec{F}_{12} ; ebenso liegt $(\vec{r}_1 - \vec{r}_3)$ parallel zu \vec{F}_{13} und $(\vec{r}_2 - \vec{r}_3)$ parallel zu \vec{F}_{23} . Also sind die zugehörigen Drehmomente alle gleich Null. Es gilt der

Satz von der Erhaltung des Drehimpulses: In einem System von Massenpunkten, die nur gegenseitige Wechselwirkungskräfte, sog. innere Kräfte, aufeinander ausüben, bleibt der Gesamtdrehimpuls – dieser ist die vektorielle Summe der Einzeldrehimpulse – konstant.

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{L}_i = \text{const}$$

Berücksichtigt man jetzt zusätzlich die in Bild 1.91 eingezeichneten äußeren Kräfte \vec{F}_1 bis \vec{F}_N , so wird klar, dass jede an ihrem Massenpunkt den Drehimpuls in der in Abschn. 1.5.3.1 dargestellten Weise ändert. Für jeden Massenpunkt gilt $\vec{M}_i = d\vec{L}_i/dt$. Also ist das Gesamtdrehmoment

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^N \vec{M}_i = \sum_{i=1}^N \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \vec{L}_i = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Auch bei einem System von Massenpunkten ist das Gesamtdrehmoment gleich der Änderung des gesamten Drehimpulses pro Zeit

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

1.5.3.3 Drehimpuls eines starren Körpers

Die im vorigen Abschnitt hergeleiteten Zusammenhänge gelten natürlich auch dann, wenn die inneren Wechselwirkungskräfte zwischen den Massenpunkten dafür sorgen, dass diese ihre gegenseitige Lage beibehalten, sodass sie einen starren Körper bilden.

In diesem Falle gibt es einige zusätzliche, nützliche Gesetzmäßigkeiten, die wir uns im Folgenden überlegen wollen.

Der starre Körper rotiert um eine feste Achse. Wir betrachten einen stark vereinfachten „starren Körper“, der nur aus einem einzigen Massenpunkt besteht. Dieser rotiert an einer masselos gedachten Stange, die gleichzeitig den auf 0 bezogenen Ortsvektor \vec{r} darstellt, in der in Bild 1.92 gezeichneten Weise mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ um eine feste Achse. Wie man leicht mit Hilfe der Rechtsschraubenregel überlegt, gilt:

Der Drehimpulsvektor \vec{L} fällt im Allgemeinen nicht mit dem Vektor der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ zusammen und ändert ständig seine Richtung.

Das für die Richtungsänderung von \vec{L} erforderliche Drehmoment muss von außen auf die „Achse“ übertragen werden.

Wir können den Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ in zwei Komponenten, parallel und senkrecht zur Drehachse, zerlegen:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = (\vec{r}_\perp + \vec{r}_\parallel) \times \vec{p} = \vec{r}_\perp \times \vec{p} + \vec{r}_\parallel \times \vec{p} = \vec{L}_\perp + \vec{L}_\parallel$$

Wie man sieht, bleibt $\vec{L}_\parallel = \vec{r}_\perp \times \vec{p}$ stets konstant, während $\vec{L}_\perp = \vec{r}_\parallel \times \vec{p}$ ständig wie ein Uhrzeiger um die Drehachse rotiert. Für den Betrag von L_\parallel erhält man

$$L_\parallel = r_\perp p = r_\perp m v = r_\perp m r_\perp \omega$$

$$L_\parallel = m r_\perp^2 \omega$$

Ein achsialsymmetrischer Körper rotiert um seine Symmetrieachse. In Bild 1.93 ist ein symmetrischer Körper aus 6 Massenpunkten gezeichnet, der mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ um seine Symmetrieachse rotiert. Wir betrachten zunächst nur die symmetrisch lie-

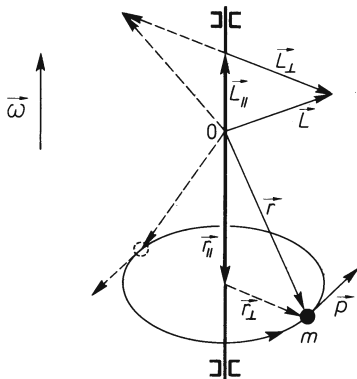


Bild 1.92 Drehimpuls eines „starrten Körpers“, der aus einem einzigen Massenpunkt besteht, der an einer masselosen Stange \vec{r} um eine feste Achse rotiert. (Gezeichnet sind zwei Stellungen.)

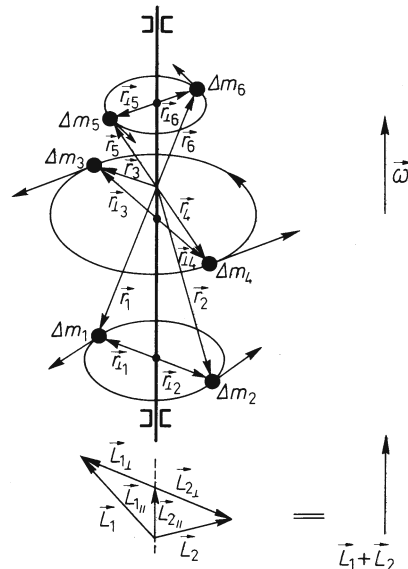


Bild 1.93 Ein achsialsymmetrischer starrer Körper, bestehend aus 6 Massenpunkten, rotiert um seine Symmetrieachse. Unten sind die Drehimpulse \vec{L}_1 und \vec{L}_2 des Punktepaars Δm_1 und Δm_2 mit ihren achsialen und radialen Komponenten gezeichnet. (Man vergleiche Bild 1.92.)

genden Massenpunkte Δm_1 und Δm_2 , für die wegen der geforderten Symmetrie auch noch $\Delta m_1 = \Delta m_2$ gilt. Ihre Drehimpulse \vec{L}_1 und \vec{L}_2 ergeben sich wie in Bild 1.92. (Sie sind der Übersichtlichkeit wegen unten herausgezeichnet.) Man sieht sofort, dass für die senkrechten Komponenten $\vec{L}_{1\perp} = -\vec{L}_{2\perp}$ gilt. Sie heben sich deshalb stets auf. Dies gilt auch für alle anderen symmetrischen Punktepaare. Die Parallelkomponenten hingegen addieren sich. Es gilt also:

Bei einem um eine Symmetrieachse rotierenden starren Körper liegt der Drehimpulsvektor \vec{L} dem Vektor der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ parallel. Sein Betrag ist

$$L = \sum_{i=1}^N L_{\parallel i} = \sum_{i=1}^N \Delta m_i r_{\perp i}^2 \omega$$

Da gemäß Abschn. 1.5.2.1 $\sum_{i=1}^N r_{\perp i}^2 \Delta m_i = J$ das Massenträgheitsmoment in Bezug auf die Drehachse ist, gilt auch

$$L = J\omega$$

und wegen der Parallelität von \vec{L} und $\vec{\omega}$ sogar

$$\vec{L} = J\vec{\omega}.$$

Weil die Symmetrieachsen immer Hauptträgheitsachsen (s. Abschn. 1.5.2.1) sind, gilt die zuletzt genannte Beziehung auch für Hauptträgheitsachsen. Wie hier nicht näher begründet werden soll, lässt sich schließlich noch zeigen:

Der Gesamtdrehimpuls \vec{L}_{ges} für die Rotation um eine beliebige Achse ergibt sich als Überlagerung der Drehimpulse, die zu den Rotationen um die Hauptträgheitsachsen gehören:

$$\vec{L}_{\text{ges}} = \vec{L}_x + \vec{L}_y + \vec{L}_z = J_x \vec{\omega}_x + J_y \vec{\omega}_y + J_z \vec{\omega}_z$$

Man vergleiche Abschn. 1.5.2.1.

Wir werden sehen, dass sich mit Hilfe des Drehimpulsvektors viele Vorgänge sehr einfach beschreiben lassen. Eine wichtige Rolle spielt dabei die dem verallgemeinerten zweiten Newtonschen Axiom Gl. (1.26) $F = d\vec{p}/dt$ analoge und in Abschn. 1.5.3.1 und 1.5.3.2 hergeleitete Beziehung

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (1.41)$$

Im Folgenden diskutieren wir einige wichtige Spezialfälle. Dabei erinnern wir vorweg jeweils an die entsprechenden Fälle der Translation, um den Zusammenhang mit ihnen herauszustellen (s. auch Tafel 1.112).

1.5.3.4 Drehmomentvektor \vec{M} und Drehimpulsvektor \vec{L} liegen parallel: $\vec{M} \parallel \vec{L}$

Dem entspricht bei der Translation der Fall, dass eine Kraft \vec{F} in oder entgegengesetzt zur Richtung des Bahnimpulses \vec{p} und damit der Geschwindigkeit \vec{v} wirkt. Der Körper wird beschleunigt oder abgebremst, ohne dass seine Bewegungsrichtung sich ändert. Der Bahnimpuls \vec{p} ändert in jedem Zeitintervall dt seinen Betrag um $dp = F dt$ und erfährt keine Richtungsänderung (s. Bild 1.94 und auch Tafel 1.112). Bei der Rotation ist der in Bild 1.95 gezeichnete Fall ganz analog. Der Körper wird durch das Drehmoment \vec{M} auf eine höhere (Bild 1.95a) oder niedrigere (Bild 1.95b) Winkelgeschwindigkeit gebracht (vgl. auch Abschn. 1.5.2.2).

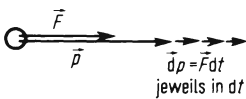


Bild 1.94 Kraft \vec{F} und Impuls \vec{p} sind parallel

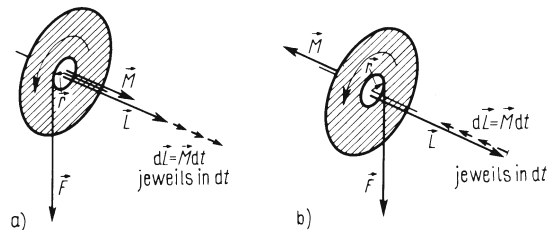


Bild 1.95 Drehmoment \vec{M} und Drehimpuls \vec{L} sind parallel

Wenn \vec{M} und \vec{L} parallel sind, so ändert der Drehimpuls \vec{L} in jedem Zeitintervall dt seinen Betrag um $dL = M dt$ und erfährt keine Richtungsänderung.

1.5.3.5 Es wirkt kein äußeres Drehmoment: $\vec{M} = 0$

Dem entspricht bei der Translation der Fall, dass auf einen Körper oder ein System von Körpern keine äußeren Kräfte wirken. $\vec{F} = 0$ führt wegen $d\vec{p}/dt$ zu dem Satz von der Erhaltung des Impulses mit seinen vielfältigen Anwendungen (vgl. Abschn. 1.3.4.4 und auch Tafel 1.112). Bei der Rotation bedeutet $\vec{M} = 0$, dass $d\vec{L}/dt = 0$ ist, \vec{L} sich also nicht ändert. Es gilt der wichtige

Satz von der Erhaltung des Drehimpulses. Wirkt auf einen Körper oder ein System von Körpern kein äußeres Drehmoment, so bleibt der Gesamtdrehimpuls nach Betrag und Richtung erhalten. Die vektorielle Summe aller Drehimpulsänderungen ist gleich Null.

Die Gültigkeit dieses Satzes demonstrieren wir mit den folgenden Versuchen.

□ **Versuch 12.** Ein Kreisel 1 ist „kardanisch“ gelagert (Bild 1.96). (Das heißt, er kann sich um drei senkrecht aufeinander stehende Achsen, die sich im Schwerpunkt schneiden, gleichzeitig drehen.) Außerdem ist er so ausgewogen, dass kein äußeres Drehmoment wirkt. Man bringt die Kreiselachse 2 in eine beliebige Lage im Raum und lässt den Kreisel um sie so rotieren, dass der Drehimpulsvektor \vec{L}_k die gezeichnete Richtung hat. Bewegt man jetzt mit dem Handgriff 3 die ganze Anordnung in beliebiger Weise im Raum hin und her, so kann man dabei kein äußeres Drehmoment wirken lassen, und die Richtung der Kreiselachse und damit der Drehimpuls \vec{L} bleiben unverändert. □

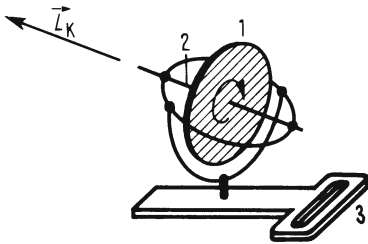


Bild 1.96 Kardanisch gelagerter Kreisel

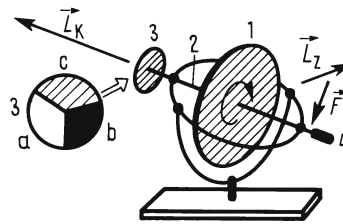


Bild 1.97 Zur Nutation

Nutation

□ **Versuch 13** (Bild 1.97). Wir wiederholen Versuch 12 mit einer kleinen Variante. Auf der Kreiselachse 2 befestigen wir eine dünne Scheibe 3 so, dass sie mitrotiert. Ihr Gewicht kompensieren wir durch ein kleines Gegengewicht 4, sodass wieder kein äußeres Drehmoment wirken kann. Die Scheibe 3 trägt die Farbsektoren a, b und c (weiß, schwarz, rot). Lassen wir den Kreisel 1 um seine Achse 2 rotieren, so bleibt deren Lage im Raum wie in Versuch 12 erhalten. Die Farben der Scheibe 3 verwaschen überall zu einem einheitlichen leicht rötlichen Grau. Nur in der Umgebung des Scheibenmittelpunktes kann man die einzelnen Farben noch unterscheiden. Denn hier herrscht nur eine sehr kleine Bahngeschwindigkeit.

Jetzt lassen wir kurzzeitig senkrecht auf die Achse die Kraft \vec{F} und damit ein äußeres Drehmoment wirken, welches nach Abschn. 1.5.3.3 einen zusätzlichen Drehimpuls \vec{L}_z verursacht. Dadurch entsteht der Gesamtdrehimpuls $\vec{L} = \vec{L}_k + \vec{L}_z$, der nach Betrag und Richtung

erhalten bleiben muss (Bild 1.98). Also kann der Drehimpuls \vec{L}_k des Kreisels allein nicht mehr raumfest bleiben. In der Tat bewegt sich die Kreiselachse, die „Figurenachse“, jetzt um den raumfesten Drehimpuls \vec{L} herum.

Bewegt sich die Figurenachse eines rotierenden Körpers um die Gesamtdrehimpulsachse herum, so nennt man diesen Vorgang Nutation¹⁾.

Während dieser Bewegung erscheint auf der Farbscheibe 3 ein Fleck, der unverwaschen abwechselnd rot, weiß oder schwarz aussieht. □

Man überlegt sich leicht, dass dieser Farbfleck deshalb so klar sichtbar ist, weil in ihm die Bahngeschwindigkeit sehr klein ist. Also muss durch ihn die Achse der resultierenden Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$, die sog. momentane Drehachse, gehen. Dabei ist $\vec{\omega}$ die vektorielle Summe aus der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}_k$ des Kreisels bei Rotation um seine Figurenachse und der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}_z$ der Drehung um die dazu senkrechte Achse (vgl. Abschn. 1.5.2.1). Wegen der Verschiedenheit der zugehörigen Massenträgheitsmomente J_k und J_z stimmt gemäß Bild 1.98 die Richtung von $\vec{\omega}$ weder mit derjenigen des raumfesten Drehimpulses \vec{L} noch mit der Richtung der Figurenachse ($\vec{\omega}_k$) überein. Also sieht man den Durchstoßpunkt der momentanen Drehachse durch die Farbscheibe um die Figurenachse herumwandern. Dabei beschreibt die momentane Drehachse den sog. Rastpolkegel um die Drehimpulsachse, die Figurenachse den sog. Nutationskegel (Bild 1.99).

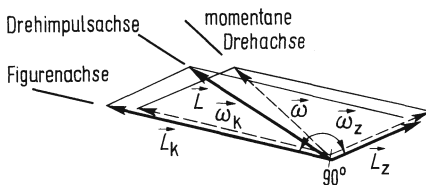


Bild 1.98 Vektorbild zur Nutation

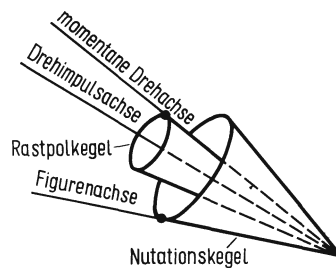


Bild 1.99 Zur Nutation

Freie Achsen

In den bisherigen Versuchen 12 und 13 war der Körper so gelagert, dass er sich um eine beliebig im Raum liegende Achse drehen konnte. Das wurde durch drei senkrecht aufeinander stehende feste Achsen ermöglicht. Am einfachsten kann man die Rotation um eine beliebig im Raum liegende Achse dadurch verwirklichen, dass man einen Körper überhaupt nicht lagert. Versetzt man ihn in Drehung, so rotiert er um eine sog. freie Achse. Eine solche Achse ist im Allgemeinen nicht materiell vorhanden.

Eine freie Achse ist eine gedachte Linie, die durch den Massenmittelpunkt hindurchgeht.

Der nächste Versuch soll das anschaulich machen.

¹⁾ In Lehrbüchern der Mechanik findet man gelegentlich abweichende Bezeichnungen.

□ **Versuch 14** (Bild 1.100). Wir schleudern einen Holzquader so durch die Luft, dass er sich um eine der freien Achsen, wie sie in Bild 1.100a oder b skizziert sind, dreht. Dazu bedarf es keiner besonderen Kunstfertigkeit. Denn hätten wir den Körper z.B. zunächst, wie in Bild 1.101 gezeichnet, um eine Achse D_0 in Drehung versetzt, so beschleunigt die an D_0 angreifende Zentrifugalkraft \vec{F}_{zf} (als Reaktionskraft zu der im Massenmittelpunkt S angreifenden Zentripetalkraft \vec{F}_{zp}) den Punkt D_0 so lange in Richtung S, bis beide Punkte zusammenfallen und \vec{F}_{zp} und \vec{F}_{zf} damit verschwinden. Daher rotiert der Körper von selbst um den Massenmittelpunkt, also um eine freie Achse. Der Körper bewegt sich etwa entlang einer Wurfparabel durch die Luft. Die Drehebene ändert sich dabei nicht. Der Drehimpulsvektor \vec{L} bleibt wegen des Fehlens äußerer Drehmomente nach Betrag und Richtung erhalten. Er wird nur parallel zu sich selbst verschoben. □

Das nützt man z.B. beim Diskuswurf aus.

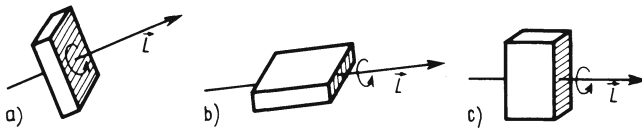


Bild 1.100 Rotation um freie Achsen

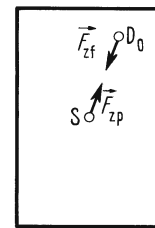


Bild 1.101 Rotation um freie Achsen

Stabile und instabile freie Achsen

□ **Versuch 15** (Bild 1.100c). Versucht man, den Quader aus Versuch 14 um die in Bild 1.100c gezeichnete freie Achse rotieren zu lassen, so gelingt das nur unvollkommen. Er beginnt zu taumeln und versucht um die Achse a) zu rotieren. Die Rotation um Achse c) ist instabil, während sie um die beiden anderen Achsen a) und b) stabil erfolgt. □

In den beiden letzten Fällen handelt es sich um Achsen, bezüglich derer der Körper sein größtes (Bild 1.100a) bzw. sein kleinstes Massenträgheitsmoment (Bild 1.100b) hat. Das Ergebnis von Versuch 15 lässt sich verallgemeinern:

Die Rotation eines Körpers um eine freie Achse ist stabil, wenn er in Bezug auf diese sein größtes oder sein kleinstes Massenträgheitsmoment hat. Die Rotation um andere freie Achse ist instabil.

Die theoretische Begründung dieses Verhaltens ist relativ umständlich. Wir verzichten daher auf sie.

Anwendungen. Raketen, Geschosse, Cowboy-Lassos rotieren um freie Achsen. Gelagerte Maschinenteile lässt man möglichst um Achsen rotieren, die auch freie Achsen sein könnten, da dann die Achsen keine Fliehkraft aufzunehmen brauchen (s. Versuch 14). Man muss dazu sorgfältig „auswuchten“.

Erhaltung des Drehimpulses bei Wirken innerer Kräfte

□ **Versuch 16** (Bild 1.102). Ein Mann rotiert relativ langsam mit einem Drehstuhl. Bei ausgebreiteten Armen hält er dabei eine Hantel (z.B. $m = 5 \text{ kg}$) in jeder Hand. Zieht er die Hanteln dicht an den Körper, so bekommt er eine deutlich höhere Drehzahl. □

Mit dem Drehimpulssatz ist das Ergebnis sofort klar. Da $L = J\omega$ konstant bleiben muss, bewirkt eine Verkleinerung des gesamten Massenträgheitsmomentes J eine Erhöhung der Winkelgeschwindigkeit ω .

Anwendungen. Pirouette beim Eislauf, Salto und dgl. (Man mache sich klar, dass bei einer Pirouette Arbeit verrichtet wird.)

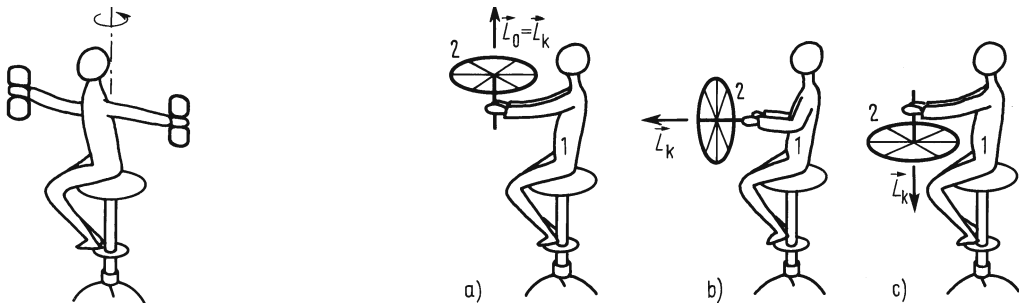


Bild 1.102 Erhaltung des Drehimpulses **Bild 1.103** Erhaltung des Drehimpulses

□ **Versuch 17** (Bild 1.103). Ein auf einem Drehstuhl sitzender Mann 1 bekommt einen rotierenden Kreisel 2 (z.B. eine Fahrradfelge mit Bleikranz) gereicht, dessen Drehimpuls \vec{L} senkrecht nach oben zeigt (Bild 1.103a). Der Mann ist in Ruhe.

Jetzt kippt er die Kreiselachse in die Waagerechte (Bild 1.103b). Der Mann beginnt, sich zu drehen. Kippt er den Kreisel weiter, bis dessen Drehimpuls senkrecht nach unten zeigt (Bild 1.103c), so dreht sich der Mann doppelt so schnell. □

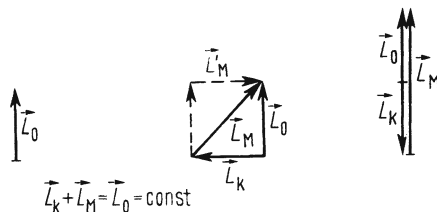


Bild 1.104 Erhaltung des Drehimpulses

Die Deutung dieses Versuches gibt Bild 1.104. Da keine äußeren Drehmomente wirken, muss die vektorielle Summe des Kreiseldrehimpulses \vec{L}_k und des Drehimpulses des Mannes mit Drehstuhl \vec{L}_M immer konstant gleich \vec{L}_0 sein. Für den Mann kommt eine waagerechte Drehimpulskomponente \vec{L}_M nicht zur Wirkung.

1.5.3.6 Drehmoment und Drehimpuls stehen senkrecht aufeinander: $\vec{M} \perp \vec{L}$

Vorweg erinnern wir uns wieder des analogen Falles bei der Translation. Wirkt eine Kraft \vec{F} stets senkrecht zur Bewegungsrichtung und damit zur Richtung des Bahnimpulses $\vec{p} = m\vec{v}$ auf einen Körper, so ändert sich der Betrag des Impulses nicht, wohl aber seine Richtung. Es entsteht eine Kreisbewegung (s. Bild 1.105 und auch 3. in Tafel 1.112). Ein senkrecht auf dem Drehimpuls eines Kreisels stehendes Drehmoment verwirklichen wir z.B. auf folgende Weise.

□ **Versuch 18** (Bild 1.106). Wir versetzen ein Rad 1 so in Drehung, dass sein Drehimpulsvektor \vec{L} die eingezeichnete Lage hat. Die Achse des Rades wird nur im Punkt A unter-

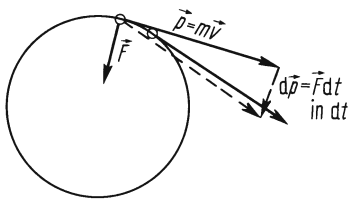


Bild 1.105 Kraft \vec{F} und Impuls \vec{p} stehen senkrecht aufeinander. Es entsteht eine Kreisbewegung

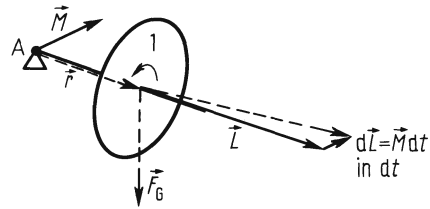


Bild 1.106 Drehmoment \vec{M} und Drehimpuls \vec{L} stehen senkrecht aufeinander. Es entsteht eine Präzession

stützt. Dann entsteht durch die im Schwerpunkt angreifende Gewichtskraft \vec{F}_G das Drehmoment $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_G$, welches senkrecht auf \vec{L} steht. Erstaunlicherweise kippt dieses Drehmoment jedoch den Kreisel nicht nach unten. Dieser weicht vielmehr seitlich aus, wobei seine Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um A kreist. Dieser Vorgang heißt Präzession¹⁾. □

Zur Erklärung benutzen wir wieder Gl. (1.41) $\vec{M} = d\vec{L}/dt$. Danach liefert in jedem Zeitintervall dt das Drehmoment \vec{M} die Drehimpulsänderung $d\vec{L} = \vec{M} dt$. Diese addiert sich jeweils zu dem vorhandenen \vec{L} . Da \vec{M} immer senkrecht auf \vec{L} steht (auch, wenn \vec{L} sich dreht), hat das zur Folge, dass die Richtung von \vec{L} sich dauernd ändert, während sein Betrag erhalten bleibt (Bild 1.106). Der Kreisel weicht seitlich aus, er „präzediert“. Die Spitze des Drehimpulsvektors \vec{L} beschreibt einen Kreis.

Wirkt ein Drehmoment so auf einen rotierenden Körper, dass es stets senkrecht auf dem Drehimpulsvektor steht, so weicht dessen Spitze immer in Richtung des Drehmomentes aus.

Es entsteht eine Präzession.

Die Winkelgeschwindigkeit der Präzession, ω_p . Wir berechnen sie anhand von Bild 1.107. In der Zeit dt überstreicht der Drehimpuls \vec{L} den Winkel $d\phi$. Letzterer ist gleich dL/L .

Also ist $\omega_p = d\phi/dt = dL/(dt L)$ und wegen $dL/dt = M$.

$$\omega_p = \frac{M}{L} \quad \text{Außerdem gilt: } \vec{M} = \vec{\omega}_p \times \vec{L}^2 \quad (1.42)$$

Das kann man experimentell folgendermaßen bestätigen. Man braucht in Versuch 18 das Rad nur einmal schneller (L groß) oder langsamer (L klein) rotieren zu lassen, sowie den Unterstützungspunkt A einmal weiter vom Schwerpunkt weg (M groß) oder dichter an ihn heran (M klein) zu legen. Gl. (1.42) kann man auch in der Form

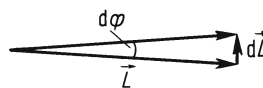


Bild 1.107 Zur Herleitung der Winkelgeschwindigkeit der Präzession ω_p

$$M = L_p \omega_p$$

¹⁾ Lat. praecedere = vorgehen. Siehe auch Fußnote auf S. 114.

²⁾ Bei unsymmetrischen Körpern kann ω_p auch zeitabhängig sein. Das soll hier nicht betrachtet werden.

schreiben. Sie hat dann die folgende Bedeutung: Dreht man einen rotierenden Körper, dessen Achse zweifach gelagert ist (Bild 1.108) – man denke z.B. an einen Elektromotor –, zwangsweise von außen mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}_p$ in der gezeichneten Weise, so wird auf die Lager das Drehmoment $\vec{M} = L\vec{\omega}_p$ ausgeübt. \vec{M} steht senkrecht auf \vec{L} und $\vec{\omega}_p$.

Bei Antrieb mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}_p$ gilt

$$\vec{M} = \vec{L}_p \times \vec{\omega}_p$$

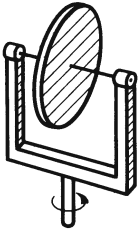


Bild 1.108 Zur Entstehung eines Drehmomentes bei zwangsweiser Drehung eines um seine Achse rotierenden Körpers

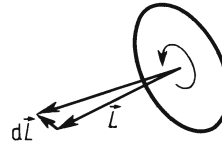


Bild 1.109 Zum Freihändigfahren mit dem Fahrrad

Diese Erscheinung ist zu beachten, wenn rotierende Maschinenteile so bewegt werden, dass die Drehimpulsachse gekippt wird. Die dabei auftretenden Drehmomente können die Lager erheblich belasten. Verschiebt man L nur parallel zu sich selbst, so entsteht kein Drehmoment.

Anwendungen. Von den vielen Möglichkeiten betrachten wir nur zwei Spezialfälle.

Freihändigfahren mit dem Fahrrad. Das in Bild 1.109 gezeichnete Rad sei das Vorderrad eines Fahrrades, das von rechts nach links fährt. Es hat den Drehimpuls L . Wir nehmen an, dass es z.B. durch eine Unebenheit der Straße nach rechts kippen möchte. Das dabei auftretende Drehmoment erzeugt die Drehimpulsänderung dL , die das Rad nach rechts dreht. Dabei unterläuft die Verbindungslinie der Vorderachse des Fahrrades zur Hinterachse den Schwerpunkt des Fahrers, und das ganze Fahrrad richtet sich wieder auf. Für ein Kippen nach links überlegt man sich leicht eine entsprechende Reaktion nach der anderen Seite. Das Fahrrad stabilisiert sich demnach stets von allein. Der Fahrer darf es nur nicht durch Drehen am Lenker dabei stören.

Kreiselkompass. Er ist eine der interessantesten Anwendungen der Präzession. Erstaunlicherweise „weiß ein Kreiselkompass, wo Norden ist“, ohne dass er von außen darauf eingestellt wird. Das verstehen wir anhand von Bild 1.110. Der dort gezeichnete Kreis sei der Äquator der Erde. Diese dreht sich in der skizzierten Richtung. Wir blicken also vom Südpol aus in Richtung Erdmittelpunkt. Auf dem Äquator befindet sich in Stellung 1 ein Kreisel, der um die Achse BB so rotiert, dass er den eingezeichneten Drehimpuls L besitzt. Die Kreiselhalterung ist in A horizontal drehbar gelagert.

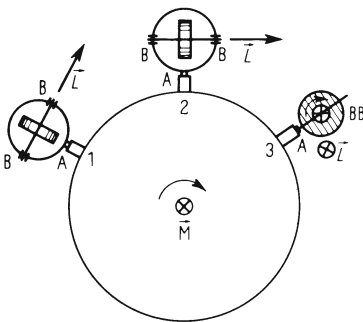


Bild 1.110 Einstellung eines Kreiselkompasses in die Nord-Richtung

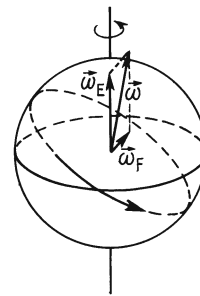


Bild 1.111 Missweisung eines Kreiselkompasses

Dreht sich der Kreisel mit der Erde von 1 nach 2, so muss seine Achse gekippt werden. Das dazu notwendige Drehmoment \vec{M} lässt den Kreisel präzedieren, bis sein Drehimpuls, wie in Stellung 3 gezeichnet, nur noch parallel verschoben wird. Sein Drehimpulsvektor zeigt somit immer nach Norden und bleibt in dieser Richtung.

In einem fahrenden Fahrzeug stellt sich der Kreiselkompass nicht parallel zur Achse der Winkelgeschwindigkeit der Erde $\vec{\omega}_E$, sondern zu der aus $\vec{\omega}_E$ und der des Fahrzeugs bei seiner Kreisbahn auf der Erde, $\vec{\omega}_F$, für infinitesimale Drehungen resultierenden, $\vec{\omega} = \vec{\omega}_E + \vec{\omega}_F$ (Bild 1.111). Er hat also eine von der Fahrgeschwindigkeit und der Fahrtrichtung abhängige Missweisung, die durch Rechnung erfasst werden muss.

Weitere Anwendungen der Präzession: Wendezeiger im Flugzeug, Kollergang in Mühlen.

In Tafel 1.112 sind noch einmal die analogen Beziehungen zwischen Translation und Rotation, die sich aus dem zweiten Newtonschen Axiom $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ ergeben, zusammengefasst.

Tafel 1.112

Translation	Rotation
$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
1. $\vec{F} \parallel \vec{p}$ Betrag von \vec{p} ändert sich. Richtung von \vec{p} bleibt erhalten. $d\vec{p} = F dt$	$\vec{M} \parallel \vec{L}$ Betrag von \vec{L} ändert sich. Richtung von \vec{L} bleibt erhalten. $d\vec{L} = M dt$
2. $\vec{F} = 0$ \vec{p} bleibt nach Betrag und Richtung konstant (Impulssatz) $\vec{p} = \text{const.}$	$\vec{M} = 0$ \vec{L} bleibt nach Betrag und Richtung konstant (Drehimpulssatz) $\vec{L} = \text{const.}$
3. $\vec{F} \perp \vec{p}$ Betrag von \vec{p} ändert sich. Richtung von \vec{p} bleibt erhalten. Kreisbewegung $d\vec{p} = \vec{F} dt$	$\vec{M} \perp \vec{L}$ Betrag von \vec{L} ändert sich. Richtung von \vec{L} bleibt erhalten. Präzession $d\vec{L} = \vec{M} dt$

1.5.3.7 Allgemeine Bewegung eines starren Körpers

Im Allgemeinen können mehrere Kräfte so auf einen starren Körper wirken, dass die Wirkungslinie ihrer Resultierenden \vec{F} nicht durch den Massenmittelpunkt S geht. Für einen solchen Fall gilt:

Beliebig viele an einem starren Körper angreifende Kräfte können immer auf eine resultierende Kraft \vec{F} , die am Schwerpunkt S angreift, und ein Kräftepaar mit dem Drehmoment $\vec{r} \times \vec{F}$ zurückgeführt werden (Bild 1.113). Deshalb besteht die allgemeine Bewegung eines starren Körpers aus gleichzeitiger Translation und Rotation.

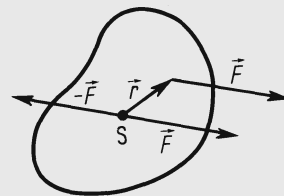


Bild 1.113 Zur allgemeinen Bewegung eines starren Körpers

Geht die Wirkungslinie der resultierenden Kraft \vec{F} durch den Schwerpunkt S, so verschwindet der Radiusvektor \vec{r} und damit das Drehmoment. Es entsteht eine reine Translation.

Greifen an einem starren Körper mehrere Kräfte derart an, dass ihre Resultierende verschwindet, aber ein resultierendes Kräftepaar und damit ein Drehmoment übrig bleibt, so entsteht nur eine reine Rotation (z.B. Bild 1.114).

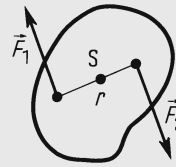


Bild 1.114 Kräftepaar

Die ausführliche Behandlung der allgemeinen Bewegung eines starren Körpers entnehme man einem Lehrbuch der Mechanik, z.B. [7].

Aufgaben zu Abschn. 1.5.3.4 bis 1.5.3.6

1. An ein mit der Drehzahl 20/s rotierendes Rad mit dem Massenträgheitsmoment 2 kgm^2 wird ein gleiches Rad angekuppelt.

Mit welcher Drehzahl rotieren beide weiter?

Welche Energie muss die Kupplung aufnehmen?

2. Eine Eisläuferin dreht sich mit ausgebreiteten Armen mit 2 Umdrehungen pro Sekunde. Zur Pirouette verkleinert sie ihr Massenträgheitsmoment von 6 kgm^2 auf $1,2 \text{ kgm}^2$ in 0,5 s. Wie groß ist ihre mittlere Leistung?

3. Wozu dient bei vielen Hubschraubern der kleine Propeller am Heck?

Wodurch könnte man die gleiche Wirkung erzielen?

4. In 60° nördlicher Breite fährt ein Eisenbahnzug mit der Gesamtmasse 10^3 t in südlicher Richtung mit 108 km/h. Welche Gesamtkraft übt er quer zur Fahrtrichtung auf die Schienen aus?

5. In einem Fahrzeug liegt in Längsrichtung ein Motor mit dem Massenträgheitsmoment $0,5 \text{ kgm}^2$. Welches Drehmoment wirkt auf seine Lager, wenn er mit 6000 Umdrehungen pro Minute rotiert, und das Fahrzeug mit 72 km/h eine Kurve mit 200 m Krümmungsradius durchfährt?

6. Wie groß ist der Missweisungswinkel eines Kreiselkompasses, der sich in einem mit 36 km/h von Nord nach Süd fahrenden Schiff befindet? (Erdradius = 6400 km).

1.5.4 Planetenbewegung

Bei der Bewegung der Planeten um die Sonne wirkt auf sie ständig die auf die Sonne gerichtete Gravitationskraft (vgl. Abschn. 1.4). Genauso werden der Mond und künstliche Erdsatelliten durch die Anziehungskraft der Erde auf ihrer Bahn gehalten. Diese Bewegungen erfolgen alle nach den drei Gesetzen, die zum erstenmal von J. Kepler (1571 bis 1630) entdeckt wurden. Man nennt sie daher nach ihm

Keplersche Gesetze

1. Die stabile Bahn eines Körpers im Schwerfeld eines zweiten mit viel größerer Masse ist eine Ellipse, in deren einem Brennpunkt der Körper mit der größeren Masse liegt (Bild 1.115).

– Genau genommen, rotieren beide Körper um einen gemeinsamen Schwerpunkt, der jedoch bei extremen Massenverhältnissen (z.B. Sonnenmasse : Planetenmasse) praktisch im Zentrum des Körpers mit der größeren Masse liegt. –

2. Die Verbindungsgerade vom bewegten Körper zum Körper im Brennpunkt überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen (Bild 1.115).

3. Bewegen sich zwei Körper um dasselbe Anziehungszentrum auf verschiedenen Ellipsenbahnen mit den großen Halbachsen r_1 und r_2 , so verhalten sich die Quadrate ihrer Umlaufzeiten T_1 und T_2 wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen.

$$T_1^2 : T_2^2 = r_1^3 : r_2^3$$

Alle drei Gesetze kann man aus den Newtonschen Axiomen und dem Gravitationsgesetz herleiten. Beim ersten verzichten wir auf eine Herleitung, weil sie eine zu umfangreiche Rechnung erfordern würde.

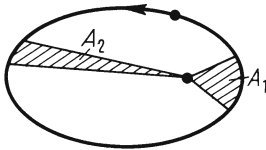


Bild 1.115 Erstes und zweites Keplersches Gesetz

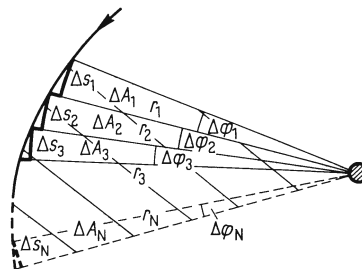


Bild 1.116 Zum Beweis des zweiten Keplerschen Gesetzes

Das zweite Keplersche Gesetz ist einfach eine Folge des Satzes von der Erhaltung des Drehimpulses (vgl. Abschn. 1.5.3).

Man denkt sich entsprechend Bild 1.116 die tatsächliche Bahn eines Planeten durch die stark ausgezogen gezeichnete Bahn ersetzt. Diese besteht aus lauter kleinen Abschnitten von Kreisbahnen mit den Radien r_1 bis r_N . Die Bahnstücke Δs_1 bis Δs_N werden jeweils in den Zeiten Δt zurückgelegt. Es gilt $\Delta s_i = r_i \Delta \varphi_i = r_i \omega_i \Delta t$. Die zugehörigen Flächenstücke sind $\Delta A_i = (1/2) r_i^2 \omega_i \Delta t$.

Da keine äußeren Drehmomente wirken, muss in jedem Bahnstück Δs_i der Drehimpuls stets den gleichen Betrag haben, also $L = m r_i^2 \omega_i = \text{const}$. Weil außerdem die Masse m des sich bewegenden Körpers konstant ist, gilt auch $r_i^2 \omega_i = \text{const}$ und damit $\Delta A_i = (1/2) r_i^2 \omega_i \Delta t = \text{const}$. Alle in den gleichen Zeiten Δt vom jeweiligen Radius überstrichenen Flächen sind einander gleich. Dies gilt an jeder Stelle der Bahn für jede in der gleichen Zeit $t = N \Delta t$ überstrichene Fläche A .

Die wirkliche Bahn erhält man, indem man die Zeitabschnitte Δt gegen Null und gleichzeitig N gegen Unendlich gehen lässt, wobei $t = N \Delta t = \text{const}$. Dann ändert sich an den obigen Überlegungen nichts. Es gilt immer $A/t = \text{const}$.

Hieraus ergibt sich übrigens nicht nur, dass der Fahrstrahl in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht, sondern auch, dass die Planetenbahn eben ist (L ist nach Betrag und Richtung konstant). Diese Überlegung gilt überdies für die Bewegung in beliebigen Zen-

trafeldern; in diesen ist \vec{F} stets in Richtung $-\vec{r}$ auf ein Zentrum gerichtet (weiteres Beispiel: Coulomb-Anziehung, Abschn. 3.1). Die oben angestellte Betrachtung geht nämlich von der einzigen Voraussetzung der Konstanz des Drehimpulses aus.

Übrigens sieht man in Bild 1.117 deutlich, dass im Punkt 1 der Bahn die Anziehungskraft \vec{F} neben der Zentrifugalkraft \vec{F}_{zp} eine Komponente \vec{F}_t in Bahnrichtung besitzt, welche den Körper hier beschleunigt, während diese Komponente ihn in Punkt 2 wieder verzögert. In den Bahnpunkten 3 und 4 existiert nur die Zentripetalkraft.

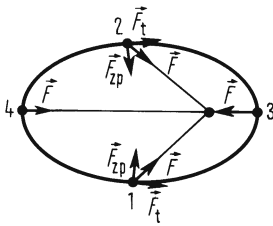


Bild 1.117 Zum zweiten Keplerschen Gesetz

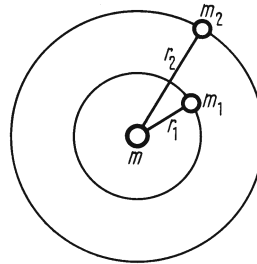


Bild 1.118 Drittes Keplersches Gesetz

Das dritte Keplersche Gesetz leiten wir für den Spezialfall her, dass die „Kepler-Ellipse“ eine Kreisbahn ist. – Das ist übrigens bei den Planeten auf ihren Bahnen um die Sonne und bei der Mondbahn mit guter Näherung der Fall. –

Die Zentripetalkraft (Bild 1.118) für Körper 1, $m_1 \omega_1^2 r_1$, wird durch die Gravitationskraft $\gamma m_1 m / r_1^2$ aufgebracht. Für Körper 2 gilt das Gleiche.

$$m_1 \omega_1^2 r_1 = \gamma \frac{m_1 m}{r_1^2}; \quad m_2 \omega_2^2 r_2 = \gamma \frac{m_2 m}{r_2^2}$$

Nach Kürzen durch m_1 bzw. m_2 und Umformen ergibt sich

$$\omega_1^2 = \frac{\gamma m}{r_1^3} \quad \text{und} \quad \omega_2^2 = \frac{\gamma m}{r_2^3} \quad \text{oder} \quad \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$$

Wegen $\omega = 2\pi/T$ erhält man schließlich $T_1^2/T_2^2 = r_1^3/r_2^3$.

Entstehung der Jahreszeiten

Interessant ist, dass auch die Entstehung der Jahreszeiten auf der Erde einfach eine Folge des Satzes von der Erhaltung des Drehimpulses ist. Wie in Bild 1.119 schematisch gezeigt, steht die Rotationsachse der Erde nämlich nicht senkrecht auf ihrer Umlaufbahn um die Sonne, sondern um $\varepsilon = 23,5^\circ$ gegen die Senkrechte geneigt. – Man nennt dies die „Schiefe der Ekliptik“. – Ohne äußeres Drehmoment bleibt bekanntlich die Richtung des Drehimpulses und damit auch diejenige der Erdachse im Raum konstant. Dadurch fallen die Lichtstrahlen der Sonne einmal steil z.B. auf die Nordhälfte der Erde, so dass hier Sommer ist, und einmal flach, sodass hier Winter ist. Für die Südhälfte gilt das Entsprechende. In Bild 1.119 sind am Nord- und Südpol noch die sog. Polarkreise angedeutet. Von diesen bis zu den Polen geht im Sommerhalbjahr die Sonne nie unter und im Winterhalbjahr nie auf.

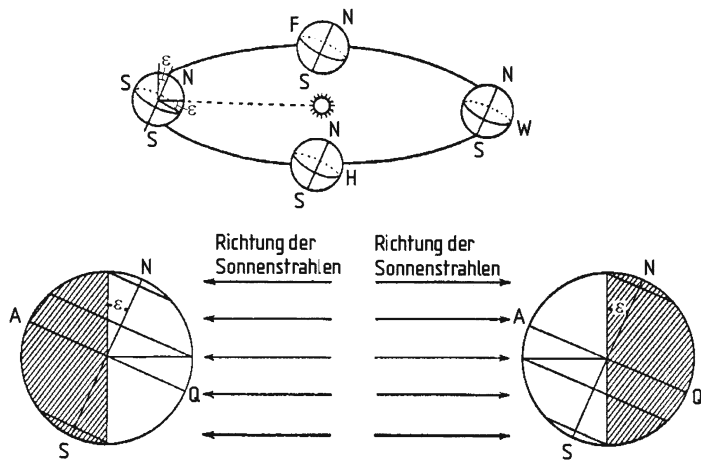


Bild 1.119 Die Lage der Erdachse und die Entstehung der Jahreszeiten

Bekanntlich ist die Erde keine Kugel, sondern an den Polen etwas abgeflacht. Dadurch greifen hier etwas unterschiedliche Gravitationskräfte der Sonne an, welche die Erde aufzurichten versuchen. Das hiermit verbundene Drehmoment steht senkrecht auf der Drehimpulsachse, so dass diese, wie oben beschrieben, seitlich ausweicht, also eine Präzessionsbewegung macht. Die Erdachse beschreibt hierbei einen Doppelkegel-Mantel mit $23,5^\circ$ Öffnungswinkel. Ein Umlauf dauert allerdings 25 850 Jahre, so dass sich Sommer und Winter in einem Menschenleben nicht wahrnehmbar verschieben.

Der Vollständigkeit halber sei noch erwähnt, dass die Erdachse auch noch eine leichte Nutationsbewegung macht, die vermutlich auf einen Stoß von außen in sehr ferner Vergangenheit zurückzuführen ist.

Anwendungen. Berechnung der Bahnen von natürlichen und künstlichen Satelliten. In diesem Zusammenhang sei ein auf den ersten Blick verblüffender Effekt erwähnt, das „Satellitenparadoxon“: Verliert ein Erdsatellit durch Reibungsarbeit in den oberen dünnen Luftschichten Energie, so sinkt er auf eine Bahn mit kleinerem Radius. Wie man sich leicht mit Hilfe des dritten Keplerschen Gesetzes überlegt, gilt aber, dass sich die Bahngeschwindigkeit $v_1 = 2\pi r_1/T_1$ und $v_2 = 2\pi r_2/T_2$ umgekehrt wie die Wurzeln aus den Bahnradien r_1 und r_2 verhalten, $v_1/v_2 = \sqrt{r_2/r_1}$. Der Satellit wird also durch Reibung schneller. Natürlich wird hierbei nicht der Energiesatz verletzt. Denn der Zuwachs an kinetischer Energie wird wie die Reibungsarbeit durch die Abnahme der potentiellen Energie gedeckt, wovon man sich leicht durch Nachrechnen überzeugen kann.

Aufgaben zu Abschn. 1.5.4

1. In welcher Zeit umkreist ein künstlicher Satellit in 500 km Höhe einmal die Erde?
2. Man berechne mit Hilfe des dritten Keplerschen Gesetzes aus dem Ergebnis der Aufgabe 1 die Entfernung Mond-Erde ($T_{\text{Mond}} = 27,4$ Tage).
3. „Syncom“-Satelliten scheinen über einem Punkt der Erde stillzustehen. Sie dienen zur Nachrichtenübertragung. Welche Arbeit ist notwendig, um einen solchen Satelliten der Masse 60 kg zum Kreisen zu bringen? (Man berücksichtige, dass der Satellit auch auf der Erdoberfläche schon Bewegungsenergie besitzt!)
4. Warum empfindet sich ein Mensch in einem Satelliten schwerelos, obwohl auch auf ihn die Anziehungskraft der Erde wirkt?

1.6 Mechanik der Flüssigkeiten und Gase

1.6.1 Ruhende Flüssigkeiten

Für die Beschreibung von Vorgängen in Flüssigkeiten und Gasen ist der Begriff des Druckes wichtig.

Definition: Wirkt senkrecht auf die Fläche A eine flächenhaft verteilte Kraft \vec{F} (Bild 1.120) so nennen wir den Quotienten aus dem Betrag F der Kraft und der Fläche A den Druck p .

$$\text{Druck} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche, auf welche die Kraft senkrecht wirkt}}$$

$$p = \frac{F}{A}$$

Der Druck ist ein Skalar.

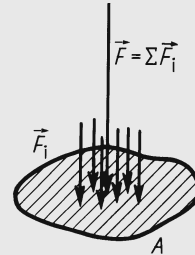


Bild 1.120 Zur Definition des Druckes

Einheiten. Aus der Definition ergibt sich die Druckeinheit

$$1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 1 \text{ Pascal}^{1)} \quad \text{im Internationalen Einheitensystem}$$

Häufig benutzt man auch die Einheit

$$1 \text{ hPa} = 10^2 \text{ Pa}$$

Weitere früher gebräuchliche Druckeinheiten in Abschn. 1.6.1.3 und im Anhang.

1.6.1.1 Allgemeine Eigenschaften ruhender Flüssigkeiten

Zusammendrückbarkeit oder Kompressibilität. Bekanntlich müssen Flüssigkeiten in Gefäßen aufbewahrt werden. Im Gegensatz zu festen Körpern haben sie demnach keine eigene feste Gestalt, sondern passen sich den jeweiligen Gefäßformen an. Sie besitzen daher auch keine Formelastizität, sondern nur eine Volumenelastizität.

Das bedeutet: Unter der Einwirkung einer äußeren Druckänderung dp ändern sie ihr Volumen um dV , nehmen das Ausgangsvolumen V nach Verschwinden der Druckänderung jedoch wieder ein. Ein Maß für die Volumenänderung ist die Zusammendrückbarkeit oder Kompressibilität.

Definition:

$$\text{Kompressibilität} = - \frac{\text{relative Volumenänderung}}{\text{dazu erforderliche Druckänderung}} \quad \chi = - \frac{1}{V} \frac{dV}{dp}^{2)}$$

¹⁾ Nach Blaise Pascal (1623 bis 1662).

²⁾ Das Minuszeichen wird eingeführt, um χ positive Werte zu geben, denn dV/dp ist ja immer negativ.

Die Kompressibilität von Flüssigkeiten ist rund 10 bis 100mal so groß wie die von festen Körpern. Wie Tafel 1.121 zeigt, ist sie jedoch noch immer so klein, dass sie sehr häufig zu vernachlässigen ist. Zum Beispiel benötigt man rund $2 \cdot 10^5$ Pa, um das Volumen von Wasser um 1 % zu verkleinern. Daher gilt

Tafel 1.121 Kompressibilität von Flüssigkeiten in $1/10^3$ h Pa

Quecksilber	$4 \cdot 10^{-6}$
Glycerin	$2,1 \cdot 10^{-5}$
Wasser	$5 \cdot 10^{-5}$
Alkohol	$1,1 \cdot 10^{-4}$

Flüssigkeiten haben zwar wie feste Körper ein bestimmtes Volumen, jedoch keine feste Gestalt.

Das liegt daran, dass die einzelnen Flüssigkeitsmoleküle¹⁾ zwar recht beträchtliche Zusammenhangskräfte aufeinander ausüben, jedoch gleichzeitig fast frei gegeneinander verschiebbar sind (s. Abschn. 1.6.1.5).

Freie Flüssigkeitsoberflächen. Füllt eine Flüssigkeit ein Gefäß nicht vollständig aus, so hat sie eine freie Oberfläche. Diese ist dann in Ruhe, wenn die aus äußeren und Zusammenhangskräften resultierenden Kräfte, die jeweils an den Oberflächenmolekülen angreifen, keine Komponenten parallel zur Oberfläche haben, also senkrecht auf die Oberfläche wirken.

Eine freie Flüssigkeitsoberfläche stellt sich an jeder Stelle immer senkrecht zu den jeweils auf ihre Moleküle wirkenden Kräfte ein, die aus äußeren und Zusammenhangskräften resultieren.

1.6.1.2 Druckausbreitung

In dem in Bild 1.122 gezeichneten Gefäß befindet sich eine nicht der Schwerkraft unterliegende Flüssigkeit, die es voll ausfüllt. Verschiebt man mit Hilfe der Kraft F_1 den Kolben 1 mit der Fläche A_1 reibungsfrei um das Wegstück s_1 , so muss wegen der oben besprochenen Volumenbeständigkeit der ebenfalls reibungsfrei bewegliche Kolben 2 mit der Fläche A_2 so weit herausgedrückt werden, dass die Volumina $A_1 s_1$ und $A_2 s_2$ einander gleich sind. Kolben 2 kann sich dabei gegen die Kraft F_2 bewegen, die so groß ist, dass die am Kolben 1 angewandte Arbeit $F_1 s_1$ gleich der abgegebenen Arbeit $F_2 s_2$ ist. Dividiert man $F_1 s_1 = F_2 s_2$ durch $A_1 s_1 = A_2 s_2$, so folgt $F_1/A_1 = F_2/A_2$ und wegen $p = F/A$ auch $p_1 = p_2$. Da die Lage der beiden Kolben zueinander beliebig ist, lässt sich verallgemeinern:

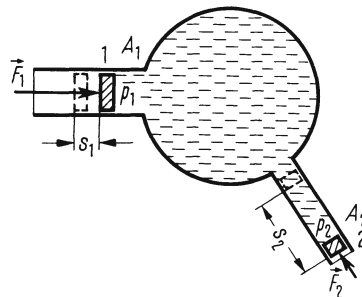


Bild 1.122 Druckausbreitung

¹⁾ In diesem Abschnitt genügt das Modell des chemisch einheitlichen kleinsten Teilchens des jeweiligen Stoffes.

Der Druck in einer Flüssigkeit, auf welche die Schwerkraft nicht oder vernachlässigbar wenig wirkt, ist überall gleich groß.

Anwendungen. Die gleichmäßige Druckausbreitung nutzt man in der Flüssigkeitspresse (Hydraulische Presse, Bild 1.123), dem Wagenheber, in Bremsen und dem Druckwandler (Bild 1.124) (z.B. als Messbereichswandler für Druckmesser) aus.

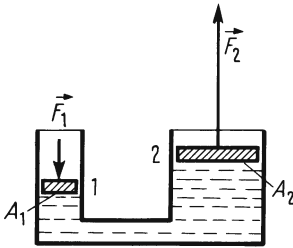


Bild 1.123 Hydraulische Presse

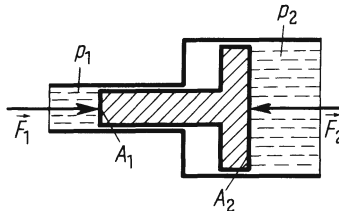


Bild 1.124 Druckwandler
 $p_1 > p_2$; $F_1 = F_2$

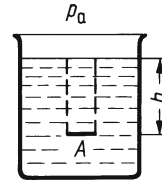


Bild 1.125 Zur Berechnung des Schweredruckes

1.6.1.3 Schweredruck

Auf der Erdoberfläche wirkt auf jede Flüssigkeit die Schwerkraft. Zu dem beispielsweise durch einen Kolben erzeugten Druck p_a kommt daher noch derjenige hinzu, der von der Gewichtskraft der höheren Flüssigkeitsschichten auf die tiefer liegenden Schichten ausgeübt wird. Wir berechnen ihn anhand von Bild 1.125. Auf das waagerechte Flächenstück A in der Tiefe h unter der Oberfläche drückt die Gewichtskraft F_G der darüber liegenden Flüssigkeitssäule, deren Volumen $V = A h$ ist. Hat die Flüssigkeit die Dichte ρ , so ist $F_G = \rho g V = \rho g A h$, und mit $p = F_G/A$ wird der

Schweredruck in der Tiefe h

$$p = \rho g h$$

Zu ihm addiert sich stets der auf die Flüssigkeitsoberfläche wirkende Druck p_a .

Der Wasserdruck z.B. beträgt in 10 m Tiefe

$$p = \rho g h + p_a = 10^{-3} \text{ kg/cm}^3 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 10^3 \text{ cm} + p_a = 9,81 \text{ N/cm}^2 + p_a \approx 10^5 \text{ Pa} + p_a,$$

in 20 m Tiefe $2 \cdot 10^5 \text{ Pa} + p_a$ usw.

Auch der Schweredruck hat in der Tiefe h nach allen Richtungen, also auch nach oben und den Seiten, den gleichen Betrag.

Bodendruck in beliebig geformten Gefäßen

□ **Versuch 19** (Bild 1.126). Drei verschieden geformte, unten offene Gefäße 1, 2 und 3 mit gleicher Bodenfläche A werden nacheinander durch eine bewegliche Bodenplatte 4 verschlossen, die über den Hebel 5 immer mit der gleichen Kraft F_G angedrückt wird. Man kann alle drei Gefäße jeweils nur bis zur gleichen Höhe h mit Wasser füllen. Wird dies überschritten, so überwiegt jeweils die Bodendruckkraft pA die Kraft F_G , und es tritt unten Wasser aus. □

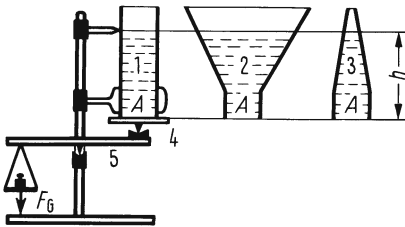


Bild 1.126 Bodendruck in verschiedenen Gefäßen, hydrostatisches Paradoxon

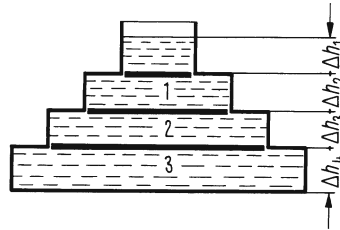


Bild 1.127 Zur Erklärung des hydrostatischen Paradoxons

Da alle Gefäße die gleiche Bodenfläche A haben, muss trotz verschiedener Wassermengen in der gleichen Tiefe h der gleiche Bodendruck herrschen. Man nennt diese Erscheinung das hydrostatische Paradoxon. Zur Erklärung denken wir uns z.B. Gefäß 3 aus einzelnen Zylindern mit der Höhe Δh bestehend (Bild 1.127), die durch dünne Kolben gegeneinander verschlossen sind. Dann drückt Kolben 1 mit dem Druck der über ihm befindlichen Flüssigkeitssäule $\Delta p_1 = \rho g \Delta h_1$ auf den zweiten Zylinder. Auf Kolben 2 wirkt also schon $\Delta p_1 + \rho g \Delta h_2$ usw. Am Boden ist schließlich der Druck

$$p = \rho g (\Delta h_1 + \Delta h_2 + \Delta h_3 + \Delta h_4) = \rho g h.$$

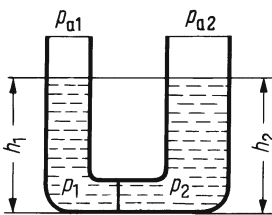
Zusammengefasst heißt das:

Der Schweredruck hängt nur von der Flüssigkeitstiefe h und nicht von der Gefäßform ab.

Verbundene Gefäße. Aus dem vorstehenden Satz und der Tatsache, dass der Druck in einer bestimmten Tiefe der Flüssigkeit nach allen Seiten gleich groß ist, folgt:

In mehreren mit der gleichen Flüssigkeit gefüllten, unterhalb des Flüssigkeitsspiegels verbundenen Gefäßen steht die Flüssigkeit bei gleichem äußeren Druck auf deren Spiegel gleich hoch (Bild 1.128).

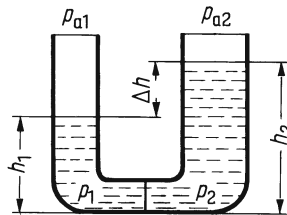
Anwendungen. Wasserleitung, Schlauchwaage und Flüssigkeitsdruckmesser sind verbundene Gefäße.



$$p_1 = \rho g h_1 + p_{a1} = p_2 = \rho g h_2 + p_{a2}$$

bei $p_{a1} = p_{a2}$ ist $h_1 = h_2$

Bild 1.128 Verbundene Gefäße



$$p_1 = \rho g h_1 + p_{a1} = p_2 = \rho g h_2 + p_{a2}$$

$$\rho g \Delta h = \rho g (h_2 - h_1) = p_{a1} - p_{a2}$$

Bild 1.129 Flüssigkeitsmanometer

Druckmesser (Manometer)

Flüssigkeitsmanometer. Ihre Wirkungsweise beruht auf den Gesetzen für verbundene Gefäße. Sind nämlich, wie in Bild 1.129 gezeichnet, die äußeren Drücke p_{a1} und p_{a2} einander

nicht gleich, so stehen die Flüssigkeitsspiegel nicht gleich hoch, und es ist $\rho g \Delta h = p_{a1} - p_{a2}$. Man kann mit einem solchen Flüssigkeitsmanometer also Druckdifferenzen messen.

Üblich sind Wassermanometer und Quecksilbermanometer. Oft gab man früher die Druckdifferenz dann direkt in mm Wassersäule, mm WS, oder mm Quecksilbersäule, mm HgS, an.

Membranmanometer. Bei diesen Geräten wird mit Hilfe eines Kraftmessers direkt die Druckkraft auf eine Membran gemessen (Bild 1.130). Auch diese Geräte zeigen die Differenz der Drücke auf beide Membranseiten an.

Macht man eine Seite luftleer, so dass dort kein Druck herrscht, so messen die Manometer den sog. absoluten Druck.

1.6.1.4 Durch Schweredruck erzeugte Kräfte auf die Gefäßwände

Bodendruckkraft. Da der Bodendruck nur von der Flüssigkeitstiefe abhängt, gilt für eine horizontale Bodenfläche A_B (Bild 1.131)

Bodendruckkraft

$$F_B = A_B h_{\text{Ges}} \rho g$$



Bild 1.130 Membranmanometer

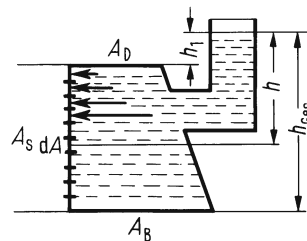


Bild 1.131 Druckkräfte auf die Gefäßwand

Aufdruckkraft. Das Gleiche gilt für die Aufdruckkraft auf den Deckel mit der Fläche A_D (Bild 1.131):

Aufdruckkraft

$$F_D = A_D h_1 \rho g$$

Ihre Berücksichtigung ist z.B. bei oben geschlossenen Gefäßformen sehr wichtig.

Seitendruckkraft. Sie ergibt sich unter Berücksichtigung der Tatsache, dass der Schweredruck mit der Tiefe zunimmt. Zur Berechnung denkt man sich die Seitenfläche A_s in viele waagerechte Streifen zerteilt (Bild 1.131). Die Kraft auf einen Streifen mit der Fläche dA in der Tiefe h ist $dF = \rho g h dA$. Durch Summieren erhält man die gesamte Seitendruckkraft

$$F_s = \int_{h=h_1}^{h_{\text{Ges}}} \rho g h dA = \rho g \int_{h=h_1}^{h_{\text{Ges}}} h dA. \text{ Das Integral nennt man das statische Moment } S = A_s h_s$$

der Seitenfläche in Bezug auf den Flüssigkeitsspiegel, wobei h_s der Schwerpunktabstand der Fläche vom Spiegel ist. Daher gilt:

Seitendruckkraft

$$F_s = S \rho g = A_s h_s \rho g^{1)}$$

Der Angriffspunkt von F_s , der sog. Druckmittelpunkt, ist jedoch nicht der Schwerpunkt der Fläche A_s . Er liegt in der Tiefe h_D . Es muss $F_s h_D$ gleich der Summe der Drehmomente der Einzelkräfte sein, also

$$F_s h_D = \int_{h=h_1}^{h_{\text{Ges}}} h dF = \int_{h=h_1}^{h_{\text{Ges}}} h \rho g h dA = \rho g \int_{h=h_1}^{h_{\text{Ges}}} h^2 dA = \rho g I$$

Dabei ist I das Flächenträgheitsmoment der Fläche A_s in Bezug auf den Flüssigkeitsspiegel¹⁾. Also gilt

$$h_D = \frac{\rho g I}{F_s} = \frac{\rho g I}{A_s h_s \rho g} = \frac{I}{A_s h_s}$$

Seitendruckkräfte können bei Staudämmen beträchtliche Werte annehmen.

Auftriebskraft. Ein Körper im Innern einer Flüssigkeit erfährt durch den Schweredruck eine nach oben gerichtete Kraft, die sog. Auftriebskraft \vec{F}_A . Um ihren Betrag zu ermitteln, denken wir uns vorübergehend den eingetauchten Körper durch ein gleich großes Flüssigkeitsvolumen von gleicher Gestalt ersetzt. Da dieses sich von der umgebenden Flüssigkeit nicht unterscheidet, ist es natürlich in Ruhe. Wir schließen daraus, dass alle auf das betrachtete Flüssigkeitsvolumen wirkenden Druckkräfte eine resultierende Gesamtkraft \vec{F}_A ergeben, welche die auf das Flüssigkeitsvolumen wirkende Gewichtskraft \vec{F}_{GF1} kompensiert (Bild 1.132). – Mit größerer Tiefe nehmen die auf die einzelnen Flächenelemente des betrachteten Volumens wirkenden Schweredruckkräfte zu. Ihre Horizontalkomponenten heben sich auf. Der Überschuss aller nach oben gerichteten Vertikalkomponenten über die nach unten gerichteten ergibt die Kraft \vec{F}_A . – Bringt man statt der Flüssigkeit nun wieder den Körper an die gleiche Stelle, ändert sich an der Druckverteilung und damit am Betrag der Auftriebskraft F_A nichts. Er bleibt gleich $F_{\text{GF1}} = V_K \rho_{\text{Fl}} g$, wobei V_K das Volumen des eingetauchten Körpers, ρ_{Fl} jedoch die Dichte

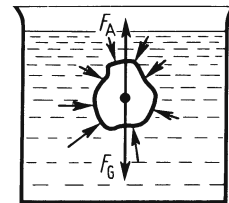


Bild 1.132 Archimedisches Prinzip

¹⁾ Zur Berechnung von statischen Momenten und Flächenträgheitsmomenten s. z.B. [1].

der Flüssigkeit ist. Taucht der Körper nicht ganz ein, so ist V_K nur das in der Flüssigkeit befindliche Teilvolumen. Es gilt immer das

Gesetz des Archimedes (220 v.Chr.). Ein Körper, der in eine Flüssigkeit eintaucht, erfährt eine nach oben gerichtete Auftriebskraft, deren Betrag gleich demjenigen der Gewichtskraft ist, die auf das verdrängte Flüssigkeitsvolumen wirkt.

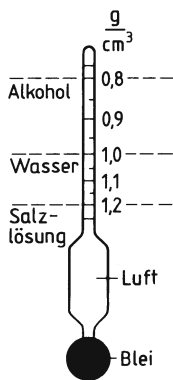


Bild 1.133 Senkwaage

Ein Körper schwebt in der Flüssigkeit, wenn die auf ihn wirkende Auftriebskraft \vec{F}_A den gleichen Betrag wie die auf ihn wirkende Gewichtskraft \vec{F}_G hat. Ist $F_A > F_G$, steigt er nach oben, bis nur noch so viel von ihm eintaucht, dass wieder $F_A = F_G$ ist. Ist $F_A < F_G$, sinkt er zu Boden.

Anwendungen. Durch Auftrieb schwimmen die Schiffe. Dichten von Flüssigkeiten werden mit der Senkwaage oder Senkspindel bestimmt (Aräometer) (Bild 1.133). Diese taucht so tief in die zu messende Flüssigkeit ein, bis die Auftriebskraft gleich ihrer Gewichtskraft ist. An einer Skala kann direkt die Dichte der Flüssigkeit abgelesen werden.

Aufgaben zu Abschn. 1.6.1.1 bis 1.6.1.4

1. Bleche kann man durch Unterwasserexplosionen verformen. Welche Flüssigkeitseigenschaften nutzt man dazu aus?
2. Warum kann ein Taucher mit einem Schnorchel (das ist ein an die Wasseroberfläche ragendes Rohr zum Atmen) höchstens noch in etwa 0,5 m Tiefe atmen?
3. Ein Schmuckstück wiegt in Luft $9 \cdot 10^{-2}$ N, unter Wasser $8,2 \cdot 10^{-2}$ N. Ist es aus Gold ($\rho = 19,3 \text{ g/cm}^3$) oder dünn vergoldetem Silber ($\rho = 10,5 \text{ g/cm}^3$)?
4. Ein Holzquader wird dicht schließend auf den ebenen Grund eines mit Wasser gefüllten Beckens gedrückt. Was geschieht, wenn er losgelassen wird?
5. Ein zylindrischer Vergaserschwimmer mit dem mittleren Durchmesser 50 mm und der mittleren Höhe 40 mm aus sehr dünnem Messingblech ($\rho_M = 8,6 \text{ g/cm}^3$) soll mit einem Viertel seiner Höhe aus dem Benzin ($\rho_B = 0,75 \text{ g/cm}^3$) herausragen. Wie dick muss das Blech sein?
6. Wie groß ist die Seitendruckkraft F_s auf ein rechteckiges Fenster mit der Breite $b = 30$ cm und der Höhe $h = 20$ cm, dessen Oberkante sich 20 cm unter dem Wasserspiegel in einem Aquarium befindet, und in welcher Tiefe h_D liegt der Druckmittelpunkt? $I = (1/12) A h^2 + A h_s^2$.

1.6.1.5 Molekülkräfte in Flüssigkeiten

Zusammenhangskräfte (Kohäsion) und Anhangskräfte (Adhäsion)

Kräfte, die einen einzigen homogenen Körper zusammenhalten, nennt man Zusammenhangskräfte, solche, die zwischen zwei Körpern wirken, Anhangskräfte. Beide sind Molekularkräfte; sie treten sowohl bei Festkörpern als auch bei Flüssigkeiten auf. Als Beispiel für die Anhangskraft zwischen zwei Festkörpern diene z.B. das feste

Zusammenhaften zweier auf etwas 10^{-4} mm (!) plan geschliffener „Endmaße“ oder auch das Anhaften von Kreide an der Tafel. Wir wollen hier jedoch nur die Zusammenhängekräfte in Flüssigkeiten und die Anhangskräfte zwischen einer Flüssigkeit und einem Festkörper behandeln.

Auf das Wesen der Molekularkräfte soll hier nicht näher eingegangen werden. Wir begnügen uns damit, ihre Auswirkungen zu besprechen.

Oberflächenspannung oder Oberflächenenergiedichte

Man kann bekanntlich ein Glas vorsichtig so weit mit Wasser füllen, dass dieses in der Mitte deutlich höher als der Glasrand steht. Es entsteht eine leicht gewölbte Wasseroberfläche, die so aussieht, als ob eine dünne Haut darüber gespannt wäre, welche die Oberflächenmoleküle festhält. Diese Erscheinung nennt man Oberflächenspannung. Man versteht sie anhand von Bild 1.134.

Im Innern der Flüssigkeit wirken auf ein Molekül von seinen Nachbarn aus nach allen Seiten gleich große Zusammenhängekräfte, die sich insgesamt aufheben. In der Nähe der Oberfläche nehmen die nach außen gerichteten Kräfte jedoch ab, um schließlich ganz zu verschwinden. Um Moleküle aus dem Inneren an die Oberfläche zu bringen, Letztere also zu vergrößern, muss gegen die nach innen resultierenden Zusammenhängekräfte Arbeit geleistet werden. Die Oberflächenmoleküle besitzen gegenüber dem Inneren also potentielle Energie, die sog. Oberflächenenergie. Ein Maß für die Änderung dieser Energie pro Änderung der Oberfläche ist die Oberflächenenergiedichte.

Definition:

$$\text{Oberflächenenergiedichte} = \frac{\text{Änderung der Oberflächenenergie}}{\text{Änderung der Oberfläche}} \quad \sigma = \frac{\Delta W}{\Delta A}$$

mit der Einheit J/m^2 oder N/m .

Die Oberflächenenergiedichte heißt auch Oberflächenspannung. Sie hat für verschiedene Flüssigkeiten unterschiedliche Werte und hängt außerdem von der Temperatur ab (s. Tafel 1.135).

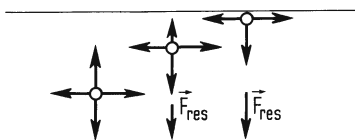


Bild 1.134 Oberflächenspannung. F_{res} sind nach innen gerichtete resultierende Kräfte.

Tafel 1.135 Oberflächenspannungen oder Oberflächenenergiedichten gegen Luft in 10^{-2} N/m

Quecksilber	50 bei 18 °C
Wasser	7,55 bei 0 °C
Wasser	7,25 bei 20 °C
Wasser	6,2 bei 80 °C
Glyzerin	6,4 bei 18 °C
Benzol	2,92 bei 18 °C
Äthyläther	1,7 bei 18 °C

Messung der Oberflächenspannung mit der Bügelmethode (Bild 1.136). Ein dünner Drahtbügel 1 mit quergespanntem Draht 2 mit der Länge L wird aus der Flüssigkeit herausgezogen. Für jedes Wegstück Δs vergrößert sich die Flüssigkeitsoberfläche um $2 \cdot L \Delta s$ (vorn und hinten!), ihre Energie also um $\Delta W = \sigma 2L \Delta s$.

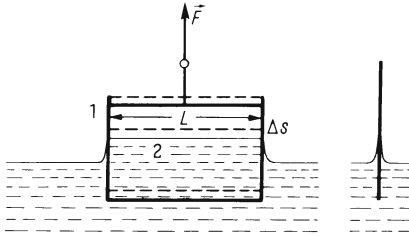


Bild 1.136 Bügelmethode zur Messung der Oberflächenspannung

Diese muss von der Kraft F als Arbeit $\Delta W = F \Delta s$ aufgebracht werden. Gleichsetzen und Umformen führt zu

$$\sigma = \frac{F}{2L}$$

Im Allgemeinen misst man die Kraft F (angezeigte Kraft minus Gewicht- und Auftriebskraft des Drahtbügels) kurz vor dem Abreißen der Flüssigkeitshaut. Diese

Methode eignet sich nur für benetzende Flüssigkeiten. Allgemein brauchbar ist dagegen die Kapillarität (s. u.).

Form der Oberfläche ohne äußere Kräfte. Eine Flüssigkeitsoberfläche ist stabil, wenn ihre potentielle Energie ein Minimum ist. Daher wird jede freie Flüssigkeitsoberfläche den kleinstmöglichen Betrag annehmen. Bei gegebenem Volumen ist der Körper mit kleinster Oberfläche eine Kugel. Quecksilbertropfen oder Gasbläschen im Innern einer Flüssigkeit haben daher Kugelform.

Das Streben nach kleinster Oberfläche und damit kleinster Oberflächenenergie zeigt sehr anschaulich der folgende Versuch.

□ **Versuch 20** (Bild 1.137). In ein flaches mit Wasser gefülltes Glasschälchen werden kleine Quecksilbertropfchen gegeben. Sofort beginnt hier und dort eine Vereinigung, bis nur noch ein einziger großer Tropfen vorhanden ist. „Die Großen wachsen auf Kosten der Kleinen“. □

Die Deutung ist einfach, wenn man sich klar macht, dass die Oberfläche und damit die Oberflächenenergie des großen Tropfens bei dem gleichen Volumen kleiner als die der vielen kleinen Tröpfchen ist. Man findet jedoch noch eine andere interessante Erklärung. Dazu berechnen wir den

Überdruck in einer Flüssigkeitskugel. Wir denken uns, wir würden eine Kugel mit dem Radius r (Bild 1.138) geringfügig auf $r + dr$ vergrößern. Dann wächst auch die Oberfläche um dA und damit die Oberflächenenergie um dW . Diese muss als Arbeit gegen die nach

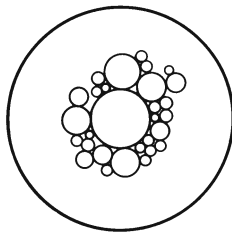


Bild 1.137 Vereinigung von Quecksilbertropfen

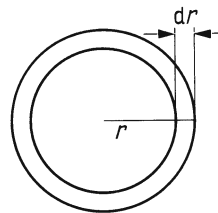


Bild 1.138 Druck in einer Flüssigkeitskugel

innen gerichteten Molekülkräfte geleistet werden. Mit dem von den Molekülkräften verursachten Überdruck p ist diese Arbeit

$$dW = F dr = pA dr = p4 r^2 \pi dr.$$

Andererseits ist $dW = \sigma dA = \sigma 8 r \pi dr$. Beide Arbeiten müssen einander gleich sein.

$p4 r^2 \pi dr = \sigma 8 \pi r dr$ führt zu dem Ergebnis:

Der Überdruck in einer Flüssigkeitskugel oder einer Hohlkugel im Inneren einer Flüssigkeit ist

$$p = \frac{2\sigma}{r}$$

– Für eine Hohlkugel (z. B. eine Gasblase in einer Flüssigkeit) gelten ja die gleichen Überlegungen. – Der Überdruck ist also um so kleiner, je größer r ist und umgekehrt. Demnach „pumpen die kleinen Kugeln die großen auf.“⁽¹⁾

Grenzflächenspannung, Kapillarität. An einer Gefäßwand wirken auf die Flüssigkeitsmoleküle auch die von den Molekülen der Wand ausgeübten Adhäsionskräfte. Ist die auf ein Flüssigkeitsmolekül ausgeübte Adhäsionskraft sehr viel größer als die in das Flüssigkeitsinnere wirkende Kohäsionskraft, so breitet sich die Flüssigkeit auf der Wand vollständig aus, sie „benetzt“ die Wand (z.B. Wasser auf einer sauberen Glaswand). Sind Adhäsionskräfte \vec{F}_A und Kohäsionskräfte \vec{F}_K miteinander vergleichbar, so stellen sich je nach deren Beträgen die in Bild 1.139 gezeichneten Fälle ein. In Bild 1.139a überwiegt die Adhäsionskraft \vec{F}_A , in Bild 1.139b die Kohäsionskraft \vec{F}_K .

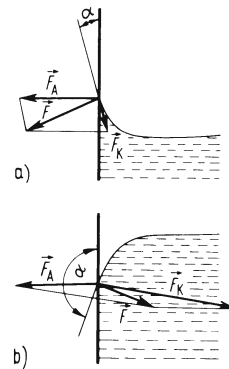


Bild 1.139 Anhaften von Flüssigkeiten an einer Wand

Die Oberfläche steht senkrecht zur resultierenden Kraft \vec{F} . Den eingezeichneten Winkel α zwischen Oberfläche und Wand nennt man den Randwinkel²⁾. Besonders deutlich wird diese Erscheinung, wenn man in die Flüssigkeit ein enges Rohr, eine sog. „Kapillare“ taucht (Bild 1.140). Die Flüssigkeit stellt sich in dem Rohr so ein, dass der Schweredruck $p_s = h \rho g$ und der von den Zusammenhangskräften herrührende Druck $p_K = 2 \sigma / r$ (s. o.) sich das Gleichgewicht halten. Die Druckkräfte sind immer in das Innere der Kugel (hier der

¹⁾ Von der Einwirkung der Schwerkraft wurde hier abgesehen.

²⁾ Die Schwerkraft ist klein gegen F_A und F_K und kann daher vernachlässigt werden.

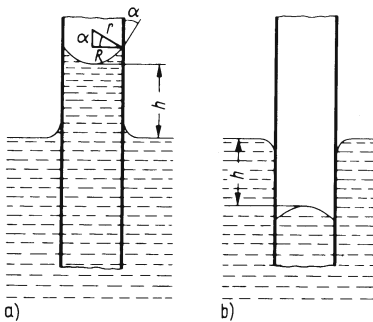


Bild 1.140 Kapillarität

Teilkugel) gerichtet. Also steigt die Flüssigkeit in dem in Bild 1.140a gezeichneten Fall nach oben, im Fall gemäß Bild 1.140b wird sie herabgedrückt. Beide Erscheinungen nennt man Kapillarität. Die Steighöhe oder Sinktiefe h ergibt sich aus der Bedingung $p_s = p_K$. Dann wird nämlich (mit R als dem Radius des Rohres) $\rho g h = 2 \sigma / r = (2 \sigma \cos \alpha) / R$ und schließlich die

Steighöhe oder Sinktiefe

$$h = \frac{2 \sigma \cos \alpha}{\rho g h}$$

Bei Wasser und Glas ist $\alpha \approx 0^\circ$, sodass $\cos \alpha \approx 1$ ist; bei Quecksilber und Glas ist $\alpha \approx 140^\circ$, sodass $\cos \alpha \approx -0,75$ ist.

Mit Hilfe der Kapillarität lassen sich Oberflächenspannungen messen (s. Aufgabe 1).

Anwendungen. Die Kapillarität bewirkt den Transport von Brennflüssigkeiten in einem Docht. In der verwirbelten Strömung um Turbinenschaufeln oder Schiffspropeller entstehen oft Flüssigkeitshohlräume, in deren Oberflächen Energie gespeichert ist. – Diese Erscheinung gehört zum Gebiet der sog. Kavitation. Letztere umfasst alle Vorgänge, die zur Bildung von Hohlräumen in Flüssigkeiten führen. Dies geschieht immer dann, wenn der statische Druck in der Flüssigkeit kleiner als der sog. Sättigungsdampfdruck (s. Abschn. 2.4.4 und Abschn. 2.4.5) ist, z.B. bei hohen Strömungsgeschwindigkeiten (s. Aufg. 3 zu Abschn. 1.6.3.1) oder beim „Sieden“ (s. Abschn. 2.4.5.3). – Wenn die Hohlräume vom Wasserdruck wieder zusammengedrückt werden, kann sich die Oberflächenenergie auf wenige Moleküle konzentrieren, sodass örtlich sehr hohe Temperaturen entstehen. Diese führen an den Metallteilen zu Materialabtragung.

Aufgaben zu Abschn. 1.6.1.5

1. Wie groß ist die Oberflächenspannung von Alkohol, wenn dieser in einer Kapillare mit dem Radius $R = 0,3 \text{ mm}$ $h = 19 \text{ mm}$ hoch steht? (Randwinkel $\alpha = 0^\circ$, Dichte $\rho = 0,79 \text{ g/cm}^3$).
2. Wie groß ist der Überdruck a) in einem Quecksilbertröpfchen mit dem Radius $R = 2 \text{ }\mu\text{m}$ ($\sigma_{\text{Hg}} = 0,5 \text{ N/m}$), b) in einer Seifenblase mit dem Radius $R = 30 \text{ mm}$ ($\sigma = 0,03 \text{ N/m}$)?

1.6.2 Ruhende Gase

1.6.2.1 Allgemeine Eigenschaften ruhender Gase

Gase besitzen weder eine feste Gestalt noch ein bestimmtes Volumen. Sie nehmen vielmehr jeden zur Verfügung stehenden Raum ein¹⁾.

Das lässt darauf schließen, dass zwischen den einzelnen Gasmolekülen praktisch keine Zusammenhangskräfte mehr wirksam sind. Daher besitzt eine bestimmte Gasmenge z.B. auch keine Oberfläche mit Oberflächenspannung.

¹⁾ Von der Schwerkraft sei hier vorläufig abgesehen (s. Abschn. 1.6.2.2).

Kompressibilität (Zusammendrückbarkeit) von Gasen

Verhindert man die freie Ausdehnung eines Gases durch Einschluss in ein Gefäß, so übt das Gas auf die Gefäßwände einen Druck aus. Demnach müssen im Gleichgewichtszustand die Wände den gleichen Druck auf das Gas ausüben. Den Gasdruck misst man mit einem der in Abschn. 1.6.1.3 behandelten Manometer. Ändert man das Gefäßvolumen, so ändert sich auch der Druck der eingeschlossenen Gasmenge. Die Abhängigkeit des Druckes vom Volumen ermittelt man mit dem folgenden

□ **Versuch 21** (Bild 1.141). Das Volumen einer abgeschlossenen Gasmenge mit der Masse m wird ständig verkleinert und der zugehörige Gasdruck mit dem Manometer gemessen. Dabei wird die Temperatur des Gases konstant gehalten. Den Vorgang wiederholt man mit verschiedenen Gasmassen m . Diese bestimmt man dadurch, dass man einmal das Versuchsgefäß leer gepumpt und einmal mit der betreffenden Gasfüllung sorgfältig wägt. □

Man erhält einen schon von Boyle (1660) und Mariotte (1667) erstmalig ermittelten Zusammenhang:

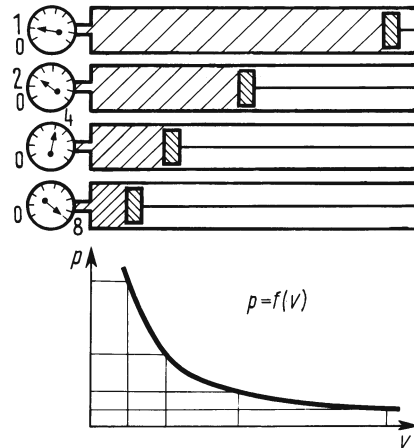


Bild 1.141 Druck eines Gases als Funktion seines Volumens bei konstanter Temperatur

Boyle-Mariottesches Gesetz: Bei konstanter Temperatur T ist der Druck p einer abgeschlossenen Gasmenge ihrer Masse m direkt und ihrem Volumen V umgekehrt proportional.

$$p = \text{const} \frac{m}{V} \quad \text{bei} \quad T = \text{const} \quad (1.43)$$

Die Konstante hängt von der jeweiligen Gasart und der Temperatur (s. Abschn. 2.2.3.2) ab. Dieses Gesetz gilt sehr gut z.B. für Sauerstoff, Stickstoff, Wasserstoff und Helium, bei Zimmertemperatur weniger gut z.B. für Kohlendioxid. Ein Gas, das dem Boyle-Mariotteschen Gesetz streng gehorcht, nennt man ein ideales Gas. Gl. (1.43) lässt noch folgende Zusammenhänge erkennen.

$m/V = \rho$ ist die Dichte des Gases, ihr Kehrwert $1/\rho = V/m = V_s$ das sog. spezifische Volumen. Verwendet man diese beiden Größen, so folgt aus Gl. (1.43)

Dichte ρ und Druck p eines idealen Gases sind bei konstanter Temperatur T einander proportional.

$$p = \text{const} \rho \quad \text{bei} \quad T = \text{const} \quad (1.44)$$

Bei konstanter Temperatur T ist das Produkt aus Druck p und spezifischem Volumen V_s eines idealen Gases konstant.

$$p V_s = \text{const} \quad \text{bei} \quad T = \text{const} \quad (1.45)$$

Schließlich ergibt sich mit $V = \text{const } m/p$ (Umstellung aus Gl. (1.43)) die Volumenänderung dV bei Druckänderung dp als $dV = -\text{const } m dp/p^2$ und damit die

Kompressibilität von idealen Gasen bei konstanter Temperatur T

$$\chi = \frac{-dV}{V dp} = \frac{1}{p} \quad \text{bei } T = \text{const} \quad (1.46)$$

Das ist ein interessantes Ergebnis. Denn es besagt:

Die Kompressibilität eines idealen Gases konstanter Temperatur hängt nur vom Druck und nicht von der Gasart ab.

Tafel 1.141 Normdichte (bei 0 °C und 1013 hPa) einiger Gase in kg/m³

Luft	1,293
Sauerstoff O ₂	1,429
Stickstoff N ₂	1,252
Wasserstoff H ₂	0,090
Kohlendioxid CO ₂	1,977
Chlor	3,220
Helium	0,179
Stadtgas	0,688

Normdichte von Gasen. Da gemäß Gl. (1.44) die Dichte eines Gases vom Druck und der Temperatur abhängt, vergleicht man die Dichten verschiedener Gase bei fest vereinbarten Werten für diese beiden Größen. Man wählt für den Druck 1013 hPa und die Temperatur 0 °C.

Die in diesem Zustand gemessene Dichte nennt man Normdichte. Tafel 1.141 zeigt einige Werte.

1.6.2.2 Lufthülle der Erde

Das Vorhandensein der Lufthülle der Erde verdanken wir der Schwerkraft. Denn ohne diese hätten sich die Luftmoleküle längst, wie jedes Gas, über den ihnen zur Verfügung stehenden Raum, in diesem Falle den Weltraum, ausgebreitet. Aufgrund der Erdanziehung jedoch reicht die Lufthülle nur bis zu einer Höhe von etwa 500 km, wobei die Dichte nach oben sehr stark abnimmt, wie wir unten sehen werden.

Luftdruck

Wie in einer Flüssigkeit verursacht die Schwerkraft am Boden der Lufthülle einen Schweredruck, den Luftdruck. Auch er entsteht dadurch, dass die Gewichtskraft höherer Luftschichten auf die unteren Schichten drückt; er muss also oben niedriger sein als unten. Da – im Gegensatz zu Flüssigkeiten – in Gasen jedoch die Dichte proportional zum Druck ist, muss auch diese Größe nach oben abnehmen. Das muss bei der Berechnung des Luftdruckes berücksichtigt werden.

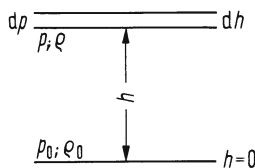


Bild 1.143 Zur Herleitung der barometrischen Höhenformel

Wir nehmen an, in einer dünnen Schicht dh sei die Änderung von ρ vernachlässigbar (Bild 1.143). Dann nimmt in ihr der Druck um $dp = -\rho g dh$ zu. Wegen Gl. (1.44) verhält sich die Dichte ρ in der Höhe h , also beim Druck p , zu der in der Höhe Null, also beim Druck p_0 , wie p zu p_0 . Also gilt

$$\rho/\rho_0 = p/p_0 \quad \text{oder} \quad \rho = \rho_0 p/p_0.$$

(Die Temperatur wird dabei als konstant angenommen.) Damit wird

$$dp = -\rho_0 \frac{p}{p_0} g dh$$

oder

$$dh = -\frac{p_0}{\rho_0 g} \frac{dp}{p}$$

Summiert man alle dh von 0 bis h , so erhält man mit

$$\int_0^h dh = -\frac{p_0}{\rho_0 g} \int_{p_0}^{p_h} \frac{dp}{p} \quad \text{schließlich} \quad h = -\frac{p_0}{\rho_0 g} \ln \frac{p_h}{p_0}$$

und damit durch Umstellung nach p_h die

Barometrische Höhenformel

$$p_h = p_0 e^{\frac{-\rho_0 g h}{p_0}}$$

Sie gibt den Druck p_h als Funktion der Höhe h bei konstanter Temperatur und Annahme einer von der Höhe unabhängigen Fallbeschleunigung an.

Für Luft von 0 °C gilt mit $\rho_0 = 1,293 \text{ kg/m}^3$ und $p_0 = 1013 \text{ hPa}$

$$p_h = p_0 e^{\frac{-h}{7,96 \text{ km}}} \quad (\text{s. Bild 1.144})$$

Der Luftdruck p_0 beträgt in Meereshöhe im Mittel 1013 hPa. Diesen Wert nennt man eine physikalische Atmosphäre. Die Druckänderung dp pro Höhenänderung dh ergibt sich in Meereshöhe zu

$$\begin{aligned} (dp/dh)_{h=0} &= -1013 \text{ hPa}/7,96 \text{ km} \\ &\approx (1/8) \text{ hPa/m.} \end{aligned}$$

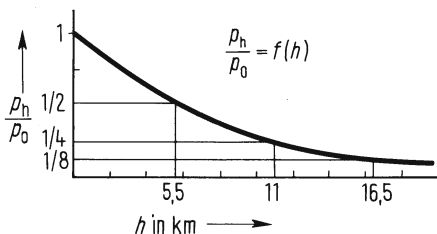


Bild 1.144 Luftdruck als Funktion der Höhe

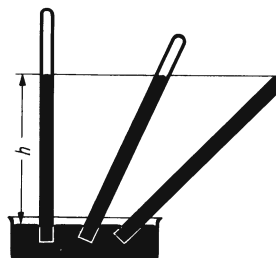


Bild 1.145 Nachweis des Luftdruckes nach Torricelli

□ **Versuch 22. Nachweis des Luftdruckes** (Bild 1.145). Eine einseitig zugeschmolzene, etwa 80 cm lange Glasröhre wird ganz mit Quecksilber gefüllt. Man verschließt sie dann mit dem Finger und taucht sie umgekehrt in eine Schale mit Quecksilber. Jetzt gibt man die Öffnung frei. Es fließt nur wenig Quecksilber aus. In der Röhre bleibt eine Säule von über

70 cm Höhe stehen. Die senkrechte Höhe h der Säule ändert sich auch bei Neigung des Rohres nicht, solange dessen geschlossenes Ende hoch genug gehalten wird. □

Offenbar hält der auf den unteren Quecksilberspiegel wirkende Luftdruck dem Schweredruck der Quecksilbersäule von der Höhe h das Gleichgewicht. Der Raum über der Quecksilbersäule heißt das Torricellische Vakuum. Er ist bis auf Quecksilberdampf mit einem Druck von etwa 10^{-3} hPa leer. Mit einem solchen Versuch gelang Torricelli im Jahre 1643 zum ersten Mal die Messung des Luftdruckes, dessen Kraftwirkung von Otto von Guericke (1602 bis 1686) etwa zur gleichen Zeit mit den „Magdeburger Halbkugeln“ demonstriert wurde.

Anwendungen. Die Abhängigkeit der Dichte vom Druck benutzt man bei Pressgasflaschen, die Gase bis zu einem Druck von etwa $3 \cdot 10^7$ Pa enthalten. Das in einer 40-Liter-Flasche enthaltene Gas nimmt z.B. bei einem Druck von 1013 Pa 12 000 Liter ein.

Der Schweredruck in Luft erzeugt eine (statische) Auftriebskraft. Man nutzt sie z.B. für Ballons aus. Außerdem ist sie für den „Zug“ in Öfen verantwortlich (erwärmte Luft hat eine geringere Dichte!). Bei genauen Wägungen in Luft muss der Auftrieb berücksichtigt werden.

Die Abhängigkeit des Luftdruckes von der Höhe benutzt man in barometrischen Höhenmessern. Das sind Druckmesser, deren Skala gleich in Metern geeicht ist. Wegen der wetterbedingten Luftdruckschwankungen muss ihr Nullpunkt ständig kontrolliert werden.

Der Luftdruck kann nur Wassersäulen von etwa 10 m Höhe das Gleichgewicht halten. Daher können Saugpumpen nicht aus größerer Tiefe fördern.

Aufgaben zu Abschn. 1.6.2

1. Zwei gleich große Pressluftflaschen haben den Druckunterschied $1,5 \cdot 10^5$ Pa. Verbindet man sie miteinander, stellt sich der gemeinsame Druck $4,5 \cdot 10^5$ Pa ein.

Wie groß sind beide Anfangsdrücke?

2. Einer Pressluftflasche von 40 Liter Inhalt mit dem Druck $5 \cdot 10^6$ Pa wird 1 m^3 Luft mit einem Druck von 10^5 Pa entnommen.

Auf welchen Betrag sinkt der Druck in der Flasche?

3. Die Dichte von Rauchgasen ist bei einer mittleren Temperatur von $150 \text{ }^\circ\text{C}$ im Innern eines Schornsteins $0,84 \text{ kg/m}^3$, die Dichte der kalten Luft $1,29 \text{ kg/m}^3$.

Welcher Druckunterschied folgt daraus für einen 30 m hohen Schornstein?

4. Wie groß ist der mittlere Luftdruck in München (540 m über Meereshöhe) und auf der Zugspitze (2963 m über Meereshöhe)? (Luftdruck in Meereshöhe 1013 hPa.)

5. Ein mit Wasserstoff gefüllter Wetterbeobachtungs-Ballon hat am Erdboden ($p_0 = 1013 \text{ hPa}$) die Tragkraft (Auftriebskraft minus Gewichtskraft der Gasfüllung) 19,62 N.

a) Wie ändert sich seine Tragkraft beim Aufstieg in große Höhen, wenn seine Hülle am Erdboden so schlapp und faltig ist, dass das Volumen des eingeschlossenen Gases beliebig zunehmen kann?

b) Bis in welche Höhe kann der Ballon steigen, wenn der Radius seiner kugelförmigen Hülle maximal auf 2 m anwachsen kann?

1.6.3 Strömende Flüssigkeiten und Gase

Die Gesetzmäßigkeiten strömender Gase können zusammen mit denen der Flüssigkeiten behandelt werden, wenn wir die Gase ebenfalls als praktisch inkompressibel betrachten. Diese Annahme ist erlaubt, wenn wir für Gase nur Strömungsgeschwindigkeiten bis etwa 50 m/s und Höhendifferenzen bis etwa 100 m zulassen, wie wir unten noch sehen werden.

Unter dem Begriff der Flüssigkeit sollen daher im Folgenden auch die Gase verstanden werden.

1.6.3.1 Ideale oder reibungsfreie stationäre Strömung

Die bei einer strömenden Flüssigkeit vorkommenden Erscheinungen sind für den Ingenieur immer dann interessant, wenn Flüssigkeiten an festen Körpern entlang strömen. Das ist der Fall bei einer Strömung durch Rohre oder um ein Hindernis, z.B. um die Tragflügel eines Flugzeuges.

Definition: Vernachlässigt man die an den Grenzflächen von Körpern und Flüssigkeit zwischen einzelnen Flüssigkeitsschichten auftretenden Reibungskräfte, so spricht man von reibungsfreier oder idealer Strömung.

Da sich viele wichtige Erscheinungen mit den Gesetzmäßigkeiten der idealen Strömung hinreichend beschreiben lassen, wollen wir zunächst nur diese behandeln. Wir nehmen zusätzlich an, die Strömung sei stationär.

Definition: Eine Strömung ist stationär, wenn alle Strömungsgrößen (Drücke, Strömungsgeschwindigkeiten usw.) nur vom Ort und nicht von der Zeit abhängen.

Zum Beispiel bleiben die in Bild 4.146 gezeichneten Geschwindigkeiten \vec{v}_1 , \vec{v}_2 und \vec{v}_3 an den Punkten P_1 , P_2 und P_3 bei einer stationären Strömung durch ein Rohr unverändert erhalten.

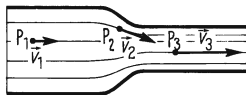


Bild 1.146 Zur Definition einer stationären Strömung

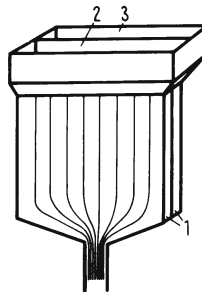


Bild 1.147 Strömungsapparat

Strombahnen und Stromlinien. Zur Veranschaulichung diene der folgende

□ **Versuch 23.** Bild 1.147 zeigt einen sog. Strömungsapparat. Dieser besteht im Wesentlichen aus zwei senkrecht im Abstand von etwa 1 mm stehenden an den Rändern dichten Glasplatten 1, zwischen die von oben durch eine Reihe von Löchern, die abwechselnd dem vorderen oder hinteren Vorratsbehälter 2 und 3 zugeordnet sind, klares und gefärbtes Wasser fließen kann. Dadurch kann man die Bahnen nebeneinander eintretender Flüssigkeitsteilchen verfolgen.

Die in der Strömung von einem Flüssigkeitsteilchen durchlaufene Bahn nennt man eine Strombahn (oft auch „Bahnlinie“).

Eine Kurve, deren Tangente in jedem Kurvenpunkt die dort vorhandene Geschwindigkeitsrichtung angibt, heißt Stromlinie.

Bei einer stationären Strömung stimmen Stromlinien und Strombahnen überein.

Wenn die Flüssigkeit nicht zu schnell strömt, beobachtet man, dass die Strombahnen sich zwar bei der Querschnittsverengung vor der Ausflussöffnung zusammendrängen, sich jedoch nicht vermischen oder kreuzen. □

Eine Strömung mit sich nicht kreuzenden Strombahnen heißt laminare Strömung.

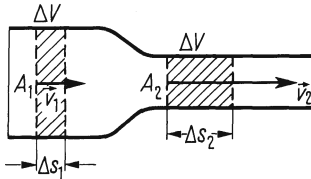


Bild 1.148 Zur Kontinuitätsgleichung

Ideale stationäre Strömung bei wechselndem Querschnitt. Da wir annehmen, die Flüssigkeit sei nicht zusammendrückbar, muss durch jeden Querschnitt eines Rohres (Bild 1.148) in der gleichen Zeit Δt das gleiche Volumen ΔV hindurchtreten.

Das ist nur möglich, wenn die Flüssigkeit im kleinen Querschnitt schneller strömt als im größeren.

An der Stelle 1 in Bild 1.148 ist $\Delta V = A_1 \Delta s_1 = A_1 v_1 \Delta t$, und an der Stelle 2 ist $\Delta V = A_2 \Delta s_2 = A_2 v_2 \Delta t$. Aus $A_1 v_1 \Delta t = A_2 v_2 \Delta t$ folgt nach Kürzen durch Δt die

Kontinuitätsgleichung

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad \text{oder} \quad v_1 : v_2 = A_2 : A_1 \quad (1.47)$$

Strömt eine ideale Flüssigkeit durch ein Rohr, so verhalten sich die Strömungsgeschwindigkeiten umgekehrt wie die Rohrquerschnitte.

Zum Beschleunigen der Flüssigkeit von der kleinen Geschwindigkeit im großen auf die große Geschwindigkeit im kleinen Querschnitt ist eine Kraft erforderlich. Diese muss durch einen Druckunterschied im Inneren der Flüssigkeit, also einen Unterschied der statischen Drücke, entstanden sein. Dabei ist der Druck p_2 an der Engstelle kleiner als der Druck p_1 im großen Querschnitt. Berücksichtigt man noch, dass sich bei Querschnittsverkleinerung die Strombahnen zusammendrängen, so erhält man eine für das grundsätzliche Verständnis vieler Erscheinungen sehr nützliche

Regel: Zusammengedrückte Strombahnen bedeuten niedrigen, auseinandergerückte hohen statischen Druck.

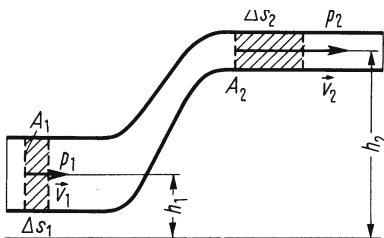


Bild 1.149 Zur Herleitung der Bernoullischen Gleichung

Berechnung des statischen Druckes in Abhängigkeit von der Strömungsgeschwindigkeit. Um die Betrachtung möglichst allgemein anzustellen, führen wir sie für ein Rohr gemäß Bild 1.149 durch, bei welchem das Rohrstück mit dem kleineren Querschnitt A_2 in einer größeren Höhe h_2 als dasjenige mit dem größeren Querschnitt A_1 liegen soll; diese liege in einer Höhe h_1

über einem willkürlich gewählten Bezugsniveau. Im weiten Rohr seien die Strömungsgeschwindigkeit v_1 und der statische Druck p_1 , im engen Rohr die entsprechenden Größen v_2 und p_2 .

In einem Zeitintervall Δt verschiebt die von links kommende Strömung, die z.B. von einer Pumpe vorwärtsgedrückt wird, wie ein Kolben den Querschnitt A_1 um das Wegstückchen $\Delta s_1 = v_1 \Delta t$. Dabei verrichtet sie gegen die dort wirkende Druckkraft $F_1 = p_1 A_1$ die Arbeit $\Delta W_1 = F_1 \Delta s_1 = p_1 A_1 \Delta s_1$.

In der zwischen A_1 und A_2 befindlichen Flüssigkeit entsprechen der Arbeit ΔW_1 die folgenden Arbeitsanteile:

1. Der Querschnitt A_2 wird gegen die Druckkraft $F_2 = p_2 A_2$ um das Stück $\Delta s_2 = v_2 \Delta t$ nach rechts verschoben. Dabei wird die Arbeit $\Delta W_2 = F_2 \Delta s_2 = p_2 A_2 \Delta s_2$ verrichtet.
2. Die Flüssigkeitsmenge mit dem Volumen $\Delta V = A_1 \Delta s_1$ und der Masse $\Delta m = \rho \Delta V$ wird aus der Höhe h_1 in die Höhe h_2 gehoben. (Was unten wegströmt, kommt oben hinzu; daher gilt auch $\Delta V = A_2 \Delta s_2$). Dazu ist die Hubarbeit

$$\Delta W_H = \Delta m g (h_2 - h_1) = \rho \Delta V g (h_2 - h_1) \quad \text{erforderlich.}$$

3. Die gleiche Flüssigkeitsmenge ΔV wird von der Geschwindigkeit v_1 auf die Geschwindigkeit v_2 beschleunigt. Die dazu nötige Beschleunigungsarbeit ist

$$\Delta W_B = \frac{1}{2} \Delta m v_2^2 - \frac{1}{2} \Delta m v_1^2 = \frac{1}{2} \rho \Delta V v_2^2 - \frac{1}{2} \rho \Delta V v_1^2$$

Da wir eine ideale Strömung betrachten, können wir von der Reibungskraft absehen. Es gilt daher $\Delta W_1 = \Delta W_2 + \Delta W_H + \Delta W_B$ und nach Einsetzen

$$p_1 A_1 \Delta s_1 = p_2 A_2 \Delta s_2 + \rho \Delta V g (h_2 - h_1) + \frac{1}{2} \rho \Delta V v_2^2 - \frac{1}{2} \rho \Delta V v_1^2$$

Da $\Delta V = A_1 \Delta s_1 = A_2 \Delta s_2$ ist (s.o.), können wir durch ΔV kürzen und erhalten

$$p_1 = p_2 + \rho g (h_2 - h_1) + \frac{1}{2} \rho v_2^2 - \frac{1}{2} \rho v_1^2$$

Wir ordnen noch nach Indizes und erhalten so die

Bernoullische¹⁾ Gleichung

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \quad \text{oder} \quad (1.48)$$

$$p + \rho g h + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{const} \quad (1.49)$$

Diese Gleichung gilt nicht nur für Strömungen in Rohren, sondern auch bei Strömungen um Hindernisse, solange sich die Stromlinien nicht kreuzen. Denn die Bewegung der Flüssigkeitsteilchen in einem Bündel von Strombahnen, einem sog. Stromfaden, kann man ja als Strömung in einem dünnen Rohr auffassen.

¹⁾ D. Bernoulli (1700 bis 1782).

Diskussion der Bernoullischen Gleichung. 1. Ruht die Flüssigkeit ($v_1 = v_2 = 0$), so wird $p_1 = p_2 + \rho g (h_2 - h_1)$, d.h., der statische Druck p_1 ist gleich dem statischen Druck p_2 , vermehrt um den Schweredruck der $(h_2 - h_1)$ hohen Flüssigkeitssäule. Das ist in Übereinstimmung mit Abschn. 1.6.1.3.

2. Sind die Höhen h_1 und h_2 nur wenig voneinander verschieden, so wird $\rho g (h_2 - h_1)$ vernachlässigbar. Die Bernoullische Gleichung vereinfacht sich dann zu

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \quad \text{oder} \quad p + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{const} \quad (1.50)$$

In dieser Form lässt sich z.B. auch der statische Druckunterschied $p_1 - p_2$ in Luft, die aus der Ruhe ($v_1 = 0$) auf die eingangs genannte Geschwindigkeit $v_2 = 50$ m/s gebracht wird, berechnen. Dieser ist

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 1,29 \text{ kg/m}^3 \cdot 2500 \text{ m}^2/\text{s}^2 = 1613 \text{ N/m}^2 = 1613 \text{ Pa}$$

Demnach ändert sich auch die Dichte der Luft nur um weniger als 2%. Von der gleichen geringen Größenordnung ist die Dichteänderung der Luft in Erdbodennähe bei etwa 100 m Höhendifferenz. Unsere Annahme konstanter Dichte ist also berechtigt.

Statischer Druck, Staudruck und Gesamtdruck. Der statische Druck ist der Druck in der ruhenden Flüssigkeit. In einer Strömung misst man ihn daher mit einem Manometer, das mit dem strömenden Stoff mitbewegt wird, oder dessen Öffnungsnormale senkrecht auf den Strombahnen steht. Denn in dieser Richtung ist ja die Strömungsgeschwindigkeit stets gleich Null (Bild 1.150).

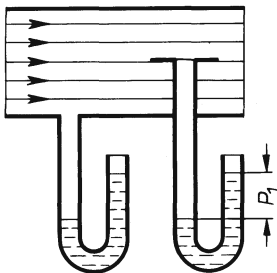


Bild 1.150 Messung des statischen Druckes

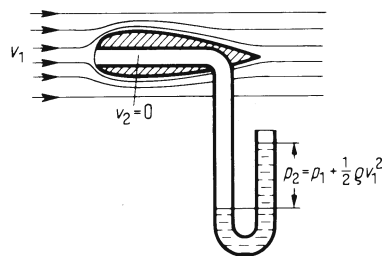


Bild 1.151 Messung des Gesamtdruckes

Hält man dagegen die Manometeröffnung gegen die Strombahnen, so staut man dort die Strömung (Bild 1.151). Die Geschwindigkeit sinkt von v_1 auf den Wert $v_2 = 0$. Das Manometer zeigt jetzt den Wert $p_2 = p_1 + (1/2) \rho v_1^2$ an. Er ist um den Betrag $(1/2) \rho v_1^2$ größer als der statische Druck p_1 in der ungestörten Strömung. Diesen zusätzlichen Anteil nennt man den hydrodynamischen Druck oder Staudruck.

p_2 ist dann die Summe aus statischem Druck und Staudruck. Er heißt Gesamtdruck. Mit diesen Begriffen kann man die Bernoullische Gleichung auch so formulieren:

Längs einer Stromlinie ist, bei Vernachlässigung von Höhenunterschieden, die Summe aus statischem Druck p und Staudruck $(1/2) \rho v^2$, der Gesamtdruck $p_{\text{Ges}} = p + (1/2) \rho v^2$, konstant.

Anwendungen

Venturidüse¹⁾

□ **Versuch 24** (Bild 1.152a). Wir messen mit zwei Wassermanometern die statischen Drücke p_1 und p_2 in einer von Luft durchströmten Röhre mit den Querschnitten A_1 und A_2 . Wie zu erwarten, ist p_1 größer als p_2 . Ein einziges Wassermanometer (Bild 1.152b) zeigt direkt den Differenzdruck $\Delta p = p_1 - p_2$ an. □ Bei Kenntnis der Querschnitte A_1 und A_2 und der Dichte ρ können wir aus Δp auf die Strömungsgeschwindigkeit v_1 schließen.

Denn es gilt nach Gl. (1.50)

$$\Delta p = (1/2) \rho v_2^2 - (1/2) \rho (v_2^2 - v_1^2)$$

Wegen der Kontinuitätsgleichung $A_1 v_1 = A_2 v_2$ ist aber $v_2 = v_1 A_1/A_2$. Damit wird

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho v_1^2 \left[\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right] \quad \text{und} \quad v_1 = \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\left[\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right] \rho}}$$

Ein einfaches Rohr mit verschiedenen Querschnitten (Bild 1.152b), eine sog. Venturidüse, erlaubt es also, ohne bewegte Teile durch Differenzdruckmessung Strömungsgeschwindigkeiten und damit sog. Volumenströme (s.u.) zu bestimmen. Das ist z.B. in der Verfahrenstechnik sehr wichtig.

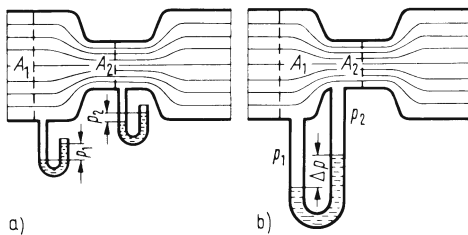


Bild 1.152 a) Statischer Druck bei verschiedenen Querschnitten, b) Venturidüse

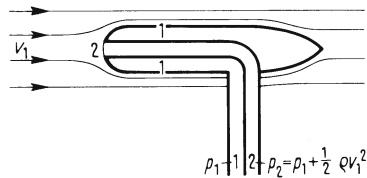


Bild 1.153 Prandtl'sches Staurohr
 $p_2 - p_1 = (1/2) \rho v_1^2$

Prandtl'sches²⁾ Staurohr

□ **Versuch 25.** Man kann den Staudruck in einer Strömung direkt messen, wenn man mit einem Differenzdruckmesser gleichzeitig den Gesamtdruck und den statischen Druck erfasst. Das geschieht mit einem in Bild 1.153 im Schnitt gezeichneten Prandtl'schen Staurohr. An der Öffnung 2, dem Staupunkt, misst man den Gesamtdruck p_2 an den Öffnungen 1 den statischen Druck p_1 . □

Dann gilt $\Delta p = p_2 - p_1 = (1/2) \rho v_1^2$. Daraus ergibt sich die Geschwindigkeit der freien Strömung zu $v_1 = \sqrt{2 \Delta p / \rho}$. Das Staurohr benutzt man deshalb ebenfalls sehr häufig zur Messung von Strömungsgeschwindigkeiten.

Ausfluss aus einer Gefäßöffnung. In der Höhe h unter dem Flüssigkeitsspiegel 1 eines Gefäßes (Bild 1.154) befindet sich eine Ausflussöffnung 2. Der statische Druck ist am Spiegel und an der Ausflussöffnung gleich dem äußeren Luftdruck p_L . Wenn die Ausflussöffnung sehr klein gegen-

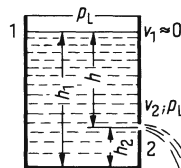


Bild 1.154 Ausfluss aus einer seitlichen Öffnung

¹⁾ G. B. Venturi (1746 bis 1822).

²⁾ L. Prandtl (1875 bis 1953).

über dem Gefäßquerschnitt ist, sinkt der Spiegel fast nicht; d.h. $v_1 \approx 0$. Dann wird (gemäß Bild 1.154)

$$p_L + \rho g h_1 = p_L + \rho g h_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

Daraus ergibt sich

$$v_2 = \sqrt{2g(h_1 - h_2)} = \sqrt{2gh}$$

Die Flüssigkeit tritt mit einer solchen Geschwindigkeit aus, als ob sie die Höhe h frei durchfallen hätte (Theorem von Torricelli).

Ein entsprechendes Ergebnis erhält man für eine Öffnung am Boden (Bild 1.155).

Oft interessiert der sog. Volumenstrom.

Definition:

$$\text{Volumenstrom} = \frac{\text{austretendes Flüssigkeitsvolumen}}{\text{Zeit, in der es austritt}} \quad Q = \frac{dV}{dt} = \frac{A ds}{dt} = Av$$

Dabei ist A der wirksame Querschnitt der Ausflussöffnung und v die Ausflussgeschwindigkeit. Der wirksame Querschnitt hängt von der Flüssigkeit und der Formgebung der Öffnung ab (Bild 1.156).

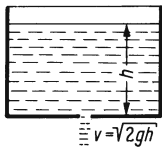


Bild 1.155 Ausfluss aus einer Bodenöffnung

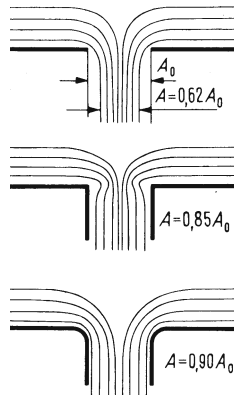


Bild 1.156 Wirksamer Querschnitt A für Ausfluss von Wasser bei verschiedenen Formen der Austrittsöffnung. Der geometrische Querschnitt A_0 ist in allen drei Fällen gleich groß.

Saugwirkungen einer Strömung

a) Hydrodynamisches Paradoxon

□ **Versuch 26** (Bild 1.157). Luft strömt aus der Mitte der beiden lose aneinandergehängten Platten 1 und 2 zu den Rändern, wo sich der Strömungsquerschnitt erweitert. Da hier Atmosphärendruck herrscht, muss zwischen den Platten Unterdruck herrschen. Die lose Platte wird „angesaugt“. Sie unter-

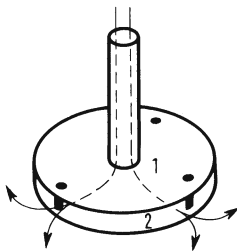


Bild 1.157 Hydrodynamisches Paradoxon

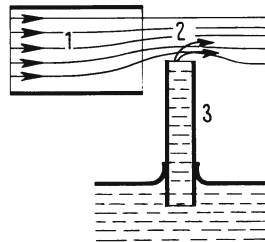


Bild 1.158 Zerstäuber

bricht den Luftstrom, fällt ab, wird wieder angesaugt usw. (Durch ähnliche Bewegungen des Gaumensegels entsteht das Schnarchen). □

b) Zerstäuber (Bild 1.158). Der Querschnitt des Luftstromes 1 wird an der Stelle 2 verkleinert. Durch den entstehenden Unterdruck wird die Flüssigkeit 3 „hochgesaugt“ und mitgerissen.

c) Wasserstrahlpumpe (Bild 1.159). Der Querschnitt des aus der engen Düse 1 tretenden Wasserstrahles 2 vergrößert sich erheblich, bis zum Austritt in die Luft 3. Da hier Atmosphärendruck herrscht, muss bei 1 und damit in einem angeschlossenen Gefäß ein niedrigerer Druck herrschen, vgl. Aufgabe 1. (Der Restdruck ist der Dampfdruck des Wassers $\approx 27 \text{ h Pa}$ bei Zimmertemperatur, s. Abschn. 2.4.2.3.)

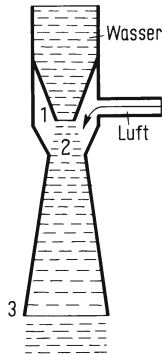


Bild 1.159 Wasserstrahlpumpe

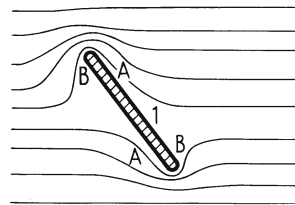


Bild 1.160 Drehmoment auf eine schräg zur Strömung stehende Platte

d) Drehmoment auf eine schräg zur Strömung stehende Platte (Bild 1.160). An den in Bild 1.160 gezeichneten Stellen A an der Platte 1 rücken die Stromlinien zusammen, an den Stellen B auseinander. Demnach ist bei A Unterdruck, bei B Überdruck. Das entstehende Drehmoment stellt die Platte senkrecht zur Strömung. Man denke z. B. an ein zu Boden fallendes Blatt.

e) Auftrieb von Flugzeugen. Er wird unten in Abschn. 1.6.3.3 behandelt.

Aufgaben zu Abschn. 1.6.3.1

1. Aus der unteren Öffnung einer Wasserstrahlpumpe mit dem Querschnitt $0,75 \text{ cm}^2$ strömt das Wasser mit der Geschwindigkeit 2 m/s . Der statische Druck ist hier der Luftdruck. Wie groß müssen die Geschwindigkeit des Wassers an der engen Düse und deren Querschnitt sein, damit dort der Druck Null herrscht?

(Der Dampfdruck werde vernachlässigt.)

2. Aus einem Loch mit dem Durchmesser 10 mm am Boden eines 1 m hoch gefüllten geschlossenen Behälters mit 1 m Durchmesser tritt Wasser aus.

Wie groß ist die Ausflussgeschwindigkeit, wenn über dem Wasserspiegel der Überdruck 10^4 Pa herrscht?

3. Wie groß darf die Strömungsgeschwindigkeit an den Enden einer dicht unter der Wasseroberfläche rotierenden Schiffsschraube höchstens sein, damit der Dampfdruck des Wassers von 27 h Pa nicht unterschritten wird und Kavitation (s. Abschn. 1.6.1.5) eintritt? (Luftdruck über dem Wasser 1013 h Pa).

4. Eine Wasserturbine hat den Eintrittsquerschnitt $0,03 \text{ m}^2$ und den Austrittsquerschnitt $0,06 \text{ m}^2$. Welche Eintrittsgeschwindigkeit hat das Wasser bei der Leistung 300 kW ?

5. Welches Querschnittsverhältnis hat eine Venturidüse, die bei einer Luftströmung mit der Geschwindigkeit $4,6 \text{ m/s}$ den Differenzdruck 196 Pa ergibt?

1.6.3.2 Innere Reibung. Reale Strömung

Im vorigen Abschnitt hatten wir angenommen, die einzelnen Flüssigkeitsschichten seien reibungsfrei gegeneinander verschiebbar, und es wirkten keine Adhäsionskräfte zwischen der Flüssigkeit¹⁾ und den umströmten Körpern. Diese Idealisierung ist auch in vielen Fällen brauchbar (s. z.B. die obigen Aufgaben). Eine Fülle von Erscheinungen lässt sich jedoch nur verstehen, wenn man berücksichtigt, dass zwischen gegeneinander bewegten Flüssigkeitsschichten Reibungskräfte wirken. Da diese im Inneren der Flüssigkeit auftreten, spricht man von innerer Reibung im Gegensatz zur äußeren Reibung an den Außenflächen von Festkörpern (s. Abschn. 1.3.3.2). Zur Ermittlung der Gesetzmäßigkeiten der inneren Reibung diene der folgende

□ **Versuch 27** (Bild 1.161). In einem zylindrischen Gefäß 1 mit 102 mm Durchmesser befindet sich, leicht drehbar gelagert, ein zweiter Zylinder 2 mit 100 mm Durchmesser. Zwischen beiden Zylindern befindet sich eine Flüssigkeit mit der Höhe h , die bei beiden Zylindern etwa die gleiche Oberfläche A bedeckt. Diese Oberfläche A kann durch verschiedenen hohen Flüssigkeitsstand messbar variiert werden. Am oberen Rand des Zylinders 2 ist eine dünne Schnur 3 aufgewickelt, mit deren Hilfe er über die Rolle 4 durch die Kraft F so gedreht wird, dass die Umfangsgeschwindigkeit v konstant bleibt. Man stellt fest: Die zur Kompensation einer Reibungskraft vom gleichen Betrag dienende Kraft F ist proportional der Fläche A und der Geschwindigkeit v . Außerdem hängt sie bei gleichem A und v noch von der Art der Flüssigkeit (z.B. Wasser oder Glycerin) ab. Wiederholt man die Versuche mit einem anderen Innenzylinder, sodass die Flüssigkeitsschichtdicke x nur noch halb so groß ist, so sind bei gleichem A und v in der gleichen Flüssigkeit die entsprechenden Kräfte doppelt so groß. □

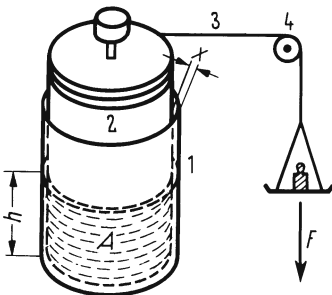


Bild 1.161 Versuch zur Bestimmung der inneren Reibung

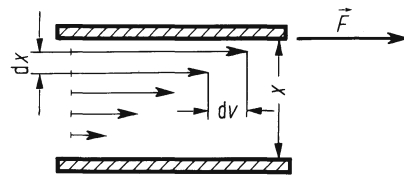


Bild 1.162 Geschwindigkeitsverteilung verschiedener Flüssigkeitsschichten

Wir deuten den Versuch folgendermaßen: An beiden die Flüssigkeit begrenzenden Flächen bewirken die Adhäsionskräfte festes Anhaften einer dünnen Schicht, die jeweils die Bewegung der zugehörigen Fläche mitmacht. Dazwischen gleiten Schichten mit von außen nach innen wachsenden Geschwindigkeiten aneinander vorbei (wie die Seiten eines Buches, das man zwischen zwei Händen „schert“) (Bild 1.162). Sie übertragen alle in Strömungsrichtung auf die Nachbarschicht die Kraft F . Dabei ist $F \sim A v/x$. Den Quotienten v/x können wir gemäß Bild 1.162 auch durch das Geschwindigkeitsgefälle dv/dx unmittel-

¹⁾ Flüssigkeit sei hier wieder, wie im vorigen Abschnitt, der Sammelbegriff für wirkliche Flüssigkeiten und Gase.

bar an der bewegten Platte ersetzen. Dann beschränkt sich unsere Aussage nicht nur auf ein lineares „Geschwindigkeitsprofil“, wie wir hier annehmen. Mit Verwendung des Proportionalitätsfaktors η können wir zusammenfassen:

Die innere Reibungskraft F zwischen zwei Flüssigkeitsschichten mit der Berührungsfläche A , die im Abstand dx mit dem Geschwindigkeitsunterschied dv aneinander entlanggleiten, ist

$$F = \eta A \frac{dv}{dx}; \quad \text{Newtonscher Reibungssatz} \quad (1.51)$$

η ist der Koeffizient der inneren Reibung. Man nennt ihn auch dynamische Zähigkeit (kurz: Zähigkeit) oder Viskosität. η hängt vom Stoff, von der Temperatur und vom Druck ab (s. Tafel 1.163).

Einheit der dynamischen Zähigkeit. Da $\eta = (F/A) dx/dv$ ist, ergibt sich als Einheit

$$1 \frac{\text{Ns}}{\text{m}^2} = 1 \text{ Pa s}$$

Tafel 1.163 Zähigkeiten verschiedener Stoffe in Ns/m^2 bei 1013 hPa

Wasser bei 0 °C	$1,79 \cdot 10^{-3}$	Quecksilber bei 0 °C	$1,7 \cdot 10^{-3}$
Wasser bei 20 °C	$1,01 \cdot 10^{-3}$	Glyzerin bei 20 °C	1,5
Wasser bei 50 °C	$0,55 \cdot 10^{-3}$	Luft bei 0 °C	$1,7 \cdot 10^{-5}$
Wasser bei 100 °C	$0,28 \cdot 10^{-3}$	Luft bei 20 °C	$1,8 \cdot 10^{-5}$
Äther bei 20 °C	$0,25 \cdot 10^{-3}$	Schmieröl bei 20 °C	0,16...1,2
Alkohol bei 20 °C	$1,2 \cdot 10^{-3}$	Schmieröl bei 80 °C	0,02...0,25

Zähigkeiten von Schmierölen werden häufig in einer Skala der Society of Automotive Engineers (USA) angegeben. Ein Öl mit SAE 10 hat bei 55 °C eine Viskosität zwischen $(160 \text{ und } 220) \cdot 10^{-3} \text{ Pa s}$, eines mit SAE 20 zwischen $(230 \text{ und } 300) \cdot 10^{-3} \text{ Pa s}$ und eines mit SAE 30 zwischen $(360 \text{ und } 430) \cdot 10^{-3} \text{ Pa s}$.

Aus der dynamischen Zähigkeit ergeben sich die Größen Fluidität und kinematische Zähigkeit.

Definitionen:

$$\text{Fluidität} = \frac{1}{\text{dynamische Zähigkeit}} \quad \varphi = \frac{1}{\eta}$$

$$\text{Kinematische Zähigkeit} = \frac{\text{dynamische Zähigkeit}}{\text{Dichte}} \quad \nu = \frac{\eta}{\rho}$$

Einheit der kinematischen Zähigkeit. Wegen $\nu = \eta/\rho$ ist die Einheit

$$1 \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

Unterschied zwischen äußerer und innerer Reibung. Vergleicht man beide, so stellt man fest: Die äußere Reibung hängt nicht von dem Betrag der Berührungsfläche und nicht von der Geschwindigkeit, dafür aber von der Normalkraft ab. Die innere Reibung hängt nicht von der Normalkraft, dafür aber vom Betrag der Berührungsfläche und der Geschwindigkeit ab. Das Schmieren z.B. von Lagern bewirkt einen weitgehenden Ersatz der äußeren durch die viel kleinere innere Reibung in der Schmierflüssigkeit.

Reale laminare Strömung

Jede reale Strömung, die irgendwo Grenzflächen besitzt, ist bei kleiner Strömungsgeschwindigkeit laminar, d.h., ihre Strombahnen kreuzen sich nicht. Von einer bestimmten Geschwindigkeit an beginnen jedoch die Strombahnen sich zu vermischen und teilweise sogar sog. Wirbel zu bilden. Eine solche Strömung heißt turbulent. Im Folgenden behandeln wir vorerst nur Strömungen im laminaren Bereich.

Begriff der Grenzschicht bei laminarer Strömung

Zieht man eine dünne Platte mit konstanter Geschwindigkeit v durch eine Flüssigkeit, so fällt wegen des Gleitens der Flüssigkeitsschichten gegeneinander die Strömungsgeschwindigkeit mit wachsender Entfernung von der Platte immer mehr ab, um schließlich vor den weit entfernten Gefäßwänden Null zu werden (Bild 1.164a). Die Platte bewegt nur eine bestimmte Flüssigkeitsschicht, die sog. Grenzschicht, nennenswert mit. Ihre Dicke, die Grenzschichtdicke D , lässt sich folgendermaßen abschätzen. Man nimmt, stark vereinfachend, an, die Geschwindigkeit, welche die einzelnen Flüssigkeitsschichten haben, nehme von der Geschwindigkeit v der Platte innerhalb der Grenzschichtdicke D linear bis auf Null ab (Bild 1.164b).

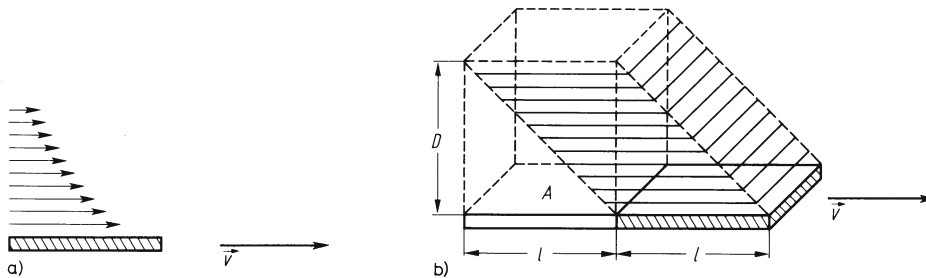


Bild 1.164 Grenzschicht laminarer Strömungen

Bewegt sich die Platte um ihre Länge l vorwärts, so erteilt die von ihr auf die Flüssigkeit ausgeübte Reibungskraft $F_R = \eta A v/D$ deshalb nicht der ganzen an ihrer Seite befindlichen Flüssigkeit mit dem Volumen AD die Geschwindigkeit v . Vielmehr erfährt die erfasste Flüssigkeit im Mittel nur die Geschwindigkeit $v/2$. Sie erhält dabei die Impulsänderung $m v/2 = \rho A D v/2$. Diese Impulsänderung ist gleich dem Kraftstoß $F_R t = \eta A v t/D$. Es gilt also

$$\eta A v t/D = \rho A D v/2$$

Berücksichtigt man, dass t die Zeit ist, die die Platte benötigt, um sich mit der Geschwindigkeit v um ihre Länge l fortzubewegen, so gilt $v t = l$. Auf diese Weise erhält man für die Grenzschichtdicke

$$D = \sqrt{2\eta l/\rho v}$$

Da diese Betrachtung auf willkürlichen Vereinfachungen beruht, vereinbaren wir die folgende

Definition: Die Dicke der Flüssigkeitsschicht, die von einem mit der Geschwindigkeit v bewegten Körper mit der Länge l nennenswert mitbewegt wird, die Grenzschichtdicke, ist

$$D = \sqrt{\frac{2 \eta l}{\rho v}} = \sqrt{\frac{2 \nu l}{v}}$$

Reale laminare Strömung durch ein enges Rohr. Um eine reale Flüssigkeit laminar mit zeitlich konstanter Geschwindigkeit durch ein enges Rohr mit der Länge l , dessen Radius kleiner als die Grenzschichtdicke ist, strömen zu lassen, ist zur Überwindung der Reibungskraft eine äußere Druckkraft erforderlich. Die Reibungskraft hängt nach Gl. (1.51) von der Zähigkeit der Flüssigkeit, den Berührungsflächen zwischen den Flüssigkeitsschichten und dem Geschwindigkeitsgefälle ab. Letzteres hängt in einem Rohr vom Radius ab. Denn an der Rohrwandung haftet die Flüssigkeit an, ist also in Ruhe; in der Rohrachse strömt die Flüssigkeit am schnellsten. Wir benötigen daher die Geschwindigkeitsverteilung coaxialer Schichten.

Dazu denken wir uns die Flüssigkeit im Innern eines kleinen Zylinders mit dem Radius r (Bild 1.165) durch einen festen Zylinder ersetzt, der sich mit der zwischen r und $r + dr$ vorhandenen Geschwindigkeit v_r bewegt. Wegen des festen Anhaftens der unmittelbar an den Zylinder grenzenden Flüssigkeitsschicht ändert sich dadurch an der übrigen Strömung nichts!

Die Reibungskraft auf diesen Zylinder ist nach Gl. (1.51)

$$F_R = \eta A \frac{dv}{dr} = \eta 2\pi r l \frac{dv}{dr}$$

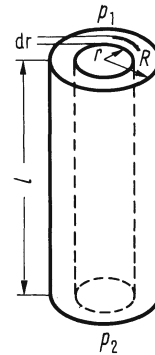


Bild 1.165 Reale laminare Strömung durch ein Rohr

Diese muss dem Betrage nach gleich der auf ihn wirkenden Druckkraft $F = r^2 \pi (p_1 - p_2)$ und dieser entgegengesetzt gerichtet sein. Demnach ist $(p_1 - p_2) r dr = -\eta 2 l dv$. Unter Berücksichtigung der Randbedingung, dass bei $r = R$ die Geschwindigkeit $v = 0$ sein muss,

ergibt die Integration $\int_r^R (p_1 - p_2) r dr = -\int_{v_r}^0 \eta 2 l dv$ schließlich

$$v_r = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} (R^2 - r^2) \quad (1.53)$$

Es ergibt sich also die in Bild 1.166 gezeichnete parabolische Geschwindigkeitsverteilung. Mit ihr berechnen wir das gesamte Volumen V der in der Zeit t durch das Rohr strömenden Flüssigkeit.

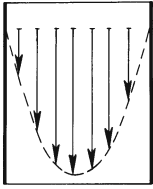


Bild 1.166 Geschwindigkeitsverteilung in einem laminar durchströmten Rohr

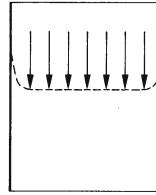


Bild 1.167 Geschwindigkeitsverteilung in einem turbulent durchströmten Rohr (zum Vergleich mit Bild 1.166); s.a. Abschn. 1.6.3.3.

Durch den Hohlzylinder zwischen r und $r + dr$ strömt Flüssigkeit mit dem Volumenstrom

$$dQ = 2\pi r dr v_r = 2\pi r dr (p_1 - p_2) (R^2 - r^2)/(4\eta l)$$

durch das ganze Rohr also

$$Q = \int_{r=0}^R dQ = \int_{r=0}^R [2\pi(p_1 - p_2)/(4\eta l)](R^2 - r^2) r dr$$

Man erhält schließlich das

Gesetz von Hagen-Poiseuille¹⁾ für die reale laminare Strömung durch ein Rohr

$$Q = \frac{\pi(p_1 - p_2)R^4}{8\eta l} \quad (1.54)$$

Man beachte: Q ist der Druckdifferenz $(p_1 - p_2)$ direkt und der Rohrlänge l umgekehrt, aber der vierten Potenz des Radius proportional!

Die gesamte Druckkraft auf die Flüssigkeit ist $F = R^2 \pi (p_1 - p_2)$. Diese ist dem Betrage nach gleich der Reibungskraft F_R . Aus Gl. (4.54) erhalten wir demnach $F_R = 8 \eta l Q/R^2$ oder mit Einführung der mittleren Geschwindigkeit $\bar{v} = Q/(R^2 \pi)$ schließlich die

$$\text{Reibungskraft auf ein Rohr} \quad F_R = 8\pi \eta l \bar{v} \quad (1.55)$$

Aus Gl. (1.54) entnimmt man noch ein experimentell leicht nachprüfbares Ergebnis. Bei konstantem Volumenstrom, $Q = \text{const}$, ergibt sich:

Der Druckabfall in einem Rohr mit konstantem Querschnitt ist proportional zur Rohrlänge (Bild 1.168)

$$\Delta p_v = (p_1 - p_2) = \text{const } l \quad \text{bei} \quad Q = \text{const}$$

¹⁾ G. H. L. Hagen (1797 bis 1884); J. L. M. Poiseuille (1799 bis 1869).

Bernoullische Gleichung bei innerer Reibung. Man kann den Druckabfall durch innere Reibung Δp_v , in der Bernoullischen Gleichung mit berücksichtigen. Aus Gl. (1.48) wird dann

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_1 + \rho g h_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \Delta p_v$$

Häufig teilt man diese Gleichung durch ρg und erhält mit der Bezeichnung $h_v = \Delta p_v / (\rho g)$ die

Bernoullische Gleichung bei innerer Reibung

$$\frac{p_1}{\rho g} + h_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + h_2 + \frac{v_2^2}{2g} + h_v$$

$p/(\rho g)$ ist die sog. Druckhöhe, h die Orthshöhe, $v^2/(2g)$ die Geschwindigkeitshöhe und h_v die Verlusthöhe.

In h_v gehen außer den Reibungsverlusten auch Verluste durch Rohrkrümmungen, Verzweigungen und dgl. ein (zu ihrer Berechnung vgl. die Spezialliteratur).

Reibungskraft auf eine Kugel. Bewegt sich eine Kugel mit dem Radius r mit konstanter Geschwindigkeit v durch eine Flüssigkeit mit der Zähigkeit η so hindurch, dass die Umströmung der Kugel laminar bleibt (vgl. Abschn. 1.6.3.3), so wirkt auf die Kugel eine Reibungskraft F_R . Für diese fand G. G. Stokes (1819 bis 1903) durch ähnliche Überlegungen, wie wir sie oben für das Rohr anstellten, das

Stokessche Gesetz

$$F_R = 6\pi \eta r v \quad (1.56)$$

Erfolgt die Bewegung in einem Rohr mit dem Radius R , so muss die Gl. (1.56) durch den Ladenburgschen¹⁾ Korrekturfaktor ergänzt werden. Es gilt dann

$$F_R = 6\pi \eta r v (1 + 2,1 R/r) \quad (1.57)$$

Messung der Zähigkeit. Sowohl das Hagen-Poiseuillesche als auch das Stokessche Gesetz kann man zur Messung der Zähigkeit benutzen. Das Erstere verwendet man im sog. Englerschen Viskosimeter. Bei ihm dient die Zeit für das Durchfließen einer bestimmten Flüssigkeitsmenge durch ein Rohr als das Maß für die Zähigkeit. Nach Gl. (1.54) sind ja beide einander proportional, wenn man berücksichtigt, dass $Q = V/t$ ist. Diese Messmethode und die darauf beruhende Einheit, das sog. Englergrad²⁾, verlieren jedoch immer mehr an Bedeutung. Man benutzt heute immer häufiger das sog. Fallkugelsondrometer, welches auf dem Stokesschen Gesetz (Gl. (1.57)) beruht.

Nicht-newtonsche Stoffe. Viele Stoffe gehorchen nicht dem in diesem Abschnitt allen Gesetzmäßigkeiten zugrunde gelegten Newtonschen Reibungsansatz. Man nennt sie deshalb „nicht-newtonsche“ Stoffe. Zu ihnen gehören die meisten Dispersionen, Kolloide, Suspensionen, polymere Lösungen und Schmelzen sowie plastische Stoffe wie Pasten, Teige

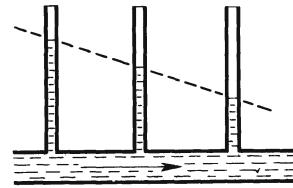


Bild 1.168 Druckabfall in einem Rohr mit konstantem Querschnitt

¹⁾ A. Ladenburg (1842 bis 1911).

²⁾ C. Engler (1842 bis 1925).

und dgl. Die Behandlung des Fließverhaltens solcher Stoffe geht jedoch über den Rahmen dieses Buches hinaus. Hierzu sei auf die Literatur zur sog. Rheologie (Fließkunde), z.B. [38], verwiesen.

1.6.3.3 Turbulente Strömung

Jede reale Strömung geht bei einer bestimmten Geschwindigkeit, der sog. kritischen Geschwindigkeit v_{krit} , aus dem laminaren in den turbulenten Zustand über. Wie schon oben erwähnt, kreuzen und mischen sich bei der turbulenten Strömung die Strombahnen, und es entstehen Wirbel. Die kritische Geschwindigkeit bestimmt man experimentell (s. u.).

Entstehung der Wirbel

Bild 1.169a zeigt einen Körper 1, der von links nach rechts umströmt wird. Wir nehmen zunächst an, die Strömung sei laminar (gestrichelt gezeichnet). Dann entsteht an den Stellen 2 ein hoher statischer Druck (p_h), an den Stellen 3 ein niedriger statischer Druck (p_n).

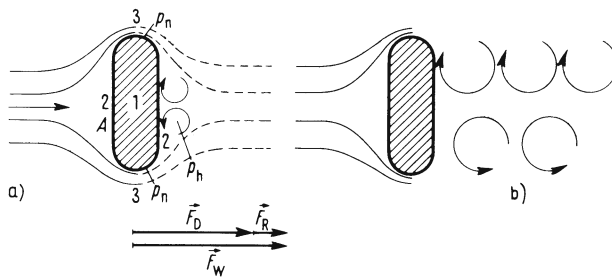


Bild 1.169

a) Entstehung der Wirbel
b) Wirbelstraße

In einer idealen Strömung würden auch die unmittelbar am Körper befindlichen Flüssigkeitsschichten reibungsfrei an diesem entlanggleiten. Ihre in den Punkten 3 gewonnene Bewegungsenergie würde genau ausreichen, um gegen das Druckgefälle $p_h - p_n$ anzulaufen. In einer realen Strömung jedoch muss die in der Grenzschicht strömende Flüssigkeit Reibungsarbeit leisten. Sie kommt nicht mehr gegen das Druckgefälle an, sondern wird unter Umständen sogar von diesem in Richtung auf die Stellen niedrigeren Druckes in Bewegung gesetzt. Die Flüssigkeit gerät in kreisende Bewegung, es entstehen Wirbel. Diese lösen sich abwechselnd ab, da die in ihnen entstehende hohe Strömungsgeschwindigkeit wegen der Reibung unmittelbar am Körper nicht möglich ist, es bilden sich neue Wirbel, und so entsteht schließlich die ganze in Bild 1.169b gezeichnete Wirbelstraße.

Da die Gegenströmung in der rückwärtigen Grenzschicht Reibungsarbeit leisten muss, gilt:

Wirbel entstehen erst bei genügend großem Druckgefälle am umströmten Körper und damit erst ab einer bestimmten Geschwindigkeit, der kritischen Geschwindigkeit (s. u.).

Man beachte, dass die Wirbel sich nur an der Rückseite des umströmten Körpers bilden. Denn an der Vorderseite haben ja die ursprüngliche Strömung und die durch das Druckgefälle in der Grenzschicht entstehende Strömung die gleiche Richtung.

Strömungswiderstand. In Abschn. 1.6.3.2 lernten wir bereits die Reibungskraft F_R kennen, die durch die innere Reibung auf laminar umströmte Körper ausgeübt wird. Wenn sich

nach Überschreiten der kritischen Geschwindigkeit Wirbel bilden, entsteht dadurch noch eine zusätzliche Kraft, die sog. Druckwiderstandskraft.

Wir machen uns ihre Entstehung anhand von Bild 1.169 klar. Auf der Rückseite des umströmten Körpers kreisen die Flüssigkeitsteilchen in den Wirbeln mit großer Geschwindigkeit. Diese bedeutet aber gemäß der Bernoullischen Gleichung Gl. (1.48) kleineren statischen Druck als an der Vorderseite des Körpers. Durch die Druckdifferenz entsteht eine der Stirnfläche A proportionale, in Strömungsrichtung zeigende Kraft F_D . Bei Bewegung des Körpers durch eine ruhende Flüssigkeit wirkt diese Kraft entgegen der Bewegungsrichtung. Daher stammt die Bezeichnung Druckwiderstandskraft. Druckdifferenzen sind nach Gl. (1.48) dem Staudruck $(1/2) \rho v^2$ proportional, wobei der dimensionslose Proportionalitätsfaktor von den Geschwindigkeiten vor dem Körper und in den Wirbeln und damit von der Körperform abhängt. Man nennt ihn den Druckwiderstandsbeiwert c_D . Mit ihm wird die

Druckwiderstandskraft

$$F_D = c_D \frac{1}{2} \rho v^2 A$$

Die Druckwiderstandskraft F_D und die meist viel kleinere Reibungskraft F_R addieren sich zum sog. Strömungswiderstand F_w . Der Einfachheit halber setzt man auch Letzteren dem Staudruck proportional und erhält dann mit dem sog. Widerstandsbeiwert c_w

Strömungswiderstand = Druckwiderstandskraft + Reibungskraft

$$F_w = F_D + F_R$$

$$F_w = c_w \frac{1}{2} \rho v^2 A$$

Der Widerstandsbeiwert c_w wird durch Messung des Strömungswiderstandes gemäß Bild 1.170 experimentell bestimmt. Er hängt im Allgemeinen von der Geschwindigkeit v ab. Nur wenn die Reibungskraft vernachlässigbar klein gegenüber der Druckwiderstandskraft ist (d.h. bei hohen Geschwindigkeiten), kann man c_w als konstant ansehen. In dem entgegengesetzten Grenzfall rein laminarer Strömung ist $F_D = 0$. Da F_R nur proportional mit der Geschwindigkeit v wächst, muss c_w sich hier proportional $1/v$ ändern. Den kleinsten

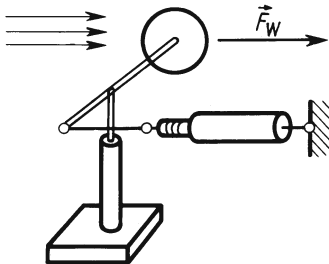


Bild 1.170 Messung des Strömungswiderstandes

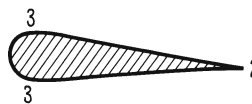


Bild 1.171 Stromlinienkörper

c_w -Wert besitzt ein Stromlinienkörper (Bild 1.171). Das liegt daran, dass bei ihm der Druckunterschied zwischen den Stellen 3 und 2 sich auf eine so lange Strecke verteilt, dass er keine Gegenströmung in der Grenzschicht und damit keine Wirbel hervorrufen kann. Tafel 1.172 zeigt einige typische Werte für c_w .

Tafel 1.172 Widerstandsbeiwerte c_w (dimensionslos, bei hohen Geschwindigkeiten; F_{RR} vernachlässigt)

Stromlinienkörper	0,056	Lastauto	0,6...1,2
Stromlinig verkleidete Strebe	0,12...0,20	Zylindrische Strebe	0,6...1,0
Flugzeugrumpf	0,15...0,20	Ebene Kreisplatte	1,1...1,3
Rennauto	0,25...0,35	Halbkugel (Öffnung vorn)	1,33
Kugel	0,25...0,43	Halbkugel (Öffnung hinten)	0,34
Personenauto	0,29...0,5		

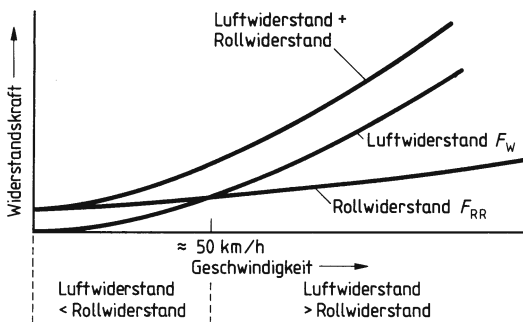


Bild 1.173 Luft- und Rollwiderstand bei einem Kraftfahrzeug

Widerstandskraft bei Kraftfahrzeugen.

Bei Kraftfahrzeugen setzt sich die gesamte Widerstandskraft aus dem Strömungswiderstand F_w , den man in diesem Falle im Allgemeinen Luftwiderstand zu nennen pflegt, und dem Rollwiderstand F_{RR} (vgl. Abschn. 1.3.3.2) der Räder zusammen. Wie Bild 1.173 zeigt, überwiegt bei kleinen Geschwindigkeiten der Rollwiderstand, während er bei zunehmender Geschwindigkeit gegenüber dem Luftwiderstand eine immer kleinere Rolle spielt.

Dynamische Querkraft. Auftriebskraft. Durch geeignete Formgebung des umströmten Körpers lässt sich erreichen, dass dieser eine Kraft quer zur Strömung, die sog. dynamische Querkraft, erfährt. Diese nutzt man z.B. beim Tragflügel (Bild 1.174) als dynamische Auftriebskraft aus.

Sie entsteht folgendermaßen: Jeder Tragflügel lenkt die Luft, welche mit der Relativgeschwindigkeit \vec{v}_0 anströmt, um einen bestimmten Winkel φ schräg nach unten um, sodass sie hinter ihm in der neuen Richtung \vec{v}_1 strömt. Bei Vernachlässigung von Reibungsverlusten bleibt hierbei der Betrag der mittleren Geschwindigkeit erhalten, $v_1 = v_0$. – Es leuchtet ohne Weiteres ein, dass die Luft an der Unterseite des Tragflügels eine Impulsänderung schräg nach unten erfährt. Dass dies auch an der Oberfläche der Fall ist, kann man sich folgendermaßen klarmachen: Folgte die Luft nicht dem Profilverlauf, bildete sich an der Tragflügel-Oberfläche ein Bereich geringer Dichte, in welchen die Luft sofort wieder hineingedrückt würde. Bei einer „gesunden“ Strömung schmiegt sich daher die Luft auch an die obere Tragflügelfläche an. (Gelegentlich bilden sich hier jedoch Wirbel, die Strömung „reißt ab“. Diesen Fall betrachten wir hier nicht.) –

Wir nehmen vereinfachend nun an, die strömende Luft würde etwa in einer Gesamtschichtdicke H (Bild 1.174) mit der mittleren Geschwindigkeit v_0 umgelenkt, und die Richtungsänderung erfolge auf einem Kreisbogenstück mit dem mittleren Radius r .

Eine Kreisbewegung erfordert aber eine auf die Luft wirkende Zentripetalkraft. Die Gegenkraft wirkt auf den Tragflügel. Sie ist identisch mit der dynamischen Querkraft F_A . Wir berechnen jetzt ihren Betrag: Gemäß Abschnitt 1.5.1.1 gilt

$$F_A = \Delta m \frac{v_0^2}{r}$$

Für Δm setzen wir gemäß Bild 1.174 $\rho l s H$ oder mit der sog. Tragfläche $A_T = l s$: $\Delta m = \rho A_T H$. Damit ergibt sich

$$F_A = \rho A_T H \frac{v_0^2}{r} \quad (1.58)$$

Es ist üblich, den Staudruck $\frac{1}{2} \rho A_T v_0^2$ einzuführen.

Also wird $F_A = 2 \frac{H}{r} \frac{1}{2} \rho v_0^2 A_T$. Den dimensionslosen Faktor $2 H/r$ setzt man gleich dem sog. Auftriebsbeiwert c_A und erhält schließlich für die

Dynamische Quer- oder Auftriebskraft

$$F_A = c_A \frac{1}{2} \rho v_0^2 A_T$$

$c_A = 2 H/r$ lässt sich im Allgemeinen nicht berechnen, sondern nur experimentell ermitteln. Man sieht jedoch sofort, dass mit $r \rightarrow \infty$ $c_A \rightarrow 0$ geht (z.B. bei einer parallel zu \vec{v}_0 liegenden dünnen Platte). Andererseits wächst c_A mit stärkerer Umlenkung der Luft, also mit kleinerem r . Das ist der Fall bei einem größeren „Anstellwinkel“ α (s. Bild 1.174).

Zu Beginn der Strömung bildet sich an der Flügelhinterkante einmalig der sog. Anfahrwirbel, der sich schnell ablöst. (Man kann ihn im Rauchkanal gut beobachten.) Seine Entstehung führt auf eine weitere interessante Beschreibung der dynamischen Querkraft: Zweifellos strömt wegen des größeren Radius die Luft an der Flügeloberseite schneller als an der Unterseite¹⁾. Dadurch herrscht wegen der Gültigkeit der Bernoullischen Gleichung an der Oberseite ein kleinerer statischer Druck als an der Unterseite. Man denkt sich jetzt diesen Geschwindigkeitsunterschied als Überlagerung einer Strömung mit oben und unten gleicher Geschwindigkeit v_0 und einer sog. Zirkulationsströmung mit der Geschwindigkeit v_z um den Tragflügel herum (in Bild 1.174) punktiert). Der zu dieser gehörende Drehimpuls wird durch einen entgegengesetzt gerichteten Drehimpuls von gleichem Betrag kompensiert, der im Anfahrwirbel steckt. Dieses Modell führt auf eine häufig benutzte Formel, die wir jetzt herleiten wollen.

¹⁾ Das war bei unserer obigen Betrachtung nicht wichtig.

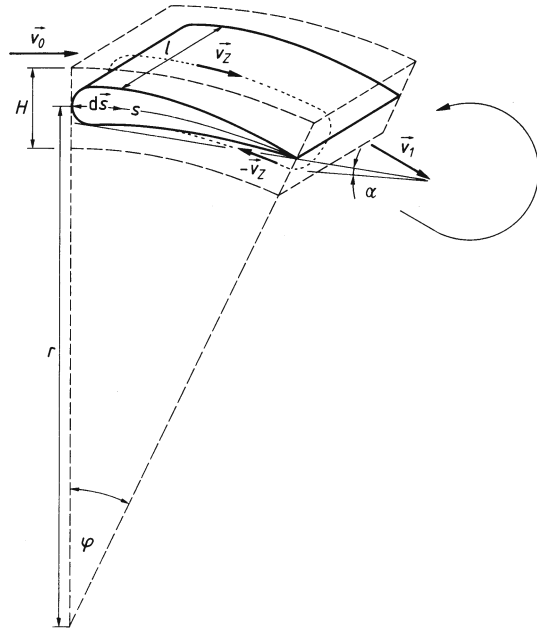


Bild 1.174 Zur Herleitung der dynamischen Querkraft; rechts der „Anfahrwirbel“

Wenn sich der Strömung mit der Geschwindigkeit v_0 die Zirkulationsströmung mit der Geschwindigkeit v_z überlagert, so ist die Geschwindigkeit $v_0 + v_z$ im Abstand $r + H/2$ um das Verhältnis $\frac{r + H/2}{r}$ größer als im Abstand r ; also gilt $v_0 + v_z = \left(1 + \frac{H}{2r}\right)v_0$ oder $v_z = v_0 H/2r$, umgestellt $v_0 = v_z 2r/H$. Wir setzen dieses Ergebnis in Gl. (1.58) ein und erhalten mit $A_T = l s$

$$F_A = v_0 l \rho v_z 2s$$

Für die Berechnung dynamischer Querkräfte ist es jetzt nützlich, eine neue Größe, die Zirkulation, einzuführen. Für diese gilt die

Definition: Die Zirkulation um einen umströmten Körper ist

$$\Gamma = \oint \vec{v}_z \cdot d\vec{s}$$

Bildet man dieses Integral für einen Tragflügel gemäß Bild 1.174, so tragen die beiden Wegstücke an der Vorder- und Hinterkante wegen ihrer gegen s sehr kleinen Beträge praktisch nichts bei, und es bleibt

$$\Gamma = \oint \vec{v}_z \cdot d\vec{s} = v_z s + (-v_z)(-s) = 2v_z s$$

Damit erhält man den

Satz von Kutta-Jukowsky

$$F_A = v_0 l \rho \Gamma$$

Diese Gleichung gilt, wie hier nicht gezeigt werden kann, ganz allgemein für alle Körper mit der Spannweite l , um die herum sich bei Anströmung mit der Geschwindigkeit v_0 die Zirkulation Γ ausgebildet hat.

Ein besonders leicht zu berechnendes Beispiel bietet der sog. Magnus-Effekt¹⁾. Dieser ist auch technisch, insbesondere bei Ball-Sportarten, interessant. Lässt man einen Zylinder, wie in Bild 1.175 gezeichnet, um seine Längsachse rotieren, so nimmt er die unmittelbar benachbarte Luftschicht, die Grenzschicht nach Abschn. 1.6.3.2, mit, versetzt sie also ebenfalls in Rotation mit der Geschwindigkeit $v_z = \omega R$. Hierbei hat \vec{v}_z überall die gleiche Richtung wie $d\vec{s}$. Dadurch ergibt sich für die Zirkulation

$$\Gamma = 2\pi R v_z = 2\pi R \omega R.$$

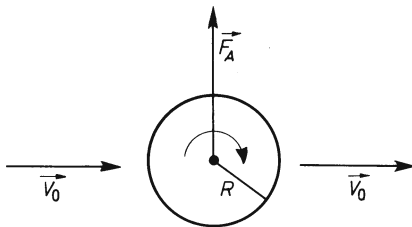


Bild 1.175 Magnuseffekt

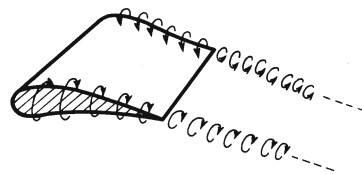


Bild 1.176 Randwirbel und Wirbelzöpfe beim Tragflügel

¹⁾ H. G. Magnus (1802 bis 1870).

In einer laminaren Luftströmung mit der Geschwindigkeit v_0 erfährt der Zylinder dann die Querkraft

$$F_A = v_0 l \rho 2\pi \omega R^2.$$

Dieser Effekt bewirkt beim „Anschneiden“ von Fußbällen oder Tennisbällen ein seitliches Abweichen von der normalen Flugbahn.

Widerstandskraft auf einen Tragflügel. Wegen seiner gestreckten Form sollte ein Tragflügel eigentlich an der Rückseite keine Wirbel bilden und dadurch keine nennenswerte Druckwiderstandskraft erfahren. Bei einem unendlich langen Flügel wäre das auch der Fall. An einem wirklichen Tragflügel bilden sich jedoch wegen des Druckunterschieds zwischen oben und unten an den seitlichen Enden die in Bild 1.176 gezeichneten Wirbel. Diese lösen sich ab und erzeugen zwei „Wirbelzöpfe“. Die in ihnen steckende Rotationsenergie muss von der Antriebskraft des Flugzeuges aufgebracht werden. Die Gegenkraft zu dieser Antriebskraft ist die Druckwiderstandskraft F_D . Um diese Wirbel teilweise zu unterdrücken, findet man auf vielen Tragflächen sog. Wirbelzäune.

Insgesamt setzt sich die Widerstandskraft aus drei Anteilen zusammen. Der erste ist die Druckwiderstandskraft. Der zweite Anteil ist die in Richtung von \vec{v}_0 wirksame Komponente der dynamischen Querkraft. Denn wie man aus dem vorigen Abschnitt und Bild 1.174 entnimmt, wird die ausströmende Luft schräg nach unten abgelenkt. Das bedeutet aber, dass, genau genommen, die dynamische Querkraft nicht genau senkrecht auf der Tragfläche steht, sondern vielmehr etwas nach hinten gerichtet angreift. – Dies hatten wir für die Auftriebskraft, wie in der Technik üblich, im vorigen Abschnitt einfach durch den experimentell zu bestimmenden Auftriebsbeiwert erfasst. – Die nach hinten gerichtete Komponente verursacht einen Teil der Widerstandskraft. Ein dritter Anteil ist, wie bei jedem Körper in einer realen Strömung, die Reibungskraft.

Man setzt die Summe aller Anteile wieder dem Staudruck proportional, wählt aber bei Tragflügeln nicht die Stirnfläche, sondern die Tragfläche als Bezugsfläche.

Widerstandskraft auf einen Tragflügel

$$F_W = c_w \frac{1}{2} \rho v^2 A_T \quad A_T \text{ ist die Tragfläche.}$$

Auftriebskraft und Widerstandskraft kann man getrennt mit der Zwei-Komponentenwaage (Bild 1.177) messen. Ihre vektorielle Summe heißt Luftkraft $\vec{F}_L = \vec{F}_W + \vec{F}_A$. Bild 1.178 zeigt in einem sog. Polardiagramm die Abhängigkeit der Beiwerte c_A und c_w vom Anstellwinkel α für einen bestimmten Tragflügel.

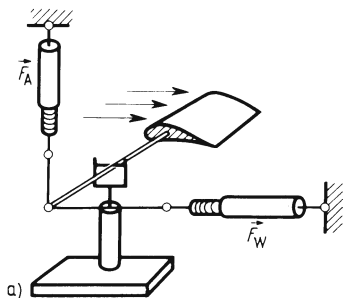


Bild 1.177 a) Zwei-Komponentenwaage, b) Luftkraft \vec{F}_L

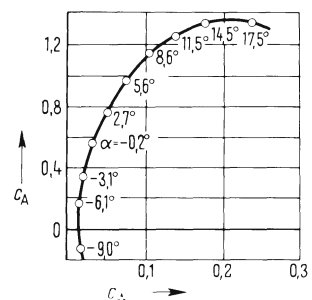


Bild 1.178 Polardiagramm

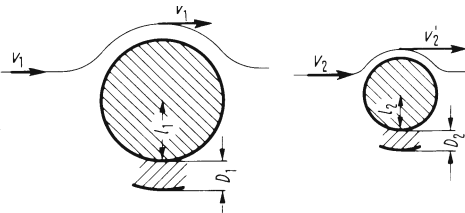
Ähnliche Strömungen. Reynoldssche Zahl

Bei der Untersuchung des Strömungsverhaltens von Flugzeugen, Schiffen oder Kraftfahrzeugen verwendet man häufig maßstabsgerechte Modelle. Die Strömung um diese Modelle muss derjenigen um das wirkliche Fahrzeug physikalisch ähnlich sein.

Definition: Zwei Strömungen sind einander physikalisch ähnlich, wenn sich physikalische Größen in beliebigen Punkten der einen Strömung zueinander so verhalten, wie die entsprechenden Größen in geometrisch ähnlich gelegenen Punkten der anderen Strömung.

Besonders anschaulich ist diese Definition für die Geschwindigkeitsverteilung. In Bild 1.179, z. B. ist $v'_1/v_1 = v'_2/v_2$.

Man überlegt sich leicht, dass diese Forderung für reibungsfreie laminare Strömungen stets erfüllt ist. Denn verkleinert man z.B. die Durchmesser eines verschieden weiten Rohres um einen bestimmten Faktor, so bleibt das Verhältnis entsprechender Querschnitte und damit wegen der Kontinuitätsgleichung das Verhältnis der zugehörigen Geschwindigkeiten konstant. Bei Strömungen mit innerer Reibung bedeutet die obengenannte Bedingung, dass sich die in Abschn. 1.6.3.2 angegebene Grenzschichtdicke $D = \sqrt{2\eta l / (\rho v)}$ um den gleichen Maßstabsfaktor wie alle anderen linearen Abmessungen der umströmten Körper ändern muss (Bild 1.179). Es muss also gelten



$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{l_1}{l_2} \quad \text{oder} \quad \sqrt{\frac{2\eta_1 l_1 \rho_2 v_2}{2\eta_2 l_2 \rho_1 v_1}} = \frac{l_1}{l_2}$$

Quadriert man und ordnet nach Indizes, so erhält man schließlich als Bedingung für ähnliche Strömungen

$$v_1 l_1 \rho_1 / \eta_1 = v_2 l_2 \rho_2 / \eta_2$$

Bild 1.179 Ähnliche Strömungen

Man nennt den Ausdruck $v l \rho / \eta$ nach dem Entdecker dieser Ähnlichkeitssätze, O. Reynolds (1842 bis 1912), die

Reynoldssche Zahl

$$Re = \frac{v l \rho}{\eta} = \frac{l v}{\nu}$$

Damit ergibt sich eine andere Formulierung der obigen Definition:

Zwei Strömungen sind einander ähnlich, wenn in beiden die Reynoldssche Zahl Re den gleichen Betrag hat.

Erstaunlicherweise müssen demnach im gleichen Medium $\eta/\rho = \nu = \text{const}$ die Längenabmessungen l und die Geschwindigkeit v für $Re = \text{const}$ einander umgekehrt proportional sein. Das ist z.B. der Grund dafür, warum Windkanäle so groß sind. Bei zu kleinen Modellabmessungen müsste sonst die Strömungsgeschwindigkeit so groß gemacht werden, dass man die Luft nicht mehr als inkompressibel ansehen kann.

Durch einen Trick kann man allerdings auch noch mit kleineren Modellabmessungen Versuche durchführen. Dazu spritzt man in einem sog. „Kryo-Windkanal“ flüssigen Stickstoff mit $\vartheta = -196\text{ °C}$ in die strömende Luft ein und verringert dadurch die kinematische Viskosität bis auf den 5,5ten Teil ihres Wertes bei 0 °C . Wie man sich leicht überlegt, gilt nämlich für

$$Re = \text{const } v_2/v_1 = (l_1/l_2) (\eta_1/\eta_2)$$

Bei $(\eta_1/\eta_2) > 1/5,5$ darf also bei gleichem Verhältnis von Modellgeschwindigkeit v_2 zur realen Geschwindigkeit v_1 das Maßstabsverhältnis l_1/l_2 bis zum 5,5fachen größer sein.

Es sei noch vermerkt, dass in ähnlichen Strömungen nicht nur entsprechende Geschwindigkeiten einander verhältnisgleich sind, sondern z.B. auch entsprechende Kräfte. Wir zeigen das am Beispiel zweier geometrisch ähnlicher konischer Röhre 1 und 2 (Bild 1.180).

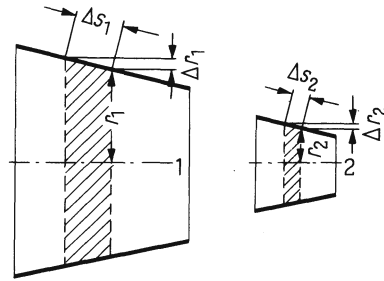


Bild 1.180 Betrachtung einander entsprechender Kräfte in ähnlichen Strömungen

Die auf die schraffierte Flüssigkeitsschicht wirkende Druckkraft F_D ist gleich $A \Delta p$. Die Druckdifferenz ergibt sich nach Bernoulli (Gl. (1.48)) zu

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho v^2 \left[\left(\frac{A + \Delta A}{A} \right)^2 - 1 \right]$$

Quadriert man den Bruch aus und vernachlässigt $(\Delta A)^2$, so erhält man schließlich für die Druckkraft $F_D = A \Delta p = \rho v^2 \Delta A$ und wegen $\Delta A = 2\pi r \Delta r$

$$F_D = \rho v^2 2\pi r \Delta r$$

Die Reibungskraft F_R ist (mit der Grenzschichtdicke D) $F_R = \eta 2\pi r \Delta s v / D$.

Bildet man für beide Röhre das Verhältnis von Druckkraft zu Reibungskraft, so ergibt sich

$$\frac{F_{D1}}{F_{R1}} = \frac{\rho_1 v_1^2 2\pi r_1 \Delta r_1 D_1}{\eta_1 2\pi r_1 \Delta s_1 v_1} \quad \text{und} \quad \frac{F_{D2}}{F_{R2}} = \frac{\rho_2 v_2^2 2\pi r_2 \Delta r_2 D_2}{\eta_2 2\pi r_2 \Delta s_2 v_2}$$

Da aber wegen der geometrischen Ähnlichkeit $\Delta r_1/\Delta s_1 = \Delta r_2/\Delta s_2$ ist, gilt

$$\rho_1 v_1 D_1/\eta_1 = \rho_2 v_2 D_2/\eta_2$$

Nun ist in ähnlichen Strömungen aber auch $D_1/D_2 = r_1/r_2$ (s. o.). Also folgt schließlich

$$\frac{F_{D1}}{F_{R1}} = \frac{F_{D2}}{F_{R2}} = Re$$

Kritische Reynoldssche Zahl Re_{krit} Erfahrungsgemäß ist jede reale Strömung bei sehr kleinen Geschwindigkeiten laminar. Steigert man die Strömungsgeschwindigkeit über einen bestimmten kritischen Wert v_{krit} , so wird der laminare Zustand instabil, und es entsteht Turbulenz. Dabei ändern sich sprunghaft der Strömungswiderstand und die Geschwindigkeitsverteilung (vgl. z.B. die Bilder 1.166 und 1.167).

Es ist anschaulich verständlich, dass die Turbulenz bei geometrisch ähnlichen Körpern einsetzt, wenn auch die Geschwindigkeitsverteilungen in dem oben beschriebenen Sinn einander entsprechen, d.h. bei gleichen Re -Werten. Da Re proportional der Strömungsgeschwindigkeit v ist, gibt es eine größte Reynoldssche Zahl Re_{krit} , bei der die laminare Strömung gerade noch stabil ist. Re_{krit} lässt sich nur experimentell bestimmen, wobei man für die Länge l willkürlich eine leicht messbare Strecke des um- oder durchströmten Körpers wählt (z.B. den Radius eines Rohres). Die Angabe einer kritischen Reynoldsschen Zahl ohne Kennzeichnung der Bezugslänge ist sinnlos.

Bei Überschreiten der kritischen Reynoldsschen Zahl Re_{krit} mit der kritischen Geschwindigkeit $v_{krit} = \eta Re_{krit} / (\rho l) = \nu Re_{krit} / l$ setzt Turbulenz mit deutlicher Änderung des Strömungswiderstandes ein.

Re_{krit} schwankt auch bei ähnlichen Körpern sehr stark. Zum Beispiel findet man in der Literatur für Durchfluss durch ein Rohr mit dem Radius R meist den Wert $Re_{krit} = R v_{krit} / \nu = 1160$. In Wirklichkeit schwankt der Wert von etwa 1100 bis 20 000 je nach Rohrwandung und Einstrombedingungen.

Für eine umströmte Kugel mit dem Durchmesser d sowie für einen senkrecht zu seiner Symmetrieachse umströmten Kreiszyylinder mit dem Durchmesser d wurde

$$Re_{krit} \approx \frac{v_{krit} d}{\nu} \approx 3 \cdot 10^5$$

ermittelt (Siehe auch Aufgabe 8).

Anwendungen. Wegen des Hagen-Poiseuille'schen Gesetzes erhöht unser Organismus bei vermehrtem Blutbedarf nicht etwa den Blutdruck, sondern vergrößert geringfügig den Durchmesser der Adern. Der Treibstoffverbrauch von Autos dient bei hoher Geschwindigkeit praktisch nur zum Aufbringen der Bewegungsenergie der erzeugten Luftwirbel. Deshalb sind eine kleine Stirnfläche und ein kleiner Widerstandsbeiwert sehr wichtig. Ein Fallschirm hingegen hat durch seine Form einen hohen Strömungswiderstand. Landeklappen bei Flugzeugen erzeugen hohen Luftwiderstand bei großem Auftrieb.

In der Steuer- und Regelungstechnik verwendet man gelegentlich sog. „Fluidische Bauelemente“. Als Beispiel zeigt Bild 1.181 eine bistabile „Flip-Flop“-Stufe, die, stark vereinfacht, folgendermaßen arbeitet: Steigert man die Geschwindigkeit der bei E eintretenden Strömung langsam von Null aus, so ist die Strömung zunächst laminar und teilt sich auf beide Ausgänge A_1 und A_2 gleichmäßig auf. Bei einer bestimmten Geschwindigkeit v_{krit} wird die Strömung jedoch turbulent. Dadurch wird die Dicke der an den Wänden anhaftenden Grenzschicht verschieden groß. Bei geeigneter Formgebung des Bauelementes liegt dann die eine Auslassöffnung völlig in der dickeren Grenzschicht, sodass die ganze Strömung aus der anderen Öffnung austritt. Welchen Ausgang die Strömung bevorzugt, hängt zunächst von zufälligen Asymmetrien in der Strömung ab. Diese kann man jedoch auch erzwingen, indem man in eine der Steuerleitungen St 1 oder St 2 einen kurzen Strömungsimpuls injiziert. Dadurch kann man die Strömung wahlweise auf A_1 oder A_2 schalten. Ein solches bistabiles Bauelement ist der Grundbaustein für fluidische Rechner, die zwar langsamer als elektronische sind, dafür aber auch noch bei sehr hohen oder sehr tiefen Temperaturen und unter Einwirkung radioaktiver Strahlung arbeiten können.

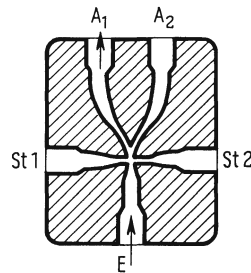


Bild 1.181 Fluidisches Flip-Flop

Aufgaben zu Abschn. 1.6.3.2 und 1.6.3.3

1. Eine Kugel mit dem Radius 1 cm und der Masse 5 g sinkt in einem weiten mit Flüssigkeit gefüllten Rohr mit der konstanten Geschwindigkeit 2,7 cm/s zu Boden. Die Flüssigkeit hat die Dichte $1,1 \text{ kg/dm}^3$. Wie groß ist ihre Zähigkeit?
2. Eine im Tal verlegte waagerechte Rohrleitung von 10 km Länge und dem Radius 10 mm ist an einen Wasserbehälter angeschlossen, dessen Wasserspiegel 2,5 m höher liegt.
 - a) Wie groß ist der Volumenstrom?
 - b) Wie hoch müsste der Wasserspiegel liegen, damit bei $Re_{\text{krit}} = 1150$ Turbulenz eintritt (beides bei $20 \text{ }^\circ\text{C}$)?
3. Den Winddruck auf einen Schornstein bei Windstärke 12 ($v = 50 \text{ m/s}$) nimmt man zu 1080 Pa an. Mit welchem Widerstandsbeiwert rechnet man dabei (Luftdichte $1,25 \text{ kg/m}^3$)?
4. Welche Sinkgeschwindigkeit hat ein Fallschirm mit der Stirnfläche 50 m^2 und dem Widerstandsbeiwert 1,35, an dem ein Körper mit der Masse 80 kg hängt, kurz vor der Landung und in $5,5 \text{ km}$ Höhe (halber Luftdruck)?
5. Welche Motorleistungen braucht ein Auto mit 3 m^2 Stirnfläche und $c_w = 1$, um mit den konstanten Geschwindigkeiten 72 km/h und 144 km/h zu fahren? (Rollreibung vernachlässigt.)
6. Es ist zu untersuchen, ob die Strömungen im Blutkreislauf des Menschen noch laminar erfolgen, d. h. ob $Re = R \varrho \bar{v} / \eta < Re_{\text{krit}} = 1150$ ist ($\varrho = 10^3 \text{ kg/m}^3$; $\eta = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Ns/m}^2$). In den Kapillaren ist bei $R = 4 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ $\bar{v} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}$; in der Aorta ist bei $R = 10 \text{ mm}$ $\bar{v} = 0,3 \text{ m/s}$.
7. Das Flugzeug Boeing 747 (Jumbo Jet) hat folgende Daten: Tragfläche $A_T = 511 \text{ m}^2$; Startmasse $3,2 \cdot 10^5 \text{ kg}$; Reisefluggeschwindigkeit 958 km/h ; Abhebegeschwindigkeit 234 km/h . Wie groß sind die Auftriebsbeiwerte beim Reiseflug in 11 km Höhe (Luftdichte $0,365 \text{ kg/m}^3$) und beim Abheben (Luftdichte $1,29 \text{ kg/m}^3$) mit ausgefahrenen Klappen?
8. Um den Gegner zu verwirren, können geschickte Volleyballspieler den Ball so schlagen, dass sich seine Flugbahn überraschend ändert. Die physikalische Ursache ist hierbei der unvermittelte Übergang von turbulenter in laminare Strömung. Welche Geschwindigkeit muss der Ball ($d = 21 \text{ cm}$) hierfür haben? (Am Anfang sollte diese ca. 10% größer als v_{krit} sein).

2 Wärmelehre

Der Wärmelehre oder Thermodynamik liegen Beobachtungen zugrunde, die bis ins Altertum zurückgehen. Als eigenes Gebiet hat sie sich im 17. und 18. Jahrhundert entwickelt, wobei der Aufschwung der Chemie einen maßgeblichen Einfluss hatte. Durch die geschichtliche Entwicklung bedingt sind drei verschiedene Betrachtungsweisen entstanden, die heute miteinander verflochten sind.

Phänomenologisch werden nur die Änderungen messbarer Größen und materieller Eigenschaften bestimmt und verglichen. Energetisch nennt man diejenige Anschauungsweise, die festgestellte Veränderungen durch Energiezufuhr oder -abfuhr begründet. In beiden Fällen gelangt man zu Größen und Beziehungen, die nach einer „tieferen“ Erklärung verlangen. So ist schließlich die atomistische Betrachtungsweise entstanden, die das Verhalten der Bausteine der Materie, der Atome, als Ursache aller Wärmeerscheinungen untersucht. Da hierbei Aussagen über das mit Hilfe statistischer Methoden erfassbare mittlere Verhalten vieler Atome gemacht werden, spricht man auch von statistischer Thermodynamik.

Die Gesetze der Wärmelehre sind Grundlage für viele technische Anwendungen. Dies gilt insbesondere für alle Arten von Wärmekraftmaschinen (s. Abschn. 2.7.1). Da alle realen Energieumwandlungen unter der Beteiligung von Wärme vor sich gehen, und weil viele Energieumwandlungen durch den thermodynamischen Wirkungsgrad bestimmt sind, ist die Wärmelehre Grundlage der gesamten Energietechnik. Da aber auch in allen anderen Bereichen der Technik praktisch nichts ohne den Austausch von Wärme geschieht, ist allgemein eine genaue Kenntnis der Gesetze der Wärmelehre unabdingbar.

2.1 Temperatur

Im täglichen Leben werden die Begriffe Wärme und Temperatur oft sehr ungenau benützt, obwohl jeder über Erfahrung bei Wärmevorgängen verfügt. Man muss einer Menge Wasser eine bestimmte Wärme z. B. mit einem Tauchsieder zuführen, um es zum Sieden zu bringen, der N -fachen Menge die N -fache Wärme. In beiden Fällen misst man beim Sieden die gleiche Temperatur. Ohne die Begriffe definiert zu haben, wird in diesem Vorgang der Unterschied der Größen Wärme und Temperatur deutlich.

2.1.1 Größen und Einheiten

Der Mensch hat in seiner Haut Organe, die bei Berührung mit jedem Körper empfindlich anzeigen, ob dieser wärmer oder kälter als die Oberfläche seiner Haut ist. Diesen mit den relativen Begriffen „warm“ oder „kalt“ bezeichneten Zustand eines Körpers nennt man seine Temperatur. Eine völlig befriedigende Definition der Temperatur können wir erst mit eingehenderen Kenntnissen von der Natur der Wärmeerscheinungen finden. Vorläufig genügt uns daher folgende

Definition: Den Zustand eines Körpers, der die dafür empfindlichen menschlichen Organe veranlasst, ihn als wärmer oder kälter zu empfinden, nennen wir seine Temperatur. Im Internationalen Einheiten-System ist die Temperatur T eine Basisgröße. Nach Länge, Zeit und Masse haben wir damit eine vierte Basisgröße eingeführt.

Um statt des subjektiven Eindrucks ein objektives Messverfahren festlegen zu können, musste man erst Eigenschaften von Körpern finden, die von der Temperatur abhängen.

□ **Versuch 1.** Ein Glaskolben, randvoll gefüllt mit gefärbtem Alkohol, ist mit einem durchbohrten Korken verschlossen, in dem ein Glasrohr steckt. Wenn man den Kolben über einer Flamme erhitzt, steigt die Flüssigkeitssäule im Rohr, bei Abkühlung des Kolbens sinkt sie wieder. □

Das Ergebnis von Versuch 1 entspricht einer bekannten Beobachtung, dass nämlich eine Flüssigkeit ein umso größeres Volumen hat, je wärmer sie ist, und dass diese Volumenvergrößerung dann auftritt, wenn die Flüssigkeit mit wärmerer Materie, hier der Flamme, in Berührung steht. Die Volumenänderung ist demnach ein Maß für die Temperaturänderung, und wir können mit ihrer Hilfe eine Einheit für die Temperatur einführen.

□ **Versuch 2.** Eine Glaskugel 1 mit angeschmolzenem Kapillarrohr 2, dessen Innendurchmesser über die ganze Länge konstant ist, ist mit Quecksilber gefüllt (Bild 2.1). Taucht man die Kugel in eine Mischung aus reinem Wasser und Eis, so steht nach kurzer Zeit der Quecksilberfaden an der Marke 3. Hält man die Kugel dann über bei 1013 hPa siedendes Wasser, so dass sie ganz vom Wasserdampf umgeben ist, so steigt der Faden bis zur Marke 4. □

Zum Zwecke einer willkürlichen Festlegung geht man von der Erfahrung aus, dass das Volumen einer bestimmten, gleichbleibenden Flüssigkeitsmenge unter bestimmten, reproduzierbaren Verhältnissen immer gleich groß ist. Solche reproduzierbaren Verhältnisse bieten z.B. der Tripelpunkt des Wassers, bei dem schmelzendes Eis, siedendes Wasser und Wasserdampf im Gleichgewicht bei gleichbleibendem Druck (1013 hPa) nebeneinander bestehen. Man spricht von Fest- oder Fixpunkten. Außer diesem gibt es auch noch weitere Festpunkte (s. Tafel 2.2).

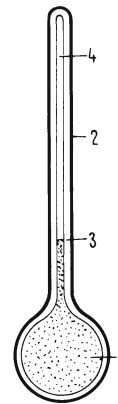


Bild 2.1 Ausdehnung von Quecksilber in Abhängigkeit von der Temperatur

Den Abstand zwischen den beiden Marken 3 und 4 in Versuch 2, die ein Maß für die Volumina des Quecksilbers an den beiden Fixpunkten sind, teilt man nun willkürlich in 100 gleiche Abstände und gewinnt so für die Temperaturdifferenz die Einheit 1 Kelvin¹⁾.

Legt man als den Nullpunkt der Temperaturskala den Schmelzpunkt des Eises fest, so erhält man die in der Praxis gebräuchliche Celsiuskala²⁾. Hier ist die oben eingeführte Einheit dann

¹⁾ William Thomson Lord Kelvin (1824 bis 1907).

²⁾ Anders Celsius (1701 bis 1744).

1 Grad Celsius = 1 °C

Temperaturen unter 0 °C werden negativ gezählt. Für die Temperatur in der Celsiuskala schreiben wir den Formelbuchstaben ϑ .

Wenn man beliebige Körper unterhalb des Schmelzpunktes von Wasser immer weiter abkühlt, so stellt man eine Grenztemperatur $-273,15$ °C fest, der man sich zwar immer mehr annähern, die man jedoch nie erreichen kann. Diese Erfahrung und theoretische Überlegungen (s. Abschn. 2.7.1) zeigen, dass es einen absoluten Nullpunkt der Temperatur gibt. Mit diesem Nullpunkt T_0 und dem Tripelpunkt T_{Tr} des Wassers lässt sich die so genannte thermodynamische Temperaturskala (s. Abschn. 2.7.1) oder Kelvinskala einführen:

1 Kelvin = 1 K ist der 273,16-te Teil der Temperatur des Tripelpunktes von Wasser, bezogen auf den absoluten Nullpunkt, bei 1013,2 hPa.

Tafel 2.2 International vereinbarte Festpunkte in °C beim Luftdruck 1013, 25 hPa

Siedepunkt von Sauerstoff	-182,962
Gefrierpunkt von Wasser	0
Siedepunkt von Wasser	+100
Erstarrungspunkt von Zinn	+231,968
Erstarrungspunkt von Silber	+961,78
Erstarrungspunkt von Gold	+1064,18

Die Celsiusstemperatur erhält man aus der thermodynamischen Temperatur mit

$$\vartheta = T - T_0 \quad (2.1)$$

Der Tripelpunkt von Wasser beträgt durch die Definition genau

$$\vartheta_{Tr} = T_{Tr} - T_0 = 273,16 \text{ K} - 273,15 \text{ K} = 0,01 \text{ °C oder } 273,16 \text{ K.}$$

Da die Messung der thermodynamischen Temperatur schwierig und ungenau ist, legt man eine praktische Temperaturskala fest. Die Internationale Temperaturskala von 1990 – ITS 90 – umfasst mit verschiedenen Messmethoden den Bereich von 0,65 K bis 1337,33 K mit geringer Messunsicherheit (10 mK im Bereich des Pt-Widerstands-Thermometers).

Im Oktober 2000 wurde die „Provisional Low Temperature Scale of 2000“ (PLTS 2000) beschlossen, welche die IST-90 um 3 Größenordnungen bis hinunter zu 0,9 mK erweitert.

In einigen Ländern, z.B. in den USA, ist eine weitere Temperaturskala in Gebrauch: Die Fahrenheitskala unterteilt die Temperaturdifferenz zwischen obigen Fixpunkten 0 °C und 100 °C in 180 gleiche Teile (1 Grad Fahrenheit 1 °F); ihr Nullpunkt liegt bei $-17,78$ °C. Die Temperatur in °C erhält man aus der Temperatur T_F in °F durch folgende Umrechnung

$$\vartheta = \frac{5 \cdot 32 \text{ °C}}{9} \left(\frac{T_F}{32 \text{ °F}} - 1 \right)$$

2.1.2 Temperaturabhängige Erscheinungen – Thermometer

Viele physikalische Größen ändern sich mit der Temperatur. Zu ihnen gehören: Die Abmessungen der Körper. Die meisten Körper dehnen sich bei Erwärmung aus (s. Abschn. 2.2).

Die Körperfarben. Durch Veränderung der Lichtabsorption können sich die Farben ändern. Die Farbe des abgestrahlten Lichtes selbstleuchtender Materie hängt ebenfalls von der Temperatur ab (s. Abschn. 2.6.3 und 5.2.5.5).

Die elektrische Kontaktspannung zweier verschiedener Stoffe. Sie steigt mit zunehmender Temperatur. Es entsteht eine sog. Thermospannung (s. Abschn. 3.2.5).

Der elektrische Widerstand. Er steigt bei Metallen und sinkt bei den meisten Halbleitern mit zunehmender Temperatur (s. Abschn. 3.2.2.2).

Jede von der Temperatur abhängige Größe kann zur Messung der Temperatur dienen.

Geräte zur Messung der Temperatur nennt man Thermometer. Die wichtigsten beruhen auf der Volumenänderung von Flüssigkeiten und Gasen, der Änderung des elektrischen Widerstandes, der Thermospannung (so genannte Thermolemente) und der optischen Strahlungsmessung (so genannte Pyrometer). Ihre ungefähren Anwendungsbereiche zeigt Bild 2.3. Im Einzelnen sind die Messverfahren in den oben angeführten Abschnitten beschrieben. Bei Temperaturmessungen muss man zur Vermeidung grober Fehler beachten, dass jedes Thermometer immer die temperaturabhängige Größe (Volumen etc.) in Abhängigkeit von seiner Eigentemperatur misst¹⁾. Alle Thermometer zeigen also nur ihre Eigentemperatur an; man muss deshalb darauf achten, dass Thermometer und zu messender Körper gleiche Temperatur haben. Wenn sich zwei Körper berühren, ändern sich meist ihre Temperaturen: der eine wird wärmer, der andere kälter. Wenn dieser Temperatúrausgleich beendet ist, befinden sich die Körper im so genannten thermischen Gleichgewicht.

Definition: Zwei Körper im thermischen Gleichgewicht haben die gleiche Temperatur.

Auf eine Reihe weiterer Umstände, die die Genauigkeit von Temperaturmessungen beeinträchtigen, gehen wir bei der Behandlung der jeweiligen physikalischen Zusammenhänge ein.

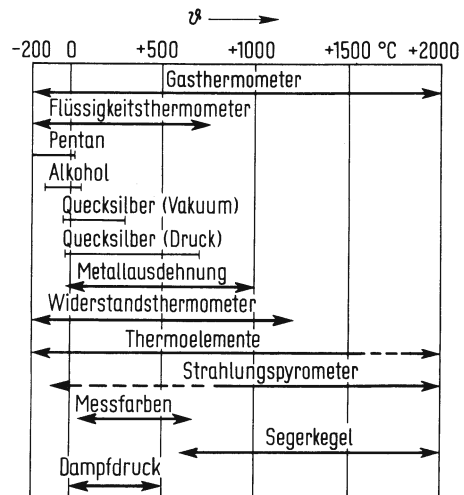


Bild 2.3 Anwendungsbereich verschiedener Temperaturmessverfahren

¹⁾ Ausnahme: Strahlungs-pyrometer.

2.2 Verhalten der Körper bei Temperaturänderung

In diesem Abschnitt wird die Abhängigkeit der Abmessungen, Volumina und – bei Gasen – des Druckes der Stoffe von der Temperatur beschrieben, ohne nach den Ursachen für die auftretenden Veränderungen zu fragen. In der Technik sind solche Temperatureinflüsse von großer Bedeutung. Mit den in Abschn. 2.2 abgeleiteten Gleichungen gelingt es, das Verhalten der Körper bei Temperaturänderung zu berechnen.

2.2.1 Feste Körper

□ **Versuch 3.** Ein Aluminiumrohr 1 (Bild 2.4) liegt mit zwei Kerben auf zwei prismatischen Auflagen 2. Die eine Auflage ist beweglich, ihre Auslenkung kann mit Hilfe des Zeigers 3 gemessen werden. Durch das Rohr leitet man heißen Wasserdampf, dessen Temperatur bekannt ist.

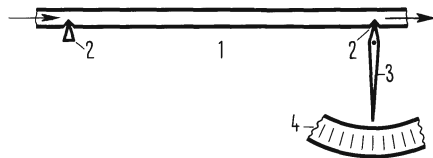


Bild 2.4 Messung der Längenausdehnung eines Rohres

Dadurch erhöht sich die Temperatur des Rohres, und es dehnt sich aus. Diese Längenausdehnung wird auf Skala 4 abgelesen. Die gleiche Messung mit einem Stahlrohr ergibt einen halb so großen Ausschlag. Mit einem Glasrohr erreicht er nur ein Drittel des ersten Wertes. □

Feste Körper dehnen sich mit wenigen Ausnahmen bei steigender Temperatur aus. Die Ausdehnung hängt von der Temperaturerhöhung und von der Art des Stoffes ab.

In bestimmten Temperaturbereichen ist die relative Längenänderung $\Delta l/l$ der Temperaturänderung proportional. Ist l_1 die Länge eines Körpers bei der Temperatur T_1 und l_2 die Länge bei der Temperatur T_2 , so ist die Längenänderung $\Delta l = l_2 - l_1$ der Temperaturänderung $\Delta T = T_2 - T_1$ und der Länge l_1 proportional $\Delta l \sim l_1(T_2 - T_1)$. Dann erhält man mit dem stoffabhängigen Proportionalitätsfaktor α_1

$$\begin{aligned}\Delta l &= l_2 - l_1 = \alpha_1 l_1 (T_2 - T_1) \\ l_2 &= l_1 (1 + \alpha_1 \Delta T)\end{aligned}\quad (2.2)$$

Definition: Den Quotienten aus relativer Längenänderung $\Delta l/l_1$ und Temperaturdifferenz ΔT nennt man den linearen oder Längenausdehnungskoeffizienten α_1 eines Stoffes

$$\alpha_1 = \frac{l_2 - l_1}{l_1(T_2 - T_1)} = \frac{\Delta l}{l_1 \Delta T}\quad (2.3)$$

Dieser ist selbst von der Temperatur und vom gewählten Temperaturintervall ΔT abhängig. Mit der Länge l_0 bei der Temperatur $T_0 = 273,15 \text{ K}$ ($= 0^\circ \text{C}$) und l_ϑ bei der Temperatur ϑ erhalten wir

$$\alpha_0 = \frac{l_\vartheta - l_0}{l_0(T_\vartheta - T_0)}$$

$$l_\vartheta = l_0 (1 + \alpha_0 \vartheta)^1$$

¹⁾ ϑ ist hier die Temperaturdifferenz $\vartheta - 0^\circ \text{C}$.

Bilden wir speziell

$$l_2 - l_0 = \alpha_0 l_0 (T_2 - T_0)$$

$$l_1 - l_0 = \alpha_0 l_0 (T_1 - T_0)$$

dann ist

$$l_2 - l_1 = \alpha_0 l_0 (T_2 - T_1)$$

Daraus folgt

$$\alpha_0 l_0 = \alpha_1 l_1,$$

$$\alpha_1 = \alpha_0 \frac{l_0}{l_1} = \frac{\alpha_0}{1 + \alpha_0 (T_1 - T_0)}$$

Tafel 2.5 Längenausdehnungskoeffizient $\alpha_0 \cdot 10^6$ in K^{-1} einiger technisch wichtiger Stoffe

Stoff	0...100 °C	0...300 °C	0...600 °C
Aluminium rein	23,8	25	31,5
Bronze	17,5	21	
Kupfer	16,8	17,8	16,07
Stahlbeton	14		
Stahl	9,5...12	10...13	11...20
Glas	5...10		
Invar (Nickelst.)	0,9		
Quarzglas	0,51	0,59	0,60

In den Tabellen finden wir meist die Längenausdehnungskoeffizienten α_0 für $T_0 = 273,15 \text{ K}$. Die Längenausdehnung hat bei jedem Körper eine Volumenänderung zur Folge. Somit ist im Allgemeinen die relative Volumenänderung $\Delta V/V$ der Temperaturänderung proportional. Mit dem Volumen V_1 bei der Temperatur T_1 , dem Volumen V_2 bei der Temperatur T_2 und der stoffabhängigen Proportionalitätskonstanten γ_1 schreiben wir

$$\Delta V = V_2 - V_1 = \gamma_1 V_1 (T_2 - T_1) \quad (2.4)$$

$$V_2 = V_1 (1 + \gamma_1 \Delta T)$$

Definition: Den Quotienten aus relativer Volumenänderung $\Delta V/V_1$ und Temperaturdifferenz ΔT nennt man den Volumen- oder Raumausdehnungskoeffizienten γ eines Stoffes.

$$\gamma_1 = \frac{V_2 - V_1}{V_1 (T_2 - T_1)} = \frac{\Delta V}{V_1 \Delta T} \quad (2.5)$$

Das Volumen eines Würfels mit der Kantenlänge l_1 vergrößert sich bei der Temperaturerhöhung $\Delta T = T_2 - T_1$ um $\Delta V = V_2 - V_1$ auf

$$V_2 = l_2^3 = l_1^3 (1 + \alpha_1 \Delta T)^3 = l_1^3 \left[1 + 3\alpha_1 \Delta T + 3(\alpha_1 \Delta T)^2 + (\alpha_1 \Delta T)^3 \right]$$

Da α_1 selbst sehr klein ist (Größenordnung 10^{-5} K^{-1}), kann man die beiden Summanden mit den Hochzahlen 2 und 3 vernachlässigen. Dann ist also $\gamma_1 = 3\alpha_1$.

Mit dem Volumen V_0 bei $\vartheta = 0 \text{ °C}$ und dem Raumausdehnungskoeffizienten γ_0 für 0 °C erhalten wir das Volumen bei der Temperatur ϑ

$$V_\vartheta = V_0 = 1 + \gamma_0 \vartheta \quad (2.6)$$

$$\gamma_0 = \frac{\Delta V}{V_0 \vartheta}$$

Es gibt auch negative Ausdehnungskoeffizienten. So zieht sich z.B. Kautschuk bei Erwärmen zusammen. Unter dem Namen Eukryptit gibt es Glaskeramik, die in weitem Bereich wählbare negative Ausdehnungskoeffizienten hat.

¹⁾ ϑ ist hier die Temperaturdifferenz $\vartheta - 0 \text{ °C}$.

Anwendungen. Die Ausdehnung mit steigender Temperatur muss da, wo größere Temperaturschwankungen auftreten, berücksichtigt werden (z.B. Brücken, Schienen, Freileitungen, Gussformen). Bei genauen Längenmessungen muss die temperaturabhängige Änderung des Längenmaßstabes beachtet werden. Die angegebenen Maße gelten nur für die Kalibriertemperatur (meist 20 °C); Messräume werden daher konstant auf dieser Temperatur gehalten. Bei Verbindungen (z.B. Schweißstellen) verschiedener Materialien muss man selbst auf geringe Unterschiede der Ausdehnungskoeffizienten achten. Das ist vor allem bei spröden Stoffen wichtig. Für metallische Einschmelzungen in Glas gibt es wegen der oft sehr unterschiedlichen Ausdehnungskoeffizienten spezielle, zu den einzelnen Glassorten passende Metalle oder Legierungen und Glassorten, die zwischen Metall und eigentlichen Glaskörpern eingeschmolzen werden.

Aus Blech, das aus zwei Legierungen mit verschiedenen Ausdehnungskoeffizienten zusammengewalzt wird, werden sog. Thermo-Bimetallstreifen geschnitten. Sie krümmen sich bei Temperaturänderungen in reproduzierbarer Weise, so dass man mit ihnen Temperaturmessgeräte aufbauen kann. Ihre Hauptverwendung haben sie als Schaltelemente, z.B. bei Temperaturregelung. Torsionspendel (z.B. Unruhe einer Uhr) werden vielfach aus Bimetall hergestellt. Bei Ausdehnung des Drehkörpers, der aus zwei Teilen besteht, biegen sich die Enden der beiden Teile nach innen, sodass das Massenträgheitsmoment und damit die Schwingungsdauer konstant bleiben (s. Abschn. 5.1.6).

Sehr feste Verbindungen erhält man durch sog. Aufschrumpfen. Dabei wird ein erwärmtes Teil (z.B. Kolben) über ein kaltes (z.B. Kolbenbolzen) geschoben. Nach dem Erkalten sitzt das aufgeschrumpte Teil dann sehr fest.

2.2.2 Flüssigkeiten

Flüssigkeiten verhalten sich im Grunde genauso wie Festkörper. Da sie jedoch keine feste Gestalt haben, interessiert nur ihre Volumenänderung. Diese wird durch Gl. (2.4) beschrieben. Allerdings ist der Raumausdehnungskoeffizient γ aller Flüssigkeiten größer als derjenige fester Körper. Zwischen verschiedenen Flüssigkeiten sind jedoch die Unterschiede geringer (Tafel 2.6). Da die Volumenänderung einer Flüssigkeit nur zusammen mit der des zugehörigen Gefäßes bestimmt werden kann, muss zur Ermittlung des Ausdehnungskoeffizienten der Flüssigkeit derjenige des Gefäßes berücksichtigt werden.

Tafel 2.6 Raumausdehnungskoeffizient $\gamma \cdot 10^3$ in K^{-1} einiger technisch wichtiger Flüssigkeiten bei 20 °C

Wasser	0,18	Toluol	1,08
Quecksilber	0,1818	Äthylalkohol	1,12
Heizöl	0,9...1,0	Benzol	1,25
Benzin	1,01...1,06	Pentan	1,60

Änderung der Dichte. Da die Dichte als $\rho = m/V$ definiert ist, gilt:

Dichte bei der Temperatur ϑ

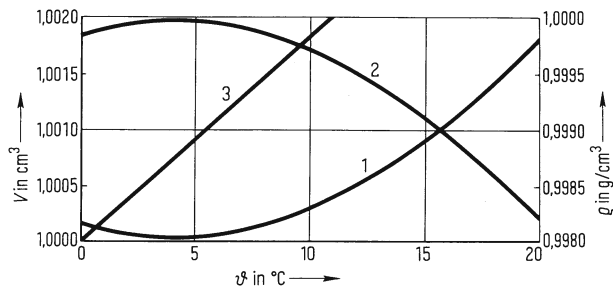
$$\rho_{\vartheta} = \frac{m}{V_{\vartheta}} = \frac{m}{V_0(1 + \gamma_0 \vartheta)} = \frac{\rho_0}{(1 + \gamma_0 \vartheta)} \quad (2.7)$$

mit dem Volumen V_0 bei 0 °C und der Dichte ρ_0 bei 0 °C. Für Wasser gilt Gl. (2.7) nur bei Temperaturen über 8 °C. Darunter weicht sein Verhalten deutlich ab. Die Dichte von Wasser hat bei 4 °C mit $\rho_{4\text{ °C}} = 0,999972 \text{ g/cm}^3$ ein Maximum (Bild 2.7) („Anomalie“ des Wassers). Danach liegt seine größte Dichte oberhalb des Gefrierpunktes. Folglich können

genügend tiefe Gewässer nicht bis zum Grund gefrieren; denn abgekühlte Schichten sinken nur so lange zu Boden, bis die untersten Schichten aus Wasser von 4 °C bestehen. Darüber befinden sich dann Wasserschichten mit nach oben abnehmender Temperatur.

Bild 2.7

Kurve 1 Volumen von 1 g Wasser bei 1013 hPa
 Kurve 2 Dichte von Wasser bei 1013 hPa
 Kurve 3 Volumen von Quecksilber, bezogen auf 1 cm³ bei 0 °C



Anwendungen. Die gegenüber festen Stoffen größere Ausdehnung von Flüssigkeiten muss z.B. bei Lagerung in Behältern beachtet werden. Legt man einer Temperaturmessung die mit der Ausdehnung von Quecksilber gewonnene Celsiusskala zugrunde, so dehnt sich Quecksilber definitionsgemäß natürlich gleichmäßig aus, d.h., wir erhalten eine lineare Abhängigkeit des Volumens von der Temperatur (Bild 2.7); die Flüssigkeitssäulen anderer Thermometer dehnen sich dagegen ungleichmäßig aus, was z.B. durch nichtlineare Unterteilung der Skala ausgeglichen werden kann.

2.2.3 Gase

2.2.3.1 Volumen- und Druckänderung von Gasen

In Abschn. 1.6.2.1 wird gezeigt, dass bei einem Gas das Produkt aus Druck und Volumen konstant ist, wenn sich die Temperatur nicht ändert (Gesetz von Boyle-Mariotte). In dem Bereich, in dem sich ein Gas nach diesem Gesetz verhält, nennt man es *ideal*. Wir werden uns zunächst auf den auch technisch interessanten idealen Bereich der Gase beschränken. Korrekturen, die notwendig sind, wenn sich der Zustand eines Gases außerhalb dieses Bereiches befindet, werden in Abschn. 2.4.4.2 behandelt. Bei Temperaturen über etwa 20 °C und Drücken bis zu einigen Tausend hPa verhalten sich z.B. Edelgase, Sauerstoff und Wasserstoff ziemlich gut wie das Modell des idealen Gases. Wenn man ein Gas erwärmt, ändert sich im Allgemeinen sowohl der Druck als auch das Volumen. Hält man eine der beiden Größen konstant, so kann man den Einfluss der Temperaturänderung auf die andere allein bestimmen.

Volumenänderung der Gase in Abhängigkeit von der Temperatur bei konstantem Druck

□ **Versuch 4.** Ein luftgefülltes Gefäß 1 ist mit einem leicht verschiebbaren Kolben 2 abgeschlossen (Bild 2.8). Erwärmt man das Gas z.B. durch Eintauchen des Gefäßes in siedendes Wasser, dann verschiebt sich der Kolben so, dass der Innendruck gleich dem äußeren Luftdruck bleibt. Die Volumenvergrößerung der Luft wird aus der Verschiebung des Kolbens ermittelt. Wiederholt man den Versuch mit anderen Gasen, so verschiebt sich der Kolben jedes Mal um den gleichen Betrag. □



Bild 2.8 Ausdehnung eines Gases bei konstantem Druck

Führt man wie bei Flüssigkeiten auch für Gase einen Raumausdehnungskoeffizienten $\gamma_0 = \Delta V / (V_0 \vartheta)$ ein, so ergeben genaue Messungen, dass dieser für alle idealen Gase mit dem Wert $3,66 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1} = (1/273,15) \text{ K}^{-1}$ gleich groß ist.

Die relative Volumenänderung eines Gases ist bei konstantem Druck der Temperaturänderung proportional. Der Raumausdehnungskoeffizient γ_0 ist für ideale Gase gleich $(1/273,15) \text{ K}^{-1}$.

$$\frac{\Delta V}{V_0} = 1 + \frac{1}{273,15 \text{ K}} \vartheta \quad \text{bei } p = \text{const.}$$

V_0 ist das Volumen bei 0°C . Also gilt

$$V_\vartheta = V_0 \left(1 + \frac{1}{273,15 \text{ K}} \vartheta \right) = V_0 \frac{273,15 \text{ K} + \vartheta}{273,15 \text{ K}} \quad (2.8)$$

Zur Vereinfachung dieser Gleichung benützen wir den in Gl. (2.1) eingeführten Zusammenhang der Kelvin- und Celsiusstemperatur

$$273,15 \text{ K} + \vartheta = T$$

Damit wird aus Gl. (2.8)

$$V_\vartheta = V_0 \frac{1}{273,15 \text{ K}} \vartheta \quad \text{bei } p = \text{const.} \quad (2.9)$$

mit $T_0 = 273,15 \text{ K}$ wird $V = V_0 T / T_0$

Druckänderung der Gase in Abhängigkeit von der Temperatur bei konstantem Volumen

Versuch 5. Ein starkwandiges, luftgefülltes Gefäß hat ein Manometer zur Anzeige des Druckes. Dieser steigt beim Erwärmen der Luft. Versuche mit verschiedenen Gasen ergeben für gleiche Temperaturen die gleichen Druckwerte, falls der Anfangsdruck bei Zimmertemperatur in allen Fällen gleich war.

Führt man einen so genannten Druck- oder Spannungskoeffizienten $\beta_0 = \Delta p / (p_0 \vartheta)$ ein (p_0 ist der Druck bei 0°C), so zeigt Versuch 5, dass dieser mit $(1/273,15) \text{ K}^{-1}$ für alle idealen Gase gleich dem Raumausdehnungskoeffizienten γ_0 ist.

Die relative Druckänderung eines Gases bei konstantem Volumen ist der Temperaturänderung proportional. Der Druckkoeffizient β_0 ist für ideale Gase gleich dem Raumausdehnungskoeffizienten γ_0

$$\frac{\Delta p}{p_0} = \frac{1}{273,15 \text{ K}} \vartheta \quad \text{bei } V = \text{const.}$$

$$p_\vartheta = p_0 \left(1 + \frac{1}{273,15 \text{ K}} \vartheta \right) = p_0 \frac{273,15 \text{ K} + \vartheta}{273,15 \text{ K}} = p_0 \frac{T}{273,15 \text{ K}}$$

Auf die gleiche Weise wie bei Gl. (2.9) erhalten wir

$$p = p_0 \frac{T}{T_0} \quad \text{bei } V = \text{const.} \quad (2.10)$$

Mit Gl. (2.9) ergibt sich für die Volumina V_1 und V_2 bei beliebigen Temperaturen T_1 und T_2

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{V_0 T_1 / 273,15 \text{ K}}{V_0 T_2 / 273,15 \text{ K}} = \frac{T_1}{T_2} \quad \text{bei } p = \text{const.} \quad (2.11)$$

Ebenso wird mit Gl. (2.10) für die Drücke p_1 und p_2 bei beliebigen Temperaturen T_1 und T_2

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{p_0 T_1 / 273,15 \text{ K}}{p_0 T_2 / 273,15 \text{ K}} = \frac{T_1}{T_2} \quad \text{bei } V = \text{const.} \quad (2.12)$$

Den in Gl. (2.9) und (2.10) sowie (2.11) und (2.12) wiedergegebenen Zusammenhang nennt man auch Gesetz von Gay-Lussac (1778 bis 1850).

2.2.3.2 Die allgemeine Zustandsgleichung idealer Gase

Wird die Temperatur einer abgeschlossenen Menge eines idealen Gases mit der Masse m bei konstantem Druck von T_0 auf T erhöht, so erhält man mit Gl. (2.11) das Volumen $V' = V_0 T/T_0$. Komprimiert man das Gas anschließend bei konstanter Temperatur, ergibt sich nach Boyle-Mariotte das Volumen $V = V' p_0/p = V_0 T p_0/(T_0 p)$ und damit $pV/T = p_0 V_0/T_0$ oder allgemein

$$\frac{pV}{T} = \text{const.} \quad \text{bei } m = \text{const.} \quad (2.13)$$

Für zwei verschiedene Zustände 1 und 2 gilt dann

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \quad \text{bei } m = \text{const.} \quad (2.14)$$

Gl. (2.13) ist die – sehr einfache – Erweiterung des Gesetzes von Boyle-Mariotte. Danach ist die Größe pV/T für eine bestimmte Menge eines idealen Gases eine von Druck, Volumen und Temperatur unabhängige Konstante. Verschiedene Massen eines Gases nehmen bei gleichem Druck und gleicher Temperatur verschiedene Volumina ein. Letztere sind den Massen proportional. Damit wird $pV/T \sim m$ oder

$$pV = m R_S T \quad (2.15)$$

Das ist die allgemeine Zustandsgleichung idealer Gase, oft einfach allgemeine Gasgleichung genannt. Die Größe R_S ist eine für das jeweilige Gas charakteristische Konstante, die so genannte spezifische Gaskonstante.

Wir kommen zur Gl. (2.15) auch, wenn wir die Gleichung $pV/T = p_0V_0/T_0$ mit m/m erweitern.

$$pV = \frac{p_0 V_0}{T_0} mT \quad (2.16)$$

Das ergibt für die Gaskonstante

$$R_S = \frac{p_0 V_0}{T_0 m}$$

Wir setzen in Gl. (2.16) z.B. die Werte für den so genannten Normzustand¹⁾ eines Gases ein:

$T_0 = 273,15 \text{ K}$; $p_0 = 1,01 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 = 1013 \text{ hPa}$, und erhalten mit $\rho_0 = m/V_0$

$$R_S = \frac{370,9 \text{ N}}{\rho_0 \text{ m}^2 \text{ K}}$$

Mit dem so genannten spezifischen Volumen $V_S = V/m$ wird aus Gl. (2.15)

$$p V_S = R_S T \quad (2.17)$$

Setzen wir in Gl. (2.15) die Dichte $\rho = m/V$ ein, so erhalten wir

$$p = \rho R_S T \quad \text{oder} \quad \rho = \frac{1}{R_S} \frac{p}{T} \quad (2.18)$$

Eine besonders interessante und wichtige Form der allgemeinen Zustandsgleichung ergibt sich, wenn man in Gl. (2.15) die Gesamtmasse m durch die Zahl N der in dem betrachteten System vorhandenen Moleküle und die Masse m_M eines Moleküls ausdrückt, also $m = N m_M$ setzt:

$$pV = N m_M R_S T \quad (2.19)$$

Das Produkt $m_M R_S$ ist nämlich eine von der Gasart unabhängige universelle Naturkonstante. Wie oben hergeleitet, gilt $R_S = p_0 V_0 / (T_0 m) = p_0 V_0 / (T_0 N m_M)$, also ist $m_M R_S = p_0 V_0 / (T_0 N)$.

Auf Seite 175 wird gezeigt, dass bei allen Gasen bei gleichem Druck und gleicher Temperatur gleiche Volumina stets gleich viele Moleküle enthalten. Also hat $m_M R_S$ für alle Gase den gleichen Wert. Man nennt diese Konstante

$$k = m_M R_S \quad \text{Boltzmannkonstante}$$

Ihr Wert ist

$$k = 1,38065 \cdot 10^{-23} \text{ Nm/K}$$

Mit ihr erhält die allgemeine Zustandsgleichung die Form

$$pV = N k T \quad (2.20)$$

Die Gl. (2.13), (2.14), (2.15), (2.17), (2.18), (2.19) und (2.20) sind alle gleichberechtigte Formen der allgemeinen Zustandsgleichung idealer Gase.

¹⁾ Normzustand nach DIN 1343/1345.

In der Zustandsgleichung (2.15) steht die Masse m . Der beschriebene Zusammenhang ist aber natürlich unabhängig von der Trägheit oder der Schwere, er hängt vielmehr von der so genannten Stoffmenge ab. Diese ist nach dem Gesetz über Einheiten im Messwesen in der Bundesrepublik Deutschland eine Basisgröße.

Definition: Die Stoffmenge ist definiert als die Anzahl gleicher – z.B. atomarer – Teilchen. Sie erhält das Formelzeichen ν .

Einheit: Die Einheit der Stoffmenge ist das Mol mit dem Einheitensymbol mol.

1 mol ist die Stoffmenge eines Systems bestimmter Zusammensetzung, das aus ebenso vielen Teilchen besteht, wie Atome in (12/1000) kg des Nuklids ^{12}C (s. Abschn. 6.2) enthalten sind, nämlich $6,022 \cdot 10^{23}$ (s.u.). Häufiger verwendet wird das Kilomol: 1 kmol = 1000 mol.

Bei der Benützung des mol oder kilomol müssen die Teilchen spezifiziert sein und können Atome, Moleküle, Ionen, Elektronen sowie andere Teilchen oder Gruppen solcher Teilchen genau angegebener Zusammensetzung sein.

Die Benützung der Stoffmenge ist immer dann sinnvoll, wenn die Zahl der Teilchen eines Systems bekannt ist, oder wenn man diese abzählen kann. Meist ist dies jedoch in der Ingenieurpraxis nicht der Fall. Solange relativistische Massenänderungen bei einem Vorgang unberücksichtigt bleiben können – und das ist in der Technik fast immer der Fall – ist es sinnvoll, eine bei einer bestimmten Stoffart der Stoffmenge proportionale Größe wie die Masse¹⁾ an Stelle der Stoffmenge zu verwenden, so wie man z.B. bei der Geldwaage die Menge bestimmter Münzen durch eine Wägung bestimmt. So gibt es also zwei Möglichkeiten, die durch die Zustandsgleichung ausgedrückten Zusammenhänge zu beschreiben, mit Hilfe der Menge des Stoffes oder mit Hilfe der Masse. Beide Verfahren sind physikalisch korrekt.

Masse und Stoffmenge haben voneinander unabhängige Dimensionen, obwohl die Einheiten physikalisch voneinander abhängen. Würde man z.B. die Definition des Kilogramm ändern, so würde sich diejenige des mol mit ändern.

Wenn man die Masse eines Systems kennt, kann man auch dessen Stoffmenge angeben. Hierzu benötigen wir jedoch folgende

Definition: Das Verhältnis aus der Masse eines Atoms zu 1/12 der Masse des Kohlenstoffatoms ^{12}C nennen wir relative Atommasse A_r . Die relative Molekülmasse M_r eines Moleküls ist gleich der Summe der relativen Atommassen der im Molekül vorhandenen Atome²⁾. Man nennt die Masse $1 \text{ u} = \frac{1}{12} m(^{12}\text{C}) = 1,660 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ atomare Masseneinheit.

Diese atomare Masseneinheit wird in der Atomphysik (Abschn. 6) benützt.

¹⁾ Wir meinen in diesem Abschnitt grundsätzlich die sog. Ruhemasse, s. Abschn. 8.2.2.

²⁾ Früher auch Atom- bzw. Molekulargewicht genannt. Weit besser als relative Atommasse bzw. relative Molekülmasse wären die Bezeichnungen Atommassenverhältnis und Molekülmassenverhältnis.

Definitionsgemäß enthalten 12 kg ^{12}C genau $6,022 \cdot 10^{26}$ Atome mit je der Masse m (^{12}C). Die Masse 12 kg ^{12}C entspricht also der Stoffmenge 1 Kilomol. Die Stoffmenge pro Masse ^{12}C ist damit $\frac{\nu}{m(^{12}\text{C})} = \frac{1 \text{ Kilomol}}{12 \text{ kg}}$. Bei Atomen oder Molekülen, deren Masse größer oder kleiner als diejenige eines Kohlenstoffatoms ist, nämlich $m = \frac{M_r}{M_r(^{12}\text{C})} m(^{12}\text{C})$, ergibt die Masse $\frac{M_r}{M_r(^{12}\text{C})} \cdot 12 \text{ kg}$ die Stoffmenge 1 Kilomol. Da $M_r(^{12}\text{C}) = 12$ ist, ist dann die Stoffmenge pro Masse

$$\frac{\nu}{m} = \frac{1 \text{ Kilomol}}{\frac{M_r}{M_r(^{12}\text{C})} \cdot 12 \text{ kg}} = \frac{1 \text{ Kilomol}}{M_r \text{ kg}}$$

Damit erhalten wir die Stoffmenge ν eines beliebigen Systems, wenn wir dessen Masse m mit dem Faktor $\frac{1}{M_r} \frac{\text{kmol}}{\text{kg}}$ multiplizieren:

$$\nu = \frac{m \text{ kmol}}{M_r \text{ kg}} \quad (2.21)$$

Beispiel 1. Die relative Molekülmasse von Stickstoff ist 28,01. Die Stoffmenge 1 kmol N_2 hat also die Masse $m = \frac{1 \text{ kg kmol} \cdot 28,01 \text{ kg}}{\text{kmol}} = 28,01 \text{ kg}$. 1 kg Stickstoff hat entsprechend die Stoffmenge

$$\nu = \frac{1 \text{ kg kmol}}{28,01 \text{ kg}} = 0,036 \text{ kmol}.$$

In der Wärmelehre ist es üblich, auf die Masse bezogene Größen spezifisch zu nennen (vgl. z.B. Abschn. 2.3.2.2). Auf die Stoffmenge und damit auf die Zahl der Teilchen bezogene Größen nennt man molare Größen. Diese Begriffe werden es uns in den folgenden Abschnitten erleichtern, zwischen beiden Verfahren zu unterscheiden.

Normdichte von Gasen. Diese ist in Abschn. 1.6.2.1 definiert. Tafel 2.9 enthält außer den Normdichten noch die relativen Molekülmassen. Bildet man das Verhältnis der Normdichten zweier Gase und das Verhältnis ihrer relativen Molekülmassen, so erhält man ein bemerkenswertes Ergebnis:

Die Normdichten zweier Gase verhalten sich wie ihre relativen Molekülmassen.

Tafel 2.9 Normdichte ρ_0 in kg/m^3 und relative Molekülmasse M_r einiger Gase

	Ar	He	Luft	O_2	N_2	H_2
ρ_0	1,784	0,179	1,293	1,429	1,252	0,090
M_r	39,948	4,003	28,964	31,998	28,014	2,016

Zum Beispiel ist

$$\rho_{\text{O}_2}/\rho_{\text{H}_2} = 1,429/0,090 = 32/2 = 16 \quad \text{oder} \quad \rho_{\text{N}_2}/\rho_{\text{H}_2} = 1,252/0,090 = 28/2 = 14$$

Da die relativen Molekülmassen sich aber auf Grund ihrer Definition wie die Massen der Moleküle verhalten, sind die Normdichten auch den Molekülmassen proportional. Daraus folgt schließlich das

Gesetz von Avogadro¹⁾: Bei gleicher Temperatur und gleichem Druck enthalten gleiche Volumina verschiedener Gase gleich viele Moleküle.

Die spezifische Molekülzahl, also die Zahl der Moleküle pro Masse, ist bei verschiedenen Gasen natürlich unterschiedlich. Dagegen ist die molare Molekülzahl für alle Gase gleich. Sie ergibt sich definitionsgemäß zu

$$N_A = \frac{N}{\nu} = \frac{6,022 \cdot 10^{26}}{\text{kmol}} \quad \text{Avogadro-Konstante} \quad (2.22)$$

Die Avogadro-Konstante – früher auch Loschmidtsche Zahl genannt – ist eine Naturkonstante (s.a. S. 692) wie die Lichtgeschwindigkeit. Sie stellt auch die Verbindung her zwischen der makroskopischen Masseneinheit Kilogramm und der oben eingeführten relativen Atommasse.

Wir erweitern nun wieder die Gleichung $pV/T = p_0V_0/T_0$, diesmal mit ν/ν , und erhalten $pV = (p_0V_0\nu/T_0) \nu T$. Wie $p_0V_0/(T_0m) = R_S$, ist auch $p_0V_0/(T_0\nu) = R$ eine Konstante. Da nach dem Gesetz von Avogadro das so genannte molare Normvolumen V_0/ν für alle Gase den gleichen Wert, nämlich $22,413 \text{ m}^3/\text{kmol}$ hat, ist die Konstante R für alle Gase gleich. Aus den Werten für den Normzustand eines Gases ergibt sich $R = 8,314 \cdot 10^3 \text{ Nm}/(\text{kmol K})$.

Die molare oder allgemeine Gaskonstante R ist für alle Gase gleich

$$R = 8,314 \cdot 10^3 \frac{\text{Nm}}{\text{kmol K}}.$$

Mit ihr lautet die allgemeine Gasgleichung

$$pV = \nu RT \quad (2.23)$$

Mit Gl. (2.15), (2.20) und den beiden Gaskonstanten R_S und R (Gl. (2.23)) wird

$$k = \frac{mR_S}{N} = \frac{\nu R}{N} \quad (2.24)$$

Damit sind alle Voraussetzungen zur Behandlung der Zustandsgleichung gegeben. Um vom einen Verfahren mit Verwendung der Masse in das andere mit Verwendung der Stoffmenge überzugehen oder umgekehrt, muss man also nur den Faktor mR_S ersetzen durch νR oder umgekehrt

$$m R_S = \nu R \quad (2.25)$$

Anwendungen. Die allgemeine Zustandsgleichung der Gase ist die Grundlage für die Behandlung thermischer Zustandsänderungen von Gasen. Auf die einzelnen Anwendungen dieser Zustandsänderungen wird in Abschn. 2.4.3 eingegangen. Das Verhältnis der absoluten Temperaturen zweier Körper ist gleich

¹⁾ Amadeo Avogadro (1776 bis 1856).

dem Verhältnis der Drücke derselben Gasmenge bei gleichem Volumen, die mit den Körpern über längere Zeit in enger Berührung stehen. Das Verhältnis ist sogar von der Gasart unabhängig. Während sich bei allen verschiedenen Stoffen im festen oder flüssigen Zustand verschiedene Volumen-Temperaturkurven ergeben, wenn man ihre Volumenänderung als Funktion der Temperatur ermittelt, ist das bei verschiedenen Stoffen im gasförmigen Zustand nicht der Fall. Gase eignen sich also zur Festlegung einer Temperaturskala und zur genauen Messung der Temperatur in so genannten Gasthermometern. Die mit Gasthermometern gemessenen Temperaturen entsprechen ziemlich genau der so genannten thermodynamischen Temperaturskala (s. Abschn. 2.1.1 und 2.7.1).

Aufgaben zu Abschn. 2.2

1. Ein Stahlbandmaß ist bei 20 °C geeicht. Man misst mit ihm bei -15 °C den Abstand 1,2750 m. ($\alpha_0 = 11 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$). Wie groß sind a) der wahre Abstand, b) die absolute Messunsicherheit, c) die relative Messunsicherheit?
2. So genannte Rostpendel (Bild 2.10) von Uhren bestehen aus Stäben verschiedener Materialien, z.B. aus Stahl 1 und einer Zinklegierung 2.

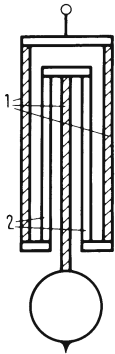


Bild 2.10
Rostpendel

Die Längen der Stäbe (in unserer Aufgabe sind alle Eisenstäbe gleich lang) sind so gewählt, dass die Pendellänge bei Erwärmung unverändert bleibt ($\alpha_{0\text{Fe}} = 11 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$; $\alpha_{0\text{Zn}} = 28 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$). Wie verhalten sich die Längen bei 0 °C?

3. Der bei 30 °C abgelesene Barometerstand 700 mm Hg (entspricht $p = 931 \text{ hPa}$ eines Quecksilberbarometers) soll auf den Stand bei 0 °C umgerechnet werden (so genannter reduzierter Barometerstand).
4. Man berechne die spezifische Gaskonstante für Wasserstoff, Sauerstoff und Propan (C_3H_8).
5. Das Volumen eines Gases bei 0 °C und dem Luftdruck 1013 hPa nennt man Normvolumen. Wie groß ist es für Luft, die sich bei 20 °C und $0,96 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ in einem 60 m^3 großen Raum befindet?
6. Wie groß ist das Volumen von 0,8 kg Sauerstoff bei 47 °C und 4000 hPa Druck?

2.3 Energie und Wärme

Im folgenden Abschnitt führen wir die Größe Wärme ein und zeigen, dass die Zufuhr von Wärme ein ähnlicher Prozess ist wie das Verrichten von Arbeit. In jedem Fall tritt eine Änderung der Energie oder des Energieinhaltes eines Körpers ein. Während sich z.B. durch Hubarbeit die potentielle Energie eines Körpers sichtbar erhöht, wird durch Wärmezufuhr die Summe der potentiellen und/oder kinetischen Energien der Moleküle eines Körpers erhöht. Von außen erkennbar ist dies durch eine Erhöhung der Temperatur und/oder die Änderung des Aggregatzustandes. Wir nennen die Summe der Energiezustände der Moleküle eines Körpers dessen innere Energie. Außerdem kann Wärmezufuhr auch das Volumen eines Körpers verändern, das heißt, es kann Ausdehnungsarbeit verrichtet werden.

Brownsche Molekularbewegung

Im Jahre 1827 entdeckte der englische Botaniker Robert Brown, dass feine Pflanzensporen im Wasser zitternde, ungeordnete Bewegungen ausführen. Diese so genannte Brownsche Bewegung wurde seither in unzähligen Versuchen mit kleinen, in einer Flüssigkeit oder einem Gas suspendierten Teilchen nachgewiesen. Mit Milch oder einer

Rutillsuspension kann diese Bewegung unter dem Mikroskop direkt beobachtet werden. Diese Beobachtung gehört zu den eindrucksvollsten Versuchen und trug wesentlich zur Entwicklung der im folgenden Abschnitt behandelten Theorie der Wärme bei. Die Moleküle eines Gases oder – wie die Versuche zeigen – auch einer Flüssigkeit sind in dauernder Bewegung. Sie stoßen gegeneinander (und gegen die Begrenzungswände) ebenso wie gegen die im Medium suspendierten sehr kleinen Teilchen (Fetttröpfchen, Rauchteilchen, Mineralien usw.).

Unter dem Einfluss der Stöße ändern die Teilchen dauernd Betrag und Richtung ihrer Geschwindigkeit (Bild 2.11). Sie führen eine regellose Zitterbewegung aus, die sich mit steigender Temperatur deutlich verstärkt. Die unsichtbaren Moleküle stoßen gegen die sichtbaren Teilchen, so dass diese sich wegen ihrer sehr viel größeren trägen Masse entsprechend langsamer bewegen. So ist die Beobachtung dieser Bewegung eine indirekte Beobachtung der regellosen Bewegung der Moleküle.

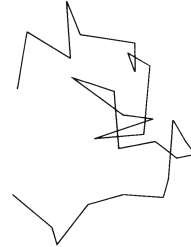


Bild 2.11 Brownsche Bewegung eines in einer Flüssigkeit suspendierten Teilchens

2.3.1 Kinetische Gastheorie

Der Druck eines Gases ist vergleichbar mit dem durch einen Kolben in einer Flüssigkeit erzeugten Druck. Die Zustandsgleichung gibt den Zusammenhang zwischen dem Druck, dem Volumen und der Temperatur des Gases wieder. Wir wollen versuchen, diesen Zusammenhang verständlich zu machen.

2.3.1.1 Modellvorstellungen

In der Mechanik haben wir die Bewegungen der Körper als Bewegungen eines Massenpunktes oder eines starren Körpers vereinfacht. Mit diesen Modellen konnten wir die Bewegungen nicht deformierbarer Körper beschreiben. Bei der Bewegung von Flüssigkeiten dürfen wir diese durch ein Modell makroskopischer Kugeln ersetzen. Die Dichte der Gase ist bei Atmosphärendruck rund $1/1000$ der Dichte von festen oder flüssigen Stoffen. Da die Bausteine, die Moleküle, die gleichen sind, muss ihr Abstand entsprechend größer sein. Dass die Moleküle eines Gases frei beweglich sind, geht schon daraus hervor, dass Gase im Allgemeinen jeden Raum ausfüllen, der sich ihnen bietet. Die Moleküle müssen sich also durch den Raum bewegen, sie haben eine Geschwindigkeit. Das ergibt sich auch aus der Brownschen Molekularbewegung. Unser Modell muss nun bestimmte Eigenschaften dieser Moleküle wiedergeben. Weil sich alle Gase gleich verhalten, braucht es keine Eigenschaften der Moleküle bestimmter Gase zu enthalten. Da man auch Gase nicht beliebig zusammendrücken kann, dürfen wir die einzelnen Moleküle selbst als feste Körper ansehen, und da die gleichen Moleküle in fester Phase einen rund 1000 mal kleineren Raum einnehmen, dürfen wir ihre Ausdehnung vernachlässigen.

In unserem Modell besteht ein ideales Gas aus kleinsten elastischen Kugeln. Diese können gegeneinander und gegen die Begrenzungswände stoßen. Zwischen den elastischen Stößen fliegen sie geradlinig und gleichförmig. Sie üben also außer durch Stöße keine Kräfte aufeinander aus. Der Druck auf die Gefäßwände ist eine Folge der Molekülstöße.

Wir werden mit diesem Modell versuchen, die allgemeine Gasgleichung mechanisch zu erklären. Kommen wir auf experimentell bestätigte Ergebnisse, so ist das zugleich ein Beweis der guten Annäherung unseres Modells an die Wirklichkeit.

2.3.1.2 Druck in einem Gas

In dem würfelförmigen Gasraum (Bild 2.12) mit der Kantenlänge a bewegen sich N Moleküle mit den Massen m_M . Der Druck p auf eine Wand mit der Fläche $A = a^2$ soll berechnet werden. Dazu betrachten wir zunächst ein Molekül mit der Masse m_M , das in x -Richtung mit der Geschwindigkeit v_1 fliegt. Es stößt elastisch gegen die Wände. Die Flugzeit zwischen zwei Stößen auf dieselbe Wand ist $\Delta t = 2a/v_1$. Die Anzahl der Stöße pro Zeit ist dann $1/\Delta t = v_1/2a$. Bei jedem Stoß dieses Moleküls wird auf die Wand der Impuls $|\Delta \vec{p}_1| = 2m_M v_1$ übertragen. Die von diesem Molekül auf eine Begrenzungsfläche ausgeübte Kraft ist somit $F_1 = |\Delta \vec{p}_1| \Delta t = 2m_M v_1 \cdot v_1/2a = m_M v_1^2/a$. Alle Moleküle haben jedoch verschiedene Geschwindigkeiten v_1, v_2, \dots, v_N , und nur ein Drittel aller N Moleküle bewegt sich im Mittel in x -Richtung hin und her.

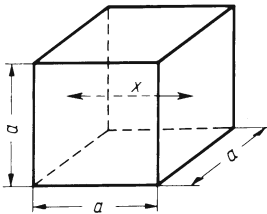


Bild 2.12 Zur kinetischen Theorie der Wärme

Also ist die Gesamtkraft

$$F = \frac{1}{3} \frac{m_M}{a} (v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_N^2)$$

Wir nennen

$$\frac{(v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_N^2)}{N} = \overline{v^2}$$

das mittlere Geschwindigkeitsquadrat. Damit wird nach Erweiterung mit der Molekülnzahl N

$$F = \frac{1}{3} \frac{m_M N (v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_N^2)}{aN} = \frac{1}{3} \frac{Nm_M \overline{v^2}}{a}$$

Der Druck p ist gleich Kraft pro Fläche. Mit der Gesamtmasse $m = N m_M$ und $V = a^3$ können wir also schreiben

$$p = \frac{F}{a^2} = \frac{1}{3} \frac{N m_M \overline{v^2}}{a^3} = \frac{1}{3} \frac{m \overline{v^2}}{V} \quad \text{und}$$

$$pV = \frac{1}{3} m \overline{v^2} \tag{2.26}$$

Der Druck eines idealen Gases ist dem mittleren Geschwindigkeitsquadrat der Moleküle proportional. Ist dieses bei konstanter Temperatur konstant, so erhalten wir das Boyle-Mariottesche Gesetz.

Mit Gl. (2.26) ist die Berechnung von $\sqrt{\overline{v^2}}$ aus makroskopischen Daten möglich.

¹⁾ Um Verwechslungen zwischen dem Druck und dem Impuls, die das gleiche Symbol p haben, zu verhindern, schreiben wir hier den Betrag des Impulses in der Form $|\vec{p}|$.

Beispiel 2. Der Wert $\sqrt{\overline{v^2}}$ weicht nur gering von der mittleren Geschwindigkeit der Moleküle ab (s. Abschn. 2.3.1.3). Setzt man bei Sauerstoff $p_0 = 1013 \text{ hPa} = 1,01 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ und $\rho_0 = 1,429 \text{ kg/m}^3$, so wird die mittlere Geschwindigkeit $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{3p_0/\rho_0} = 460 \text{ m/s}$ und für Wasserstoff mit $\rho_0 = 0,09 \text{ kg/m}^3$ wird $\sqrt{\overline{v^2}} = 1840 \text{ m/s}$ (vgl. auch Abschn. 2.6.4 Diffusion).

2.3.1.3 Bewegungsenergie der Moleküle

Wenn wir die kinetische Energie der Moleküle durch die Zustandsgrößen der allgemeinen Gasgleichung ausdrücken wollen, ist es natürlich sinnvoll, diese in der Form (2.15) unter Verwendung der Masse zu benützen.

Wir vergleichen Gl. (2.26) mit der allgemeinen Gasgleichung $pV = mR_S T$. Danach muss $(1/3) m\overline{v^2} = mR_S T$ sein. Durch Umformen erhält man

$$\frac{2}{3} \frac{m\overline{v^2}}{2} = mR_S T$$

oder wegen $m = Nm_M$

$$\frac{Nm_M\overline{v^2}}{2} = \frac{3}{2} mR_S T$$

Mit Gl. (2.20) und $k = R_S m/N$ wird dann die mittlere kinetische Energie $\overline{W}_{\text{kin M}}$ eines Moleküls

$$\overline{W}_{\text{kin M}} = \frac{m_M\overline{v^2}}{2} = \frac{3}{2} \frac{m R_S T}{N} = \frac{3}{2} kT \quad (2.27)$$

Die mittlere kinetische Energie eines Moleküls in einem idealen Gas ist der thermodynamischen Temperatur proportional. Sie ist unabhängig von Gasart oder Masse.

Die Moleküle fliegen zwischen den Stößen geradlinig und führen also eine Translationsbewegung aus. Im Mittel kommt jede der 6 Richtungen oder 3 Koordinaten im Raum gleich oft vor.

Definition: Die Zahl der Ortskoordinaten einer Translationsbewegung nennt man deren Freiheitsgrade. Die Zahl der Freiheitsgrade bezeichnen wir mit f .

So hat ein Gasmolekül drei Freiheitsgrade der Translation. Auf jeden der drei Freiheitsgrade entfällt im Mittel $1/3$ der Translationsenergie. Damit wird ein Freiheitsgrad der Bewegung zu einem Freiheitsgrad der Energiespeicherung.

$$\overline{W}_F = \frac{1}{2} kT$$

ist die mittlere Energie eines Moleküls pro Freiheitsgrad der Energiespeicherung.

Besteht ein Gasmolekül aus nur einem Atom, wie z.B. bei den Edelgasen, so kann es nur Translationsbewegungen ausführen. Besteht es aus zwei Atomen, wie z.B. beim Wasser-

stoffgas (Bild 2.13), so kann das Molekül außerdem noch um die Achsen 1, 2 und 3 rotieren. Da nach Voraussetzung keine Reibung auftritt (elastische Stöße), kann beim Stoß jedoch keine Rotation um die Achse 3 entstehen. Auch auf jeden Freiheitsgrad der Rotation entfällt pro Molekül die Energie $(1/2) kT$. Ein mehr als zweiatomiges Gas besitzt im Allgemeinen drei zusätzliche Freiheitsgrade der Rotation. Siehe hierzu auch Tafel 2.15.

Ein zweiatomiges Molekül hat zu den drei Freiheitsgraden der Translation noch zwei Freiheitsgrade der Rotation. Ein mehr als zweiatomiges Molekül hat im Allgemeinen drei zusätzliche Freiheitsgrade der Rotation.

Beispiel 3. Wie groß ist bei 0°C die mittlere Energie eines Moleküls pro Freiheitsgrad?

$$\bar{W}_F = (1/2) \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Nm/K} \cdot 273 \text{ K} = 1,88 \cdot 10^{-21} \text{ J}$$

Die mittlere Gesamtenergie eines Wasserstoffmoleküls ist bei 0°C gleich $(5/2) kT = 9,4 \cdot 10^{-21} \text{ J}$.

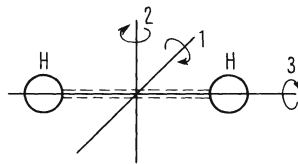


Bild 2.13 Rotationsfreiheitsgrade eines zweiatomigen Moleküls

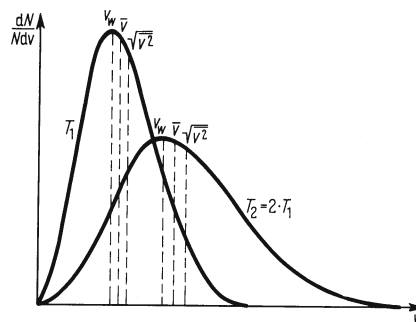


Bild 2.14 Maxwell-Boltzmann-Verteilung der Geschwindigkeit von Gasmolekülen bei zwei verschiedenen Temperaturen

Maxwell-Boltzmann-Verteilung der Geschwindigkeit

Die Energie verteilt sich gleichmäßig im zeitlichen Mittel auf alle N Moleküle. Zu einem bestimmten Zeitpunkt sind jedoch Energie und Geschwindigkeit der einzelnen Moleküle verschieden. Dabei sind immer dN_i Moleküle im Geschwindigkeitsbereich dv_i . Alle möglichen Geschwindigkeiten bilden eine stetige Verteilung (Bild 2.14), auf deren Herleitung hier verzichtet wird. Die Berechnung der relativen Häufigkeiten des Auftretens bestimmter Molekülgeschwindigkeiten geht auf Maxwell und Boltzmann¹⁾ zurück. Danach ist der relative Anteil der Moleküle pro Geschwindigkeitsbereich dv gleich

$$\frac{dN}{N dv} = \left(\frac{m_M}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_M v^2}{2kT}} \cdot 4\pi v^2$$

Die Kurve der Geschwindigkeitsverteilung (Bild 2.14) für zwei verschiedene Temperaturen T_1 und T_2 zeigt, dass die meisten Moleküle die wahrscheinlichste Geschwindigkeit $v_w = \sqrt{2kT/m_M}$ haben. Es gibt jedoch mehr Moleküle mit einer größeren Geschwindigkeit als v_w , weniger mit einer kleineren, so dass der Mittelwert der Geschwindigkeiten $\bar{v} > v_w$ ist; $\bar{v} = 1,13 v_w$. Die oben eingeführte Wurzel aus dem mittleren Geschwindigkeitsquadrat $\sqrt{\bar{v}^2}$ ist gleich $v_m = 1,22 v_w = 1,08 \bar{v}$. Wie zu erwarten, sind Geschwindigkeiten, die von diesen Werten stark abweichen, sehr selten.

¹⁾ James C. Maxwell (1831 bis 1879) und Ludwig Boltzmann (1844 bis 1906).

Mittlere freie Weglänge. Mit der Moleküldichte $n = N/V$ und dem Durchmesser d der Moleküle errechnet sich die Zahl der Stöße pro Zeit, die mittlere Stoßhäufigkeit \bar{z} , für ein Molekül zu $\bar{z} = \pi \sqrt{2} n d^2 \bar{v}$. Wir erhalten daraus die Strecke, die ein Molekül im Mittel zwischen zwei Stößen zurücklegt, die so genannte mittlere freie Weglänge

$$\bar{l} = \frac{\bar{v}}{\bar{z}} = \frac{1}{\pi \sqrt{2} n d^2}$$

Anwendungen. Die kinetische Theorie der Wärme ist eines der anschaulichsten Beispiele dafür, wie man statistische Methoden in der Physik anwenden kann. Die Statistik führt zu konkreten Aussagen über das Verhalten makroskopischer Gebilde auf Grund von Annahmen über deren Bausteine, ohne das Verhalten aller einzelnen Bausteine beschreiben zu können.

Die Aussagen der kinetischen Wärmetheorie haben alle Gebiete der Physik mehr oder weniger stark beeinflusst. Auf ihnen beruht z.B. unsere tiefere Kenntnis der Probleme der inneren Reibung in Gasen und der Wärmeleitung. Wir werden ihre Bedeutung u.a. bei der Elektronenemission (Abschn. 3.2.6.1), den magnetischen Eigenschaften der Stoffe (Abschn. 3.3.5.4) und der Festkörperphysik (Abschn. 7) kennenlernen. Die immer vorhandene Brownsche Bewegung der Moleküle begrenzt z.B. die Empfindlichkeit von Galvanometern (Abschn. 3.2.1). Macht man nämlich die Masse oder das Massenträgheitsmoment des im Magnetfeld beweglichen Leiters immer kleiner, so beginnt er – wie die sichtbaren Teilchen der Brownschen Bewegung – zu zittern. Die Brownsche Bewegung der freien Elektronen in einem Leiter verursacht an dessen Enden statistische Spannungsschwankungen (Widerstandsrauschen). Erwähnt sei in diesem Zusammenhang, dass die Empfindlichkeit des menschlichen Ohres bei ca. 1000 Hz so groß ist, dass eine weitere Steigerung dazu führen würde, dass man die Brownsche Bewegung der Moleküle „hören“ würde. Nullpunktschwankungen (Rauschen) können durch Kühlung vermindert werden.

Aufgaben zu Abschn. 2.3.1

1. Wie viele Moleküle befinden sich in der zylindrischen Elektronenröhre, deren innere Länge 40 mm und deren Innendurchmesser 18 mm beträgt, wenn sie auf den Druck $2,66 \cdot 10^{-6}$ hPa bei Zimmertemperatur ausgepumpt ist?
2. Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit a) eines H_2 -Moleküls bei 1 K, b) eines H-Atoms oder Protons in der Sonne ($T = 10^7$ K)?
3. Wie groß ist die mittlere freie Weglänge für ein H_2 -Molekül bei Normbedingungen (Moleküldurchmesser $d \approx 2 \cdot 10^{-10}$ m)?
4. Wie groß ist die potentielle Energie (auf der Erdoberfläche in Bezug auf einen unendlich weit entfernten Punkt) und die kinetische Energie der Translation eines Sauerstoffmoleküls auf der Erde bei 20 °C? Wofür ist das von Bedeutung?

2.3.2 Innere Energie

Nach der kinetischen Wärmetheorie ist die mittlere kinetische Energie der Moleküle eines Körpers seiner thermodynamischen Temperatur proportional (Gl.(2.27)). Demnach gilt auch:

Die thermodynamische Temperatur eines Körpers ist der mittleren kinetischen Energie seiner Moleküle proportional.

$$T \sim \bar{W}_{\text{kinM}}$$

Die absolute Temperatur ist also nichts anderes als ein Maß für den Mittelwert der kinetischen Energie der Moleküle.

Diese Aussage stimmt mit der Erfahrung überein, dass mechanische Reibungsarbeit eine Erhöhung der Temperatur zur Folge hat: Bremst man einen Körper durch Reibung ab, so wird die kinetische Energie des Körpers für die Reibungsarbeit verbraucht; die Reibungs-

arbeit erhöht demnach die Temperatur des Systems und damit die kinetische Energie seiner Moleküle.

□ **Versuch 6.** In einem ca. 1 m langen, senkrecht stehenden Kunststoffrohr befinden sich 2 kg Bleischrot. Die ganze Anordnung hat die Temperatur 19,2 °C. Dreht man das Rohr um eine zur Rohrachse senkrechte Achse, so fällt das Bleischrot um etwa 1 m. Wir wiederholen das Umdrehen, bis das Blei insgesamt 60mal die Höhe 1 m durchfallen hat. Die anschließende Temperaturmessung ergibt nun 23,5 °C. □

Das Blei durchfällt insgesamt die Höhe 60 m. Die beim Fall aufgenommene Bewegungsenergie ist gleich der Abnahme der potentiellen Energie

$$W_{\text{kin}} = 2 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 60 \text{ m} = 1,18 \cdot 10^3 \text{ J}$$

Diese Energie wird als Reibungsarbeit verbraucht. Sie erhöht die Temperatur des Bleischrots um 4,3 Kelvin. Das bedeutet, dass sich die mittlere kinetische Energie der Moleküle um ca. 1,5% erhöht hat. Wir wenden mit dieser Formulierung das Ergebnis der kinetischen Theorie der Wärme auch auf feste und flüssige Stoffe an. Dazu machen wir folgende Überlegung: Verdampft ein fester oder flüssiger Körper, so treten Moleküle in den gasförmigen Zustand über. Da sie nicht plötzlich im Gas die Energie $(f/2) kT$ haben können, müssen sie schon vorher in Flüssigkeit und Festkörper eine gewisse Energie besitzen. Wir schließen daraus, dass auch in diesen Körpern die mittlere kinetische Energie eines Moleküls der Temperatur des Körpers proportional ist.

Die Energie ist in einem festen oder flüssigen Körper anders gespeichert als in den Molekülen eines Gases. In Festkörpern sind die Bausteine an feste Gleichgewichtslagen gebunden, um die sie Schwingungen ausführen können. Dabei sind drei voneinander unabhängige Schwingungsrichtungen mit je zwei Möglichkeiten der Energiespeicherung (potentielle und kinetische Energie), insgesamt also sechs Freiheitsgrade der Energiespeicherung möglich ($f=6$).

Aus den Anziehungskräften, die die Bausteine aufeinander ausüben, ergibt sich die potentielle Energie, die sie gegeneinander haben (Bindung). Bei Flüssigkeiten ist die Art der Energiespeicherung ziemlich unübersichtlich, da Schwingungen und Stöße gleichzeitig auftreten können. Daher lässt sich hier die Zahl der Freiheitsgrade f nicht leicht berechnen.

Definition: Man nennt die Energie, zusammengesetzt aus potentieller Energie und kinetischer Energie aller Moleküle eines Körpers, die sich auf Translation, Rotation und (oder) Schwingungen der Moleküle verteilt, die innere Energie U des Körpers.

Die innere Energie ist bei idealen Gasen demnach der Temperatur proportional.

Allgemein gilt für einen Körper mit der Masse m , der Stoffmenge ν und der Temperatur T mit $k = R/N_A = R_S m_M$

$$U = N f \frac{kT}{2} = f m \frac{R_S T}{2} = f \nu \frac{R T}{2} \quad (2.28)$$

Zustandsgrößen, Prozessgrößen. Wie durch die Größen Temperatur, Druck, potentielle Energie, kinetische Energie und andere, kann auch mit Hilfe der inneren Energie der Zustand eines Körpers beschrieben werden. Man nennt deshalb solche Größen

Zustandsgrößen. Sie können sich bei einem Prozess nur ändern, indem Arbeit vom oder am System verrichtet wird, oder durch Zufuhr oder Abfuhr von Wärme.

Definition: Die Größe (mit der Dimension einer Arbeit oder Energie), die – außer durch Verrichten von Arbeit – die Änderung des Energieinhaltes eines Körpers oder eines Systems von Körpern bewirkt, heißt Wärme. Sie erhält das Symbol Q .

Die Größen Arbeit oder Wärme, welche die Zustandsänderung hervorrufen, treten definitionsgemäß während des Prozesses auf. Man nennt solche Größen Prozessgrößen.

Diese können als Energie gespeichert werden. Man kann z.B. einen Körper erwärmen und damit dessen innere Energie erhöhen. Diese ist speicherfähig, so dass später die Wärme unter Abkühlung wieder entnommen werden kann. Da Wärmezufuhr oder -abfuhr und das Verrichten von Arbeit an oder von einem System dessen Energieinhalt ändert, kann man diese Prozesse auch als Energiezufuhr oder -abfuhr, als Energietausch bezeichnen. Führt man einem Körper Wärme zu, so erhöht sich seine innere Energie, und es kann Arbeit verrichtet werden. Dabei kann sich der Aggregatzustand ändern (Schmelzen, Verdampfen).

Dem alltäglichen Sprachgebrauch entsprechend nennt man diejenige Energie, die in Wärmekraftmaschinen nicht vollständig in eine andere Energieform umgewandelt werden kann, thermische Energie oder Wärmeenergie. Wir unterscheiden also zwischen der oben definierten Prozessgröße Wärme und der in einem Körper in ungeordneter Weise gespeicherten Wärmeenergie.

2.3.2.1 Wärmekapazität, spezifische und molare Wärmekapazität

Wenn man die Temperatur und damit die innere Energie jeweils der gleichen Stoffmenge oder Masse verschiedener Stoffe erhöht, was z.B. wie in Versuch 6 geschehen kann, so braucht man dazu bei den jeweiligen Stoffen unterschiedliche Energien. Anders formuliert: Man muss der gleichen Stoffmenge oder Masse verschiedener Stoffe unterschiedliche Wärmen zuführen, um die Temperatur um den gleichen Betrag zu erhöhen; die dann in ihnen gespeicherte Energie ist unterschiedlich.

Definition: Den Quotienten aus zugeführter Wärme dQ und zugehöriger Temperaturerhöhung dT nennt man die Wärmekapazität eines Körpers

$$C = \frac{dQ}{dT} \quad (2.29)$$

Um verschiedene Stoffe miteinander vergleichen zu können, beziehen wir die Wärmekapazität auf die Masse:

Definition:

$$\text{Spezifische Wärmekapazität} = \frac{\text{Wärmekapazität}}{\text{Masse}} \quad (2.30)$$

$$c = \frac{C}{m} = \frac{dQ}{m dT}$$

Wenn wir, wie in Abschn. 2.2.3.2 erläutert, die Stoffmenge ν als Bezugsgröße wählen, erhalten wir folgende

Definition:

$$\text{Molare Wärmekapazität} = \frac{\text{Wärmekapazität}^1}{\text{Stoffmenge}} \quad (2.31)$$

$$c_A = \frac{C}{\nu} = \frac{dQ}{\nu dT}$$

Spezifische und molare Wärmekapazität von Gasen

Konstantes Volumen. Erwärmt man ein ideales Gas bei konstantem Volumen um dT , so dient die zugeführte Wärme nur zur Erhöhung der inneren Energie U . Da sich das Gas nicht ausdehnt, erhöht sich nur die kinetische Energie der Moleküle.

$$dQ_V = dU$$

Damit erhalten wir für die Wärmekapazität, die spezifische sowie molare Wärmekapazität bei konstantem Volumen mit Gl. (2.28)

$$C_V = \frac{dU}{dT} = f \frac{mR_S}{2} \quad (2.32)$$

$$c_V = \frac{dU}{m dT} = f \frac{R_S}{2} \quad (2.33)$$

$$c_{AV} = \frac{dU}{\nu dT} = f \frac{R}{2} \quad (2.34)$$

Beispiel 4. Wir berechnen die molare und die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen

a) für das einatomige Heliumgas, b) für das zweiatomige Wasserstoffgas.

a) $c_{AV} = (3/2) R = 1,25 \cdot 10^4 \text{ J/kmol K}$; $c_V = (3/2) R_S = 0,31 \cdot 10^4 \text{ J/kg K}$

b) $c_{AV} = (5/2) R = 2,08 \cdot 10^4 \text{ J/kmol K}$; $c_V = (5/2) R_S = 1,04 \cdot 10^4 \text{ J/kg K}$.

Tafel 2.15 Einige Eigenschaften technisch wichtiger Gase

	Relative Molekülmasse M_r	Dichte ρ_0	$\frac{V_0}{\nu}$	Spezifische Wärmekapazitäten		Molare Wärmekapazitäten	
				c_V	c_p	c_{AV}	c_{Ap}
	in $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	in $\frac{\text{m}^3}{\text{kmol}}$	in $10^3 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$	in $10^3 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$	in $10^3 \frac{\text{J}}{\text{kmol K}}$	in $10^3 \frac{\text{J}}{\text{kmol K}}$	
He	4,003	0,179	22,4	3,21	5,23	12,85	20,94
Ar	39,95	1,784	22,4	0,317	0,523	12,69	20,94
H ₂	2,016	0,090	22,4	10,1	14,3	20,45	28,83
O ₂	32,00	1,429	22,4	0,655	0,918	20,98	29,37
Luft	28,964	1,293	22,4	0,717	1,005	20,78	29,14
CO ₂	44,01	1,977	22,4	0,647	0,837	28,48	36,83
CH ₄	16,04	0,716	22,4	1,697	2,22	27,21	35,59
NH ₃	17,03	0,771	22,2	1,655	2,16	28,18	36,78

¹⁾ In der Technik wird hierfür oft das Formelzeichen c_m benützt. Wegen der Gefahr, dass der Index m an die Masse erinnert, verwenden wir den Index A, der auf den Namen Avogadro hinweist.

Konstanter Druck. Erwärmt man ein ideales Gas bei konstantem Druck, so dehnt es sich aus. Die zugeführte Wärme muss außer der Erhöhung der inneren Energie dU noch die Ausdehnungsarbeit¹⁾ $dW_A = p dV$ des Gases enthalten.

$$dQ_p = dU + dW_A = dU + p dV$$

Wir erhalten somit für die Wärmekapazität und die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck

$$C_p = \frac{d}{dT}(U + W_A) = C_V + \frac{dW_A}{dT} = C_V + \frac{pdV}{dT} \quad (2.35)$$

$$c_p = \frac{d}{m dT}(U + W_A) = c_V + \frac{pdV}{m dT} \quad (2.36)$$

Durch Differenzieren erhalten wir aus der allgemeinen Zustandsgleichung idealer Gase

$$p dV = m R_S dT$$

und damit

$$\begin{aligned} C_p &= C_V + m R_S & \text{bzw.} \\ c_p &= c_V + R_S & c_{Ap} = c_{AV} + R \end{aligned} \quad (2.37)$$

Mit Gl. (2.33) erhalten wir außerdem das Verhältnis der spezifischen Wärmekapazitäten

$$\kappa = c_p/c_V = c_{Ap}/c_{AV} = (f+2)/f$$

Beispiel 5. Wir berechnen die molare und die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck a) für das einatomige Heliumgas, b) für das zweiatomige Wasserstoffgas.

a) $c_{Ap} = c_{AV} + R = (5/2) R = 2,08 \cdot 10^4 \text{ J/kmol K}; \quad c_p = c_V + R_S = 0,52 \cdot 10^4 \text{ J/kg K}$

b) $c_{Ap} = c_{AV} + R = (7/2) R = 2,91 \cdot 10^4 \text{ J/kmol K}; \quad c_p = c_V + R_S = 1,45 \cdot 10^4 \text{ J/kg K}$

Tafel 2.15 enthält u.a. die spezifischen und molaren Wärmekapazitäten einiger technisch wichtiger Gase.

$\frac{c_p}{c_V} = \kappa$	$c_{Ap} - c_{AV}$	Spezifische Gaskonstante R_S in $10^3 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$	Zahl der Atome im Molekül	Zahl der Freiheitsgrade f			$\frac{f+2}{f}$
				transl.	rot.	ges.	
1,63	8,09	2072	1	3	0	3	$5/3 = 1,67$
1,65	8,25	207,9	1	3	0	3	
1,41	8,38	4121	2	3	2	5	$7/5 = 1,40$
1,40	8,39	259,5	2	3	2	5	
1,40	8,36	286,8	2	3	2	5	
1,293	8,35	187,6	3	3	3	6	$4/3 = 1,33$
1,308	8,38	518,0	5	3	3	6	
1,305	8,60	481,0	4	3	3	6	

¹⁾ s. auch Abschn. 1.6.3.1.

Enthalpie. Für die Summe aus innerer Energie und dem Produkt aus Druck und Volumen führt man zweckmäßigerweise den Begriff Enthalpie ein:

Definition:

Innere Energie + Druck \times Volumen = Enthalpie

$$U + pV = H \quad (2.38)$$

$$\text{spezifische Enthalpie} = \frac{\text{Enthalpie}}{\text{Masse}} \quad h = \frac{H}{m}$$

Damit erhalten wir für die Wärmekapazität bzw. die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck

$$C_p = \frac{dH}{dT} \quad \text{bzw.} \quad c_p = \frac{dh}{dT} \quad (2.39)$$

Spezifische und molare Wärmekapazität von festen Körpern

Da sich ein fester Körper beim Erwärmen nur geringfügig ausdehnt (s. Abschn. 2.2), wird nur eine vernachlässigbar kleine äußere Arbeit $p dV$ verrichtet. Deshalb sind die spezifischen Wärmekapazitäten bei konstantem Volumen und konstantem Druck nicht sehr verschieden voneinander. Der Unterschied beträgt meist weniger als ein Prozent des c_v -Wertes. Die Erwärmung erhöht also in diesem Fall praktisch nur die innere Energie. Diese beträgt mit $f=6$ nach Gl. (2.28) $U = 3m R_S T$.

Das ergibt für die spezifische Wärmekapazität

$$c = 3R_S$$

und die molare Wärmekapazität

$$c_A = 3R = 2,5 \cdot 10^4 \frac{\text{J}}{\text{kmol K}}$$

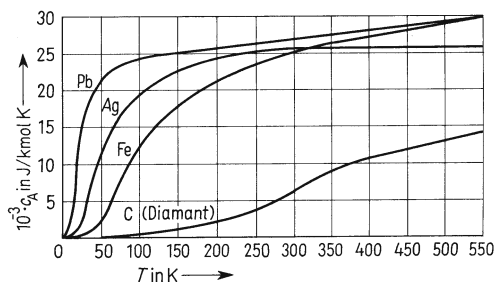


Bild 2.16 Molare Wärmekapazität einiger fester Stoffe

Die Schwingungen der Moleküle werden mit sinkenden Temperaturen zunehmend gestört. Deshalb nimmt die spezifische Wärmekapazität mit Annäherung an den absoluten Nullpunkt erst langsam, dann stärker ab (Bild 2.16).

Stoffe mit hohem Schmelzpunkt (siehe Abschn. 2.4.5.1) erreichen den theoretischen Wert erst bei höherer Temperatur, Diamant z.B. bei mehr als 1000 K.

Der wichtigste Parameter für den Übergang von konstanter zu abnehmender molarer Wärmekapazität bei Abkühlung ist die so genannte Debye-Temperatur¹⁾ Θ . Sie ist klein bei schwacher Bindung, weichen Körpern aus schweren Atomen ($\Theta_{\text{Pb}} = 105 \text{ K}$), groß bei starker Bindung, harten Körpern aus leichten Atomen ($\Theta_{\text{Diamant}} = 2230 \text{ K}$).

Spezifische Wärmekapazität von Flüssigkeiten

Die Zahl der Freiheitsgrade ist bei Flüssigkeiten unbestimmt. Wir können deshalb keine spezifische Wärmekapazität errechnen. Wie bei den festen Körpern unterscheiden sich die Wärmekapazitäten bei konstantem Volumen und konstantem Druck kaum. Den größten Wert bei Flüssigkeiten und festen Stoffen hat die spezifische Wärmekapazität von Wasser; sie hängt deutlich von der Temperatur ab (s. Tafel 2.17).

Tafel 2.17 Spezifische Wärmekapazitäten c zwischen 0...100 °C einiger technisch wichtiger fester und flüssiger Stoffe

Stoff	in 10^3 J/kg K	Stoff	in 10^3 J/kg K
Eisen	0,478	Quecksilber	0,138
Schamott	$\approx 0,84$	Heizöl	1,97
Ziegelmauer	0,84	Eis 0...-21 °C (Mittelwert)	2,12
Beton	0,88	Eis 0...-50 °C (Mittelwert)	1,97
Aluminium	0,91	Wasser 4 °C	4,21
Magnesit	1,09	Wasser 15 °C	4,18
Holz	1,89	Wasser 99,5 °C	4,24

Aufgaben zu Abschn. 2.3.2

1. Um welchen Betrag erhöht sich die innere Energie bei Temperaturerhöhung um 10 K von a) 2 kg Wasserstoffgas, b) 2 kg Wasser (15 °C), c) 2 kg Aluminium?
2. Man gebe einen Stoff an, für den die Differenz der spezifischen Wärmekapazitäten $c_p - c_v$ bei einer bestimmten Temperatur exakt gleich Null ist.
3. Wärmehalt eines Stoffes. Oft setzt man die Enthalpie des Körpers bei 0 °C willkürlich gleich Null. Wie groß ist dann die Enthalpie für 5 kg Eis bei 223 °K?
4. Für einen Energiespeicher, der Wärme abgeben soll, steht jeweils das gleiche Volumen Wasser oder Glycerin zur Verfügung. Die Flüssigkeiten können im Behälter nur unter Atmosphärendruck stehen. Mit welcher der beiden Flüssigkeiten kann man mehr Energie speichern? (Glycerin: Dichte $\rho = 1,26 \text{ kg/dm}^3$, Siedetemperatur bei 1013 hPa = 290 °C, spezifische Wärmekapazität $c = 2,4 \cdot 10^3 \text{ J/kg K}$).
5. Warum verwendet man für Energiespeicher häufig feste Stoffe?

2.3.2.2 Messmethoden für Wärme

Berühren sich zwei Körper mit verschiedenen Temperaturen innig, so ändern sich ihre Temperaturen so lange, bis sie nach einer bestimmten Zeit gleich sind. Die innere Energie ist dann über beide Körper gleich verteilt (Boltzmann). Die mittlere thermische Energie der Moleküle ist in den beiden Körpern ebenfalls gleich. Es hat ein Energieaustausch stattgefunden, die Körper sind im thermischen Gleichgewicht (s. Abschn. 2.1.2). Energieaustausch und thermisches Gleichgewicht sind die Grundlagen für alle Wärmemessungen.

Instrumente zur Messung von Wärmen, Wärmekapazitäten und spezifischen Wärmekapazitäten nennt man Kalorimeter.

¹⁾ Peter Debye (1884 bis 1966).

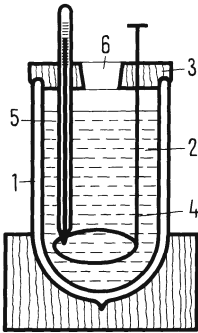


Bild 2.18 Kalorimeter

Den prinzipiellen Aufbau eines Kalorimeters zeigt Bild 2.18. Ein innen verkupfertes oder versilbertes Vakuummantelgefäß 1 (ähnlich einer Thermosflasche) ist mit Wasser oder einer anderen Flüssigkeit 2 gefüllt. Es ist mit einem Deckel 3 verschlossen, durch den ein Rührer 4 und das Thermometer 5 eintauchen. Durch die Bohrung 6 kann ein Körper in die Flüssigkeit gebracht werden. Der Rührer 4 sorgt für ständige gute Durchmischung der Flüssigkeit. Die Temperatur vor dem Einbringen des Körpers und die Änderung danach bis zum Erreichen des thermischen Gleichgewichts zwischen Körper und Wasser wird am Thermometer abgelesen. Die Messwerte dienen zur Berechnung der Wärmen (s.u.).

Statt der Kalorimeterflüssigkeit kann auch ein metallischer Körper die Wärme aufnehmen. Der zu messende Körper wird dabei in eine Bohrung des Metalls gebracht. Verbreitet sind auch Kalorimeter, bei denen die Wärmezufuhr durch elektrische Heizung geschieht.

Bei den bisher genannten Methoden darf sich der Aggregatzustand der am Wärmeaustausch beteiligten Körper nicht ändern. Es gibt jedoch auch Kalorimeter, bei denen die zum Verdampfen (z.B. von Äther, flüssigem Sauerstoff) oder Schmelzen (z.B. von Eis) aufgewendete Wärme zur Bestimmung unbekannter Wärmewerte benützt wird.

Feste Körper, Flüssigkeiten. Ein Kalorimeter wie in Bild 2.18 kann zur Messung sowohl von festen als auch von flüssigen Stoffen dienen. Die innere Energie der Kalorimeterflüssigkeit (meist Wasser) ist $U_1 = m_1 c_1 T_1$, die des Kalorimeters selbst ist $U'_1 = m'_1 c'_1 T_1$. Bringt man einen festen Körper oder eine Flüssigkeit mit der inneren Energie $U_2 = m_2 c_2 T_2$ in das Kalorimeter, so stellt sich alsbald thermisches Gleichgewicht ein mit der so genannten Mischungstemperatur T_m . Dann ist die Änderung der Inneren Energie des eingebrachten Körpers gleich der Summe der Änderungen der Inneren Energie des Kalorimeters und der Kalorimeterflüssigkeit.

$$c_2 m_2 (T_2 - T_m) = c_1 m_1 (T_m - T_1) + c'_1 m'_1 (T_m - T_1) \quad (2.40)$$

Die Wärmekapazität des Kalorimeters $C'_1 = c'_1 m'_1$ ist eine für das Kalorimeter typische Konstante. Sie setzt sich zusammen aus den Wärmekapazitäten aller Teile des Kalorimeters (Rührer, Thermometer etc.). Sie wird experimentell bestimmt. Bei wassergefüllten Kalorimetern zählt man häufig auch die Wärmekapazität des Wassers $c_1 m_1$ dazu.

Bei bekannter Wärmekapazität kann man durch Wägung des Wassers und des Körpers sowie Messung der Temperaturen T_1 , T_2 und T_m z.B. die spezifische Wärmekapazität c_2 des eingebrachten Körpers bestimmen. Diese ist dann

$$c_2 = \frac{(c_1 m_1 + c'_1 m'_1)(T_m - T_1)}{m_2(T_2 - T_m)}$$

Natürlich kann man auch einen festen oder flüssigen Stoff mit bekannter spezifischer Wärmekapazität in das Kalorimeter bringen und so die Wärmekapazität der Flüssigkeit im Kalorimeter messen. Auf diese Weise lässt sich auch die Wärmekapazität des Kalorimeters bestimmen.

Beispiel 6. 50 g Aluminium von 95 °C werden in ein Kalorimeter gebracht, dessen Wärmekapazität ohne Wasserfüllung 83,7 J/K ist. Das Kalorimeter ist mit 280 g Wasser von 20 °C gefüllt. Die Mischungstemperatur ist 22,6 °C. Zu bestimmen ist die spezifische Wärmekapazität des Aluminiums.

$$c_2 = \frac{(0,28 \text{ kg} \cdot 4,18 \cdot 10^3 \text{ J/kg K} + 83,7 \text{ J/K}) \cdot 2,6 \text{ K}}{0,05 \text{ kg} \cdot 72,4 \text{ K}} = 901 \text{ J/kg K}$$

Gase. Zur Bestimmung der spezifischen Wärmekapazität von Gasen bei konstantem Volumen (c_V) wird dem Gas im Kalorimeter die Wärme elektrisch oder durch chemische Reaktionen zugeführt. Das Gas muss dabei in einem Gefäß eingeschlossen sein. Dieses hat aber im Allgemeinen im Verhältnis zum Gas selbst eine sehr große Wärmekapazität, was dazu führt, dass eine derartige Bestimmung von c_V für Gase relativ schwierig ist. Zur Bestimmung der spezifischen Wärmekapazität bei konstantem Druck (c_p) wird das erhitzte Gas durch ein Wasserkalorimeter geleitet (Strömungskalorimeter). Bei dieser Methode kann die Gasmenge so groß gewählt werden, dass im Verhältnis dazu die Wärmekapazität der Gefäßwandungen nicht ins Gewicht fällt. Dabei wird meist elektrisch erwärmt. Die spezifischen Wärmekapazitäten können auch mit Hilfe des Verhältnisses c_p/c_V bei adiabatischen Zustandsänderungen (s. Abschn. 2.4.3.4) ermittelt werden.

2.4 Erster Hauptsatz der Wärmelehre

Der Energiesatz der Mechanik gilt für die potentielle und kinetische Energie von Körpern für reibungsfreie Prozesse. Doch auch die Reibung führt zu keinem Verlust an Energie. Diese verschwindet nur scheinbar. Sie bleibt jedoch als kinetische und potentielle Energie der Moleküle erhalten. Dieser Tatbestand ist schon aus dem Inhalt von Abschn. 2.3 abzuleiten und führt zu einer Erweiterung des Energiesatzes der Mechanik, zu einem allgemein gültigen Erhaltungssatz der Energie, der bis in den atomaren Bereich hinein gültig ist. Als sog. erster Hauptsatz der Wärmelehre ist er Gegenstand dieses Abschnittes. Wir wenden ihn auf wichtige Zustandsänderungen von Körpern in allen Aggregatzuständen an.

Der Energiesatz ist ein Grundpfeiler der Physik und ihrer Anwendungen in der Technik. Dieser Erhaltungssatz bietet auch einen nützlichen Lösungsansatz für viele physikalische Probleme, wie man leicht bei der Bearbeitung vieler Aufgaben dieses Buches feststellen kann (vgl. Abschn. 1.3.4.2).

2.4.1 Geschichtliche Entwicklung

Beobachtungen, wonach sich Temperatur oder Aggregatzustand eines Körpers ändern, wenn man ihn mit einem zweiten von anderer Temperatur zusammenbringt, führten um die Mitte des 18. Jahrhunderts zur Einführung des Begriffes Wärme. Man verstand darunter einen „Wärmestoff“, der bei Berührung von Körpern zu- oder abfließt. So trat die Größe „Wärmemenge“ neben die der Temperatur. Der Name Wärmemenge für Wärme hat sich bis heute in der Literatur gehalten. Die Einheit der Wärmemenge wurde die heute nicht mehr übliche Einheit Kalorie, zum Thermometer trat als Messgerät das Kalorimeter. Die spezifische Wärmekapazität als Materialkonstante wurde eingeführt.

Um 1840 erkannte der Arzt Julius Robert Mayer (1814 bis 1878) zunächst aus physiologischen Beobachtungen und später durch allgemeine physikalische Überlegungen, dass die Wärme ein Energieäquivalent ist und sich aus der eine Erwärmung hervorrufenden

mechanischen Arbeit errechnen lässt. Er stellte fest, dass der Energiesatz der Mechanik (Abschn. 1.3.4.2), der bei Auftreten von Reibung nicht mehr gilt, uneingeschränkt gültig wird, wenn man die Wärme als Energieäquivalent mit berücksichtigt.

An der allgemeinen Ablehnung seiner Ansichten waren nicht zuletzt seine aus der mangelnden Kenntnis physikalischer Terminologie resultierenden Formulierungen schuld. Er arbeitete und veröffentlichte dennoch beharrlich weiter. Inzwischen begannen vor allem in England Versuche, die Mayers Auffassungen bestätigten.

J. P. Joule (1818 bis 1889) – seines Zeichens Bierbrauer – bestätigte in einem berühmt gewordenen Versuch (Bild 2.19) das von Mayer erkannte Prinzip: In der Flüssigkeit 1 eines Kalorimeters dreht sich ein System von acht Schaufelrädern 2 zwischen nur wenig größeren Aussparungen der Wände 3. Das Gewicht 4 treibt beim Sinken über das Seil 5 die Schaufelräder an. Es sinkt, da die Schaufelräder 2 durch die Reibung in der Flüssigkeit stark gebremst werden, so langsam, dass seine kinetische Energie gegenüber der Abnahme der potentiellen Energie gering ist.

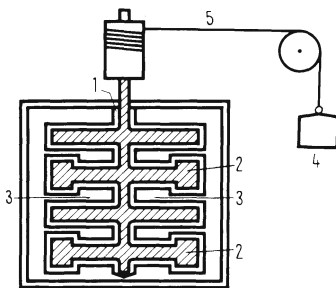


Bild 2.19 Messung des mechanischen Wärmeäquivalents nach Joule

Die Arbeit $W = mg\Delta h$ dient so über die Reibung nur zur Erhöhung der Temperatur der Flüssigkeit. Diese Anordnung ergab die erste brauchbare Messung des so genannten mechanischen Wärmeäquivalents. Um die gleiche Zeit (1847) formulierte Hermann von Helmholtz (1821 bis 1894) unabhängig von Mayer und zunächst auch ohne Resonanz das gleiche Prinzip. Erst zehn Jahre danach fand die Arbeit Robert Mayers die allgemeine Anerkennung. Die Gleichartigkeit und Umwandelbarkeit von mechanischer Arbeit und Wärme hatte Eingang in die Wissenschaft gefunden. Die energetische Thermodynamik konnte sich entwickeln.

2.4.2 Erster Hauptsatz

Die Erweiterung des Energiesatzes der Mechanik zum allgemeinen Energiesatz, die auf Grund der Überlegungen von Robert Mayer zustande kam, ist für uns eine folgerichtige Konsequenz der kinetischen Wärmetheorie.

Der Energiesatz der Mechanik gilt uneingeschränkt, wenn man die kinetische und potentielle Energie der Moleküle, also die innere Energie eines Körpers, in die Betrachtungen einbezieht.

Wir formulieren daraus folgenden wichtigen Erfahrungssatz:

Erster Hauptsatz der Wärmelehre: Jedes thermodynamische System hat eine innere Energie U . Bei irgendeiner Zustandsänderung des Systems ist die Änderung der inneren Energie gleich der Summe der dem System zugeführten Wärme und der zugeführten Arbeit dW_{zu} abzüglich der vom System verrichteten Arbeit dW_{ab} und der abgeführten Wärme dQ_{ab} .

$$dU = dQ_{\text{zu}} + dW_{\text{zu}} - dW_{\text{ab}} - dQ_{\text{ab}} \quad (2.41)$$

Führt man beispielsweise einem idealen Gas bei konstantem Volumen die Wärme dQ zu, so ist die Änderung der Inneren Energie des Gases gleich der zugeführten Wärme

$$dU = dQ$$

Wird die Wärme bei konstantem Druck zugeführt, so muss das System noch die Ausdehnungsarbeit $dW = p dV$ verrichten. dW ist eine vom System abgegebene Arbeit. Folglich wird $dU = dQ - p dV$ oder mit $H = U + pV$ (Gl. (2.38))

$$dQ = dU + p dV = dH$$

Die Änderung der Enthalpie des Gases ist gleich der zugeführten Wärme. Wird einem Gas Wärme zugeführt bei gleichzeitiger Kompression, so ist

$$dU = dQ_{zu} + dW_{zu} = dQ_{zu} + p dV$$

Der erste Hauptsatz entspricht der Erfahrung, dass es keine Maschine gibt, die Arbeit verrichten kann, ohne die entsprechende Energie aus einer äußeren Energiequelle zu schöpfen. Oder anders ausgedrückt:

Es gibt kein Perpetuum mobile erster Art.

Der erste Hauptsatz – oft allgemein Satz von der Erhaltung der Energie oder einfach Energiesatz genannt – ist einer der Grundpfeiler der gesamten Physik. Seine Aufstellung war für die Entwicklung der Physik, der Chemie und der gesamten Technik von entscheidender Bedeutung. Der Energiesatz sagt aus, dass bei Energieumwandlungen keine Energie verloren geht. Über die Art und Weise dieser Umwandlungen gibt er dagegen keine Auskunft. Das ist Gegenstand des 2. Hauptsatzes (Abschn. 2.7).

Aufgaben zu Abschn. 2.4.2

1. Bei der chemischen Reaktion $2\text{H}_2 + \text{O}_2 \rightarrow 2\text{H}_2\text{O}$ (20°C) ändert sich die innere Energie für insgesamt 3 kmol Gas um $\Delta U = -5,65 \cdot 10^8$ J. Wie groß ist die Enthalpieänderung¹⁾, wenn $3 \cdot 10^{-3}$ kmol Gas reagieren? Man bedenke, dass das entstehende Wasservolumen sehr klein ist gegen das verschwindende Gasvolumen.
2. Um wie viel erwärmt sich eine Rakete im Mittel (spez. Wärmekapazität $c = 0,9 \cdot 10^3$ J/kg K), wenn sie beim Eintauchen in die Atmosphäre von der Geschwindigkeit $5 \cdot 10^3$ m/s auf 10^3 m/s abgebremst wird und 90% der Wärme an die vorbeistreichende Luft abgegeben werden können?

2.4.3 Allgemeine Zustandsänderung idealer Gase

Der Zustand eines Gases wird durch die drei Zustandsgrößen Druck, Volumen und Temperatur beschrieben. Bei Zustandsänderungen können sich entweder alle drei Zustandsgrößen ändern oder jeweils nur zwei, während die dritte Größe dann konstant gehalten wird. Einige dieser Zustandsänderungen, bei denen eine Größe konstant ist, haben wir in Abschn. 1.6.2.1 und 2.2.3 schon kennengelernt ($T = \text{const}$; $p = \text{const}$; $V = \text{const}$). Wir wollen hier noch einmal alle zusammenstellen und unter Anwendung des ersten Hauptsatzes diskutieren.

¹⁾ Hier gleich der so genannten Wärmetönung der Reaktion.

Aus den in Abschn. 2.2.3.2 dargelegten Gründen verwenden wir in den folgenden Abschnitten in der Zustandsgleichung idealer Gase die Masse m . Wie im gleichen Abschnitt beschrieben ist, muss bei Verwendung der Stoffmenge in den Gleichungen lediglich mR_s durch νR ersetzt werden. Dies sei hier für die folgenden Abschnitte nochmals in Erinnerung gebracht.

2.4.3.1 Isotherme Zustandsänderung

Man kann bei genügend langsam ablaufenden Druck- und Volumenänderungen und z.B. durch Umgeben des Gasgefäßes mit einem Medium großer Wärmekapazität (Wasser) die Temperatur des Gases praktisch konstant halten. Eine derartige Zustandsänderung nennt man isotherm.

Isotherme Zustandsänderungen laufen bei konstant gehaltener Temperatur ab. Sie folgen dem Gesetz von Boyle-Mariotte: Das Produkt aus Druck und Volumen ist konstant. Man erhält die Isothermengleichung

$$\frac{pV}{m} = pV_s = \text{const} \quad \text{bei} \quad T = \text{const}$$

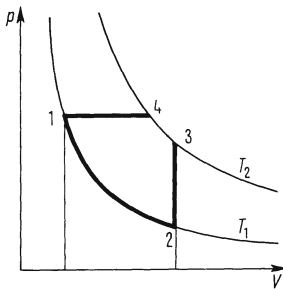


Bild 2.20 Zustandsdiagramm eines idealen Gases

- 1 – 2 isotherme Expansion,
- 2 – 1 isotherme Kompression,
- 2 – 3 isochore Druckerhöhung,
- 3 – 2 isochore Druckerniedrigung,
- 1 – 4 isobare Expansion,
- 4 – 1 isobare Volumenverkleinerung

Dann ist $dQ = p dV$

$$\Delta Q = - \int_{V_1}^{V_2} p dV \quad \text{und mit} \quad p = m R_s \frac{T_1}{V}$$

$$\Delta Q = W_A = -mR_s T_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = -mR_s T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = -mR_s T_1 \ln \frac{p_1}{p_2} \quad (2.42)$$

Beim Übergang 2–1, der so genannten isothermen Kompression, wird der gleiche Energiebetrag in Form von Wärme abgeführt.

Wir stellen Zustandsänderungen meist im so genannten p - V - oder mit $V_s = V/m$ im p - V_s -Diagramm (Bild 2.20) dar. Das Boyle-Mariottesche Gesetz lässt sich dabei durch eine Schar Hyperbeln darstellen mit der Temperatur als Parameter. Zwei dieser so genannten Isothermen sind in Bild 2.20 wiedergegeben. Der Übergang vom Zustand 1 zum Zustand 2 heißt isotherme Ausdehnung (Expansion). Diese liefert die äußere Arbeit

$$W_A = \int_{V_1}^{V_2} p dV.$$

Da die innere Energie (Gl. (2.28)) wegen der konstanten Temperatur ebenfalls konstant bleibt, muss die der Arbeit W_A entsprechende Wärmeenergie zugeführt werden. Es ist also $dU=0$; $dT=0$; $T = \text{const}$.

Der Flächeninhalt, der begrenzt wird durch die p - V -Kurve, das Abszissenstück zwischen Anfangs- und Endzustand und durch die zugehörigen Ordinaten, entspricht der verrichteten Arbeit. Daher nennt man das p - V -Diagramm auch Arbeitsdiagramm.

2.4.3.2 Isochore Zustandsänderung

Da die Wärmeausdehnung fester Stoffe sehr gering ist, kann man das Volumen eines Gases, das sich in einem geschlossenen Behälter befindet und dessen Temperatur sich ändert, als konstant betrachten. Man spricht dann von isochoren Zustandsänderungen.

Isochore Zustandsänderungen verlaufen bei konstant gehaltenem Volumen nach der Gleichung (2.12) von Gay-Lussac. Druck und Temperatur sind einander proportional.

$$\frac{T}{P} = \text{const} \quad \text{bei} \quad V = \text{const} \quad (2.43)$$

Stellt man die Isochorengleichung im p - V -Diagramm dar, so erhält man zur Ordinate parallele Geraden, so genannte Isochoren. Der Übergang von Zustand 3 (Bild 2.20) zu Zustand 2 beschreibt eine derartige isochore Druckerniedrigung, von 2 nach 3 eine isochore Druckerhöhung. Im ersten Fall wird Wärme ab-, im zweiten Fall zugeführt. In jedem Fall ist die Wärme gleich der Änderung der inneren Energie, da keine Arbeit verrichtet wird.

Es ist $dV = 0$, damit wird $dQ = dU = c_V m dT$

$$\Delta Q = \int_{T_1}^{T_2} c_V m dT = c_V m (T_2 - T_1) = c_V m \Delta T \quad (2.44)$$

2.4.3.3 Isobare Zustandsänderung

Man kann z.B. durch einen beweglichen Kolben den Druck in einem Gas, dessen Temperatur sich ändert, immer gleich einem vorgegebenen äußeren Druck (z.B. dem Luftdruck) machen und erhält so eine isobare Zustandsänderung.

Isobare Zustandsänderungen verlaufen bei konstant gehaltenem Druck nach der Gleichung (2.12) von Gay-Lussac. Volumen und Temperatur sind einander proportional (Isobarengleichung).

$$\frac{T}{V} = \text{const} \quad \text{bei} \quad p = \text{const} \quad (2.45)$$

Die sog. Isobaren sind Geraden, die parallel zur Abszisse verlaufen. Der Übergang vom Zustand 1 (Bild 2.20) zum Zustand 4 ist eine isobare Expansion, der von 4 nach 1 eine isobare Volumenverkleinerung des Gases.

Man hat also $p = \text{const}$. Dann ist $dQ = dU + p dV = dH$.

$$\Delta Q = \int_{U_1}^{U_2} dU + \int_{V_1}^{V_2} p dV = c_V m (T_2 - T_1) + p (V_2 - V_1)$$

Bei der Ausdehnung wird demnach die Arbeit

$$W_A = -p (V_2 - V_1) = -mR_S (T_2 - T_1)$$

verrichtet. Die Summe aus Änderung der inneren Energie und Ausdehnungsarbeit ist mit Gl. (2.38) und (2.39) gleich der Änderung der Enthalpie $H = mc_p (T_2 - T_1)$. Der entsprechende Energiebetrag ΔQ muss in Form von Wärme zugeführt werden. Bei der Volumenverkleinerung (4–1) muss die gleiche Wärme abgeführt werden.

2.4.3.4 Adiabatische Zustandsänderung

Bei allen bisher behandelten Zustandsänderungen muss Wärme zu- oder abgeführt werden. Das geschieht durch Wärmeaustausch mit der Umgebung. Dieser Austausch kann jedoch durch gute Isolation oder schnellen Ablauf der Zustandsänderung unterbunden werden. Dann nennt man den Vorgang adiabatisch.

Adiabatische Zustandsänderungen verlaufen unter völliger Wärmeisolation gegenüber der Umgebung, also ohne dass Wärme zu- oder abgeführt wird.

Da kein Wärmeaustausch stattfindet, also $dQ = 0$, so ist auch

$$dU + p dV = 0$$

Mit $dU = mc_v dT$ und $p = mR_S T/V$ (Zustandsgleichung idealer Gase) wird daraus

$$mc_v dT + mR_S T dV/V = 0$$

und nach Multiplikation mit $1/(Tm)$

$$c_v dT/T + R_S dV/V = 0$$

$$\text{Integration } c_v \int_{T_1}^{T_2} dT/T = -R_S \int_{V_1}^{V_2} dV/V \text{ ergibt}$$

$$c_v \ln (T_2/T_1) = -R_S \ln (V_2/V_1)$$

Wir formen um: $\ln (T_2/T_1)^{c_v} = \ln (V_2/V_1)^{-R_S}$ und erhalten $(T_2/T_1)^{c_v} = (V_2/V_1)^{-R_S}$. Mit $R_S = c_p - c_v$ (Gl. 2.37) und dem so genannten Adiabatenexponenten $\kappa = c_p/c_v$ ergibt sich schließlich

$$T_1 V_1^{\kappa-1} = T_2 V_2^{\kappa-1} \quad \text{oder allgemein} \\ T V^{\kappa-1} = \text{const} \quad (2.46)$$

Wir ersetzen T mit Hilfe der allgemeinen Zustandsgleichung (2.13) durch p und erhalten

$$p_1 V_1^\kappa = p_2 V_2^\kappa; \quad p V^\kappa = \text{const} \quad (2.47)$$

Für T und p erhalten wir auf ähnliche Weise die Gleichung

$$T_1^\kappa p_1^{1-\kappa} = T_2^\kappa p_2^{1-\kappa} \quad T^\kappa p^{1-\kappa} = \text{const} \quad (2.48)$$

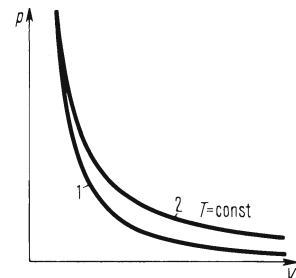


Bild 2.21 Adiabate 1 und Isotherme 2 im p - V -Diagramm

Gl. (2.46) bis (2.48) sind die Gleichungen der adiabatischen Zustandsänderungen. Da $\kappa > 1$ ist, verläuft die so genannte Adiabate 1 steiler als die Isotherme 2 im p - V -Diagramm 2.21.

Das lässt sich anschaulich so erklären: Die zur adiabatischen Expansion erforderliche Energie muss dem Gas selbst entnommen werden, da kein Austausch mit der Umgebung stattfindet. Die innere Energie sinkt also, das Gas kühlt sich ab. Wegen dieser Abkühlung nimmt der Druck stärker ab als bei der isothermen Expansion. Umgekehrt verläuft der Vorgang bei der adiabatischen Kompression. Deshalb erwärmt sich beispielsweise eine schnell betätigte Handluftpumpe stark.

2.4.3.5 Polytrope Zustandsänderung

Bei ungehindertem Wärmeaustausch mit der Umgebung verläuft eine Zustandsänderung isotherm. Bei völlig fehlendem Austausch verläuft sie adiabatisch. Jeden zwischen diesen beiden Grenzfällen verlaufenden Prozess nennt man polytrop.

Polytrope Zustandsänderungen verlaufen bei einer für adiabatische Zustandsänderungen nicht ausreichenden Wärmeisolation.

Zu den beiden genannten Grenzfällen gehören die Gleichungen $pV^1 = \text{const}$ (Isotherme) und $pV^\kappa = \text{const}$ (Adiabate).

Für die polytrope Zustandsänderung gilt die Gleichung $pV^n = \text{const}$ wobei $\kappa > n > 1$ ist.

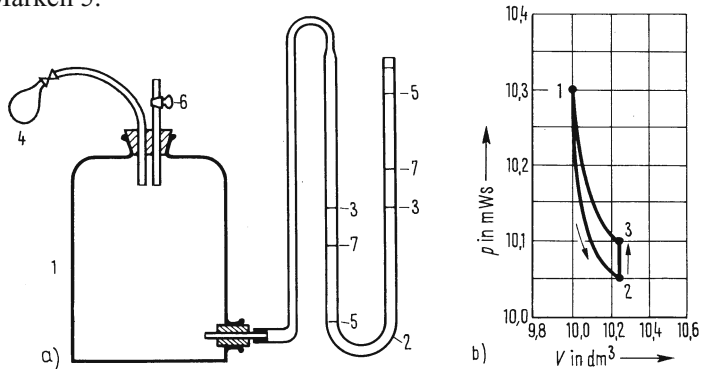
Alle behandelten Zustandsänderungen lassen sich formal durch die Gleichung $pV^x = \text{const}$ beschreiben, und man erhält ihre Zustandsgleichungen, wenn man für den Exponenten x folgende Werte einsetzt:

$x = 1$	isotherme Zustandsänderung	$pV = \text{const}$
$x = \kappa$	adiabatische Zustandsänderung	$pV^\kappa = \text{const}$
$x = 0$	isobare Zustandsänderung	$pV^0 = p = \text{const}$
$x = \infty$	isochore Zustandsänderung	$pV^\infty = \text{const}$, entsprechend $p^{1/\infty} V = p^0 V = V = \text{const}$

Adiabatische und polytrope Vorgänge sind in Physik und Technik von großer Bedeutung. Zur Vertiefung des Verständnisses soll deshalb noch ein Versuch angeschlossen werden.

□ Versuch 7. Ein Glasgefäß 1 ist mit einem Wassermanometer 2 verbunden (Bild 2.22). In beiden Schenkeln steht das Wasser gleich hoch (3). Mit der Luftpumpe 4 erzeugen wir im Glasgefäß langsam einen Luftüberdruck; das Wasser in den Manometerschenkeln steigt bzw. sinkt dann bis zu den Marken 5.

Bild 2.22 Adiabatische Expansion der Luft
 a) Versuchsanordnung
 b) p-V-Diagramm



Nachdem wir uns überzeugt haben, dass sich der am Manometer angezeigte Überdruck 5 nicht ändert, lassen wir die komprimierte Luft durch Öffnen des Hahnes 6 schnell entweichen. Kurz darauf schließen wir den Hahn wieder; nach dem erwarteten Druckabfall stellen wir jetzt aber fest, dass der Druck im Glasgefäß wieder langsam ansteigt, bis er die Marke 7 erreicht hat. □

Deutung: Bei der schnellen – annähernd adiabatischen – Expansion der Luft kühlt sich diese auf einen unter der Zimmertemperatur liegenden Wert ab (Kurvenabschnitt 1–2 im Bild 2.22b). Danach findet allmählich Temperatenausgleich mit der Umgebung statt. Da der Hahn inzwischen geschlossen worden war, steigt der Druck dabei isochor an (Abschnitt 2–3 in Bild 2.22b). Der Kurvenzug 1–3 entstände bei langsamer – isothermer – Druckminderung.

Anwendungen. Auf den Zustandsänderungen der Gase beruhen die Grundlagen vieler Maschinen, wie Kolben- und Strömungsmaschinen (Turboverdichter, Gasturbinen). Bei Dieselmotoren z.B. wird der Kraftstoff in den Verbrennungsraum eingespritzt, nachdem in diesem die Luft durch annähernd adiabatische Kompression genügend hoch erwärmt worden ist, um ihn entzünden zu können.

Aufgaben zu Abschn. 2.4.3

1. Ein ideales Gas dehnt sich bei konstanter Temperatur 200 °C auf das dreifache Volumen aus. Wie groß ist die verrichtete Arbeit und die notwendige Wärmezufuhr für 1 Kilomol des Gases? Wie ändern sich Enthalpie und innere Energie?
2. Die Luft innerhalb und außerhalb eines Kühlschranks ($V = 140 \text{ l}$) hat bei dem Druck 10^5 Pa die Temperatur 27 °C. Die Tür des Schrankes soll völlig gasdicht schließen. Einige Zeit nach dem Einschalten ist die Innentemperatur auf 20 °C gesunken. a) Wie groß ist der Druck im Kühlschrank nach dem Abkühlen, b) welche Wärme wurde der Luft in ihm entzogen ($c_v = 7,16 \cdot 10^2 \text{ J/kg K}$), c) welche Kraft braucht man zum Öffnen der Kühlschranktür (Höhe $h = 0,8 \text{ m}$, Breite $b = 0,6 \text{ m}$, Scharnier und Griff jeweils am äußersten Rand der Tür)? d) Wie ändern sich Enthalpie und innere Energie?
3. Ein Dieselmotor verdichtet $1:20 = V_2/V_1$. Wie groß ist die Temperatur der komprimierten Luft, wenn sie bei 15 °C angesaugt wird und der Vorgang a) adiabatisch, b) mit dem Polytropenexponenten $n = 1,38$ abläuft? c) Wie ändert sich in beiden Fällen die innere Energie der Luft eines Zylinders, wenn beim Hub 0,5 l Luft verdichtet werden?
4. Die südlich des Alpenhauptkammes aufgestiegene warme Luft hat sich ausgedehnt und auf 0 °C abgekühlt. Diese Abkühlung beträgt etwa die Hälfte einer adiabatisch erfolgten Temperaturerniedrigung, da durch Wolkenbildung (Kondensation von Wasserdampf s. Abschn. 2.4.5) Wärme frei wird. Um wie viel erwärmt sich die Luft, wenn sie anschließend beim Absinken nördlich der Alpen von 695 hPa auf 938 hPa adiabatisch komprimiert wird?

2.4.4 Zustandsgleichung realer Gase und Dämpfe

Die in Abschn. 2.4.3 behandelten Zustandsänderungen waren ausschließlich Sonderfälle der allgemeinen Zustandsgleichung für Gase und deshalb wie diese nur für ideale Gase gültig. Der Idealzustand eines Gases ist jedoch ein Grenzzustand, der dadurch gekennzeichnet ist, dass die Moleküle außer durch elastischen Stoß keine Kräfte aufeinander ausüben und ihr Eigenvolumen vernachlässigbar klein gegenüber dem Gesamtvolumen ist. Gelten diese Bedingungen nicht, so sprechen wir von einem realen Gas.

Ein Gas, dessen Zustandsänderungen nicht mehr durch die allgemeine Zustandsgleichung beschrieben werden können, heißt reales Gas. Dies ist in der Nähe der Verflüssigung (s. Abschn. 2.4.4.3) der Fall. In unmittelbarer Nähe der Verflüssigung bezeichnet man ein Gas auch als Dampf.

Häufig bezeichnet man überhaupt einen gasförmigen Stoff dann als Dampf, wenn dieser bei Normalbedingungen flüssig oder fest ist. So nennt man z.B. das Gas des Quecksilbers, auch wenn es so verdünnt ist, dass es ideal ist, Quecksilberdampf.

2.4.4.1 Modellvorstellungen

Nach der Zustandsgleichung idealer Gase wäre das Volumen eines Gases bei 0 K gleich Null. Das ist aber unmöglich, da ja die Moleküle selbst eine endliche Ausdehnung besitzen. Daraus geht hervor, dass bei tiefen Temperaturen und hohen Drücken, wenn das Gasvolumen also klein ist, diese Zustandsgleichung nicht mehr gelten kann. Sie muss deshalb zuerst einmal so geändert werden, dass sie unter Berücksichtigung des kleinsten Volumens, auf das die Moleküle zusammenrücken können, auch noch für die Temperatur 0 K gilt. Dazu ersetzt man in der Gleichung (2.17) $p V_S = R_S T$ das spezifische Volumen V_S durch den Ausdruck $V_S - b$, wobei b das so genannte spezifische Kovolumen ist. Die Theorie ergibt für das spezifische Kovolumen etwa den vierfachen Wert des spezifischen Eigenvolumens der Moleküle.

Weiterhin ziehen sich im Idealzustand des Gases die Moleküle gegenseitig nicht an. Im flüssigen oder festen Zustand sind die Moleküle jedoch so nahe aneinander gerückt, dass Anziehungskräfte wirksam werden können (s. Abschn. 1.5.1.5). Der Übergang vom Zustand völliger Unabhängigkeit der Moleküle zum Zustand der starken Anziehung in festen Körpern geht nicht sprunghaft, sondern allmählich (s. auch Abschn. 2.4.5) vor sich; er beginnt schon beim Gas, wenn die Dichte genügend groß ist. Bei der Ausdehnung der Gase muss jetzt nicht nur die Arbeit gegen den äußeren Druck, sondern auch diejenige gegen die inneren Anziehungskräfte berücksichtigt werden. Dem trägt man Rechnung, indem man zu dem äußeren Druck p noch den sog. Binnendruck addiert. Da die Anziehungskräfte zwischen den Molekülen etwa mit der 6. Potenz ihres Abstandes abnehmen, wird der Binnendruck gleich a/V_S^2 gesetzt. Die Konstanten a und b haben für jedes Gas typische Werte.

2.4.4.2 Van der Waalsche Zustandsgleichung

Mit den in Abschn. 2.4.4.1 eingeführten Korrekturen wird aus der Zustandsgleichung der idealen Gase die von van der Waals (1837 bis 1923) aufgestellte

Zustandsgleichung realer Gase

$$\left(p + \frac{a}{V_S^2} \right) (V_S - b) = R_S T \quad (2.49)$$

mit dem Binnendruck a/V_S^2 , dem spezifischen Kovolumen b und dem spezifischen Volumen $V_S = V/m$. Sie beschreibt die Zustandsänderungen realer Gase in guter Näherung.

Wir wollen das Verhalten eines realen Gases an Hand isothermer Zustandsänderungen im p - V_S -Diagramm, Bild 2.23, diskutieren. Bei hohen Temperaturen ($T > T_S$) sind die Isothermen Hyperbeln, es gilt also die allgemeine Zustandsgleichung idealer Gase. Mit sinkender Temperatur sind die Kurven zunehmend verzerrt, bis sie bei T_3 einen Wendepunkt K mit

horizontaler Tangente aufweisen, denn Gl. (2.49) ist 3. Grades in Bezug auf das spezifische Volumen V_S . Es gibt also einen (für $T = T_3$) oder drei (für $T < T_3$) reelle Werte von V_S für gewisse Temperatur-Druck-Paare. In der Umgebung von V_{S2} ist der Kurvenverlauf physikalisch unmöglich, da in seiner Umgebung bei isothermer Kompression der Druck abnehmen müsste. Tatsächlich sind nur die Kurvenstücke außerhalb des schraffiert gezeichneten Bereiches mit den experimentellen Ergebnissen in Übereinstimmung.

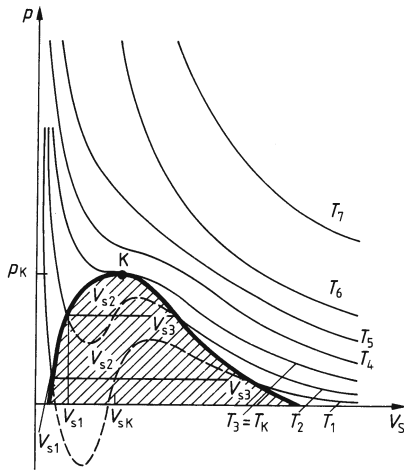


Bild 2.23 Isothermen eines realen Gases
K ist der kritische Punkt

primierbaren Gas mit relativ großem Volumen zur schwer komprimierbaren Flüssigkeit, also die Verflüssigung des Gases. Zwischen V_{S3} und V_{S1} wird ein stetig wachsender Anteil des Gases flüssig, bis bei V_{S1} das gesamte Gas flüssig geworden ist. Diesen Verlauf weisen alle Isothermen unterhalb der Temperatur $T_3 = T_K$ auf. Die van der Waals'sche Gleichung gilt also nicht nur für Gase, sondern auch für den Übergang gasförmig-flüssig und für den flüssigen Zustand mit guter Näherung.

Man nennt die Temperatur derjenigen Isotherme, die einen Wendepunkt mit horizontaler Tangente aufweist, die kritische Temperatur T_K und entsprechend die zugehörigen Größen Druck und spezifisches Volumen den kritischen Druck p_K und das kritische spezifische Volumen V_{SK} des Gases. Ein Gas kann nur unterhalb dieses kritischen Punktes verflüssigt werden.

Auf die Teilchen in einer Flüssigkeit wirken unterhalb des kritischen Punktes Anziehungskräfte mit Resultierenden, die in das Innere von der Oberfläche weggerichtet sind (s. auch Bild 1.133). Bei Erreichen des kritischen Punktes verschwinden diese Resultierenden, da die Dichte des Dampfes gleich derjenigen der Flüssigkeit geworden ist, die Austrittsarbeit – und damit die Verdampfungswärme (s. Abschn. 2.4.5.3) – werden gleich 0, die Teilchen können aus dem gesamten Flüssigkeitsvolumen in den Gasraum austreten, die Flüssigkeitsoberfläche verschwindet.

Bei einer isothermen Kompression bei der Temperatur T_1 (oder T_2) erreicht man bei steigendem Druck das spezifische Volumen V_{S3} . Bei weiterer Volumenverkleinerung kann der Druck nicht steigen, er müsste sonst vor Erreichen von V_{S1} wieder absinken. Der Übergang von V_{S3} nach V_{S1} verläuft also nicht nach Gl. (2.49), sondern er muss durch eine zur Abszisse parallele Gerade dargestellt werden. Diese wird so gewählt, dass die Flächen zwischen ihr und den oberhalb und unterhalb liegenden Kurvenästen gleich sind, da dann die zur Kompression erforderliche Arbeit längs der Geraden gleich derjenigen längs der Kurve ist. Auf der Geraden ändert sich der Druck nicht. Die Strecke $V_{S3} V_{S1}$ vom langsam ansteigenden Kurvenstück zum sehr steil ansteigenden ist der Übergang vom leicht kom-

Die Begrenzung des schraffiert gezeichneten Verflüssigungsbereiches, die so genannte Grenzkurve, trennt links vom kritischen Punkt die reine Flüssigkeit, rechts davon das reine Gas von demjenigen Bereich, in dem beide Zustände nebeneinander bestehen.

Speziell beim Wasser heißt der rein gasförmige Zustand außerhalb der Grenzkurve (überhitztes Gebiet) überhitzter Dampf, auf der Grenzkurve (rechts vom kritischen Punkt) trocken gesättigter Dampf. Wasserdampf innerhalb der Grenzkurve (Sättigungsgebiet) heißt Nassdampf (Bild 2.24).

Die Konstanten a und b der Gl. (2.49) können aus den experimentell ermittelten kritischen Daten T_K , p_K und V_{SK} mit Hilfe der drei Gleichungen $p = f(V_S)$, $dp/dV_S = 0$ und $d^2p/dV_S^2 = 0$, bestimmt werden (Bedingungen für einen Wendepunkt mit horizontaler Tangente) (Tafel 2.25).

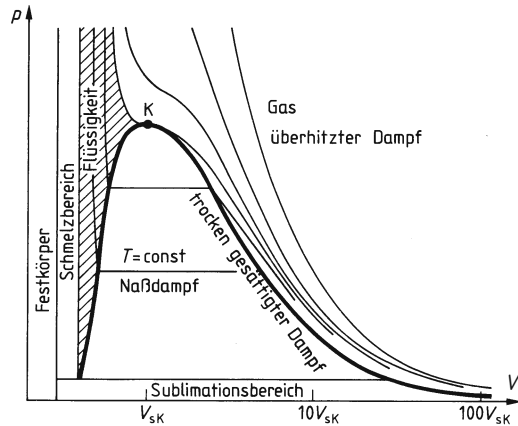


Bild 2.24 p - V_S -Diagramm mit Isothermen und Grenzkurven

K ist der kritische Punkt

Tafel 2.25 Kritische Temperatur T_K in K, kritischer Druck p_K in N/m^2 und van der Waalssche Konstanten a_A in $Nm^4/kmol^2$ sowie a in Nm^4/kg^2 (4. Spalte) und b_A in $m^3/kmol$ sowie b in m^3/kg (6. Spalte) für einige Stoffe

Stoff	T_K	p_K	a_A	a	b_A	b
Wasserstoff H_2	33,3	$1,3 \cdot 10^6$	$0,25 \cdot 10^5$	$61,20 \cdot 10^2$	$2,7 \cdot 10^{-2}$	$13,20 \cdot 10^{-3}$
Stickstoff N_2	126	$3,4 \cdot 10^6$	$1,36 \cdot 10^5$	$1,74 \cdot 10^2$	$3,9 \cdot 10^{-2}$	$1,37 \cdot 10^{-3}$
Sauerstoff O_2	154	$5,0 \cdot 10^6$	$1,36 \cdot 10^5$	$1,35 \cdot 10^2$	$3,2 \cdot 10^{-2}$	$1,00 \cdot 10^{-3}$
Kohlendioxid CO_2	304	$7,3 \cdot 10^6$	$3,69 \cdot 10^5$	$1,90 \cdot 10^2$	$4,3 \cdot 10^{-2}$	$0,97 \cdot 10^{-3}$
Wasser H_2O	647	$21,8 \cdot 10^6$	$5,59 \cdot 10^5$	$17,22 \cdot 10^2$	$3,0 \cdot 10^{-2}$	$1,68 \cdot 10^{-3}$

2.4.4.3 Verflüssigung von Gasen

Zur Verflüssigung muss man Gase also erst unter die kritische Temperatur abkühlen. Es genügt nicht, einfach zu komprimieren; dies führt erst unterhalb des kritischen Punktes zur Verflüssigung. Zur Abkühlung kann man das Gas entweder unter Arbeitsabgabe expandieren oder das sog. Lindeverfahren unter Ausnützung des Joule-Thomson-Effektes¹⁾ anwenden. Zur Erläuterung des Joule-Thomson-Effektes soll folgender Versuch dienen.

□ **Versuch 8.** Eine wärmeisolierte Pressluftflasche hat ein Ventil, einen Gaszähler und ein Thermometer zur Messung der Gastemperatur. Öffnet man das Ventil, so kann am Gaszähler das ausströmende Gasvolumen gemessen und daraus die Ausdehnungsarbeit bestimmt werden. Die entsprechende Verringerung der inneren Energie wird aus der Temperatursenkung ermittelt. Sie müsste bei einem idealen Gas gleich der Ausdehnungsarbeit sein: $\Delta W_A = \Delta U$. Die Messung zeigt jedoch eine geringere Temperatur als erwartet. □

¹⁾ J. P. Joule (s. S. 190), William Thomson (1824 bis 1904).

Versuch 8 zeigt, dass bei Expansion von Luft die kinetische Energie der Moleküle um einen über die Ausdehnungsarbeit hinausgehenden Betrag abnimmt, da bei der Ausdehnung eines realen Gases zusätzlich Arbeit verrichtet werden muss, um gegen die Anziehungskräfte zwischen den Molekülen den mittleren Abstand zu vergrößern. Die hierzu erforderliche Energie wird der kinetischen Energie der Moleküle des Gases entnommen, das sich hierdurch, auch ohne äußere Arbeit zu verrichten, abkühlt. Diese Abkühlung realer Gase durch Drosselung nennt man den Joule-Thomson-Effekt. Die Temperaturdifferenzen pro Druckänderung an der Drosselstelle liegen für Luft bei $0,25 \text{ K}/10^3 \text{ hPa}$, für Kohlendioxid bei $0,76 \text{ K}/10^3 \text{ hPa}$.

Der Drosselversuch 8 kann, oberhalb einer für jedes Gas typischen so genannten Inversionstemperatur, die hier nicht näher erklärt werden kann, auch zur Erwärmung führen.

Das ist z.B. beim Ausströmen von Wasserstoff oberhalb 224 K der Fall (Gefahr der Selbstentzündung bei Leck in Wasserstoffleitungen). Um Gase durch Drosselung abzukühlen, muss man sie also erst auf Temperaturen unterhalb der Inversionstemperatur bringen.

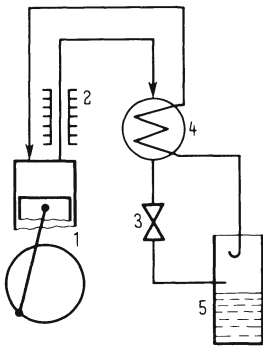


Bild 2.26 Gasverflüssigung nach Linde

Anwendungen. Die Abkühlung durch den Joule-Thomson-Effekt ist die Grundlage technisch bedeutsamer Verflüssigungsverfahren. Im so genannten Linde-Verfahren (Bild 2.26) wird das im Kompressor 1 verdichtete und im Wärmetauscher 2 auf ca. 20 °C abgekühlte Gas an einer Drosselstelle 3 entspannt und so abgekühlt. Das abgekühlte Gas wird in einem Gegenstromkühler 4 zurückgeführt, um das zur Drosselstelle 3 strömende Gas vorzukühlen. So sinkt die Temperatur an der Drosselstelle schnell auf den zur Verflüssigung erforderlichen kritischen Wert. Die entstehende Flüssigkeit kann unter der Drosselstelle aufgefangen werden (5).

Aufgaben zu Abschn. 2.4.4

1. Man berechne für Helium aus den van der Waalsschen Konstanten $a_A = 0,035 \cdot 10^5 \text{ Nm}^4/\text{kmol}^2$ und $b_A = 2,4 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3/\text{kmol}$ die kritischen Werte von Druck und Temperatur.
2. Woran liegt es, dass ein Gas oberhalb des kritischen Punktes nicht verflüssigt werden kann?
3. Wie groß ist die Kompressibilität eines Gases am kritischen Punkt?

2.4.5 Aggregatzustände

Die drei Erscheinungsformen der Materie – fest, flüssig und gasförmig – nennt man Aggregatzustände oder Phasen. Ihre äußeren Unterscheidungsmerkmale weisen schon auf ihre inneren strukturellen Unterschiede hin. Auf der einen Seite ist der Grenzzustand das ideale Gas, in dem sich die Atome oder Moleküle völlig frei und ungeordnet bewegen. Wir wollen diese Teilchen, wenn wir nicht zwischen Atomen oder Molekülen besonders unterscheiden wollen, einfach Molekeln nennen. Beim realen Gas machen sich schon Anziehungskräfte zwischen den Molekeln bemerkbar, es ist jedoch noch eine sehr große Unordnung vorhanden. Der andere Grenzzustand ist der ideale Kristall. Alle Bausteine befinden sich hier in größtmöglicher Ordnung. Diese Ordnung ist

bei einem realen Kristall oder Festkörper (Abschn. 7) mehr oder weniger gestört. Zwischen realem Gas und Festkörper, also im flüssigen Zustand, sind die Anziehungskräfte zwischen den Molekeln groß genug, um z.B. eine gewisse Zerreißfestigkeit zu bewirken; die Teilchen können aber noch leicht gegeneinander verschoben werden.

2.4.5.1 Schmelzpunkt, Schmelzwärme

Wir befassen uns zunächst mit dem Übergang vom festen in den flüssigen Zustand.

□ **Versuch 9.** In einem Reagenzglas 1 befindet sich Eis (Bild 2.27a). Zur Messung der Temperatur des Eises dient ein Thermoelement 2, dessen Messwerte z.B. auf einem Schreiber 3 in Abhängigkeit von der Zeit registriert werden. Um das Reagenzglas herum befindet sich eine elektrische Heizvorrichtung 4, welche in gleichen Zeiten gleiche Wärmen zuführt, so dass die Abszisse des Schreibers auch ein Maßstab für die zugeführte Wärme ist. Nach Einschalten der Heizung erhält man am Schreiber den Temperaturverlauf gemäß Bild 2.27b. Den gleichen Verlauf in umgekehrter Richtung bekommt man, wenn man nach Abschalten der Heizung so abkühlt, dass in gleichen Zeiten wieder gleiche Wärmen entzogen werden und das Wasser wieder gefriert. □

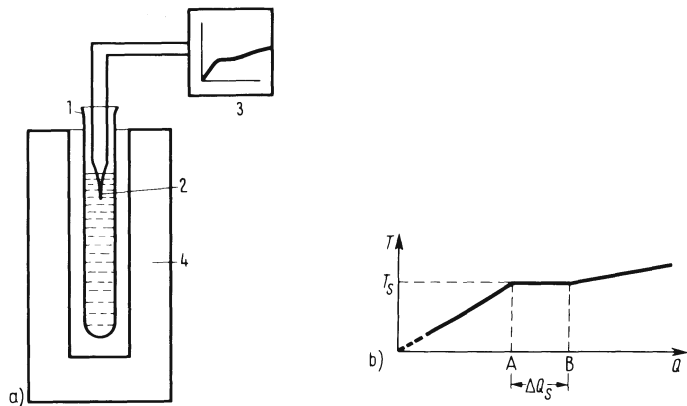


Bild 2.27 Messung des Temperaturverlaufs beim Schmelzen

Bei der Wärmezufuhr steigt die Temperatur zunächst bis zum Wert T_S an, bleibt dann eine Weile konstant, um erst nach Zufuhr der Wärme ΔQ_S wiederum zu steigen. Während dieser Zeit schmilzt das Eis. Wir nennen die Temperatur T_S die Schmelztemperatur. Beim umgekehrten Verlauf erstarbt oder gefriert das Wasser wiederum bei konstanter Temperatur T_S . Deshalb spricht man hier von der Erstarrungs- oder Gefrieretemperatur.

Definitionen: Die Temperatur beim Phasenübergang fest \rightleftharpoons flüssig heißt Schmelztemperatur bzw. Erstarrungstemperatur; bei dem äußeren Druck 1013 hPa heißt sie Schmelzpunkt bzw. Erstarrungspunkt. Sie ist eine Stoffkonstante.

Bei manchen Stoffen geschieht der Übergang in einem gewissen Temperaturintervall. Diese Stoffe haben keinen definierten Schmelzpunkt.

Das Schmelzen oder Erstarren geht unter Zufuhr oder Abgabe der so genannten Schmelzwärme oder Erstarrungswärme ΔQ_S (man nennt sie auch latente = verborge-

ne Wärme) ohne Temperaturänderung, folglich bei konstanter mittlerer kinetischer Energie der Molekeln vor sich. Das Schmelzen oder Erstarren ist mit einer Änderung der Ordnung und damit der potentiellen Energie der Molekeln sowie einer Volumen- und damit Dichteänderung verbunden. Im Allgemeinen ist $q_{fl} < q_{fest}$ (Ausnahme z.B. Wasser). Da ein, wenn auch nur geringer, Teil der latenten Wärme zur Volumenänderungsarbeit dient, bezeichnen wir sie als Enthalpie.

Definitionen: Die bei konstanter Schmelztemperatur aufgenommene oder abgegebene Wärme ΔQ_S heißt Schmelz- oder Erstarrungswärme oder -enthalpie. Die Schmelzwärme dient zur Änderung der Ordnung der Molekeln und des Volumens des Stoffes. Der Quotient aus der Schmelzwärme ΔQ_S und der Masse m des geschmolzenen Stoffes heißt spezifische Schmelzwärme q_s

$$q_s = \frac{\Delta Q_s}{m}$$

Mit Erreichen der Schmelztemperatur wird die Energie der Molekeln so groß, dass sie ihre festen Plätze im Festkörper verlassen. Beim Erstarren geht das Zusammenfinden zu der Ordnung des Festkörpers irgendwo in der Schmelze zunächst zufällig vor sich, und es bildet sich irgendwo eine Keimzelle. An diese lagern sich dann sehr schnell weitere Bausteine an, bis die ganze Schmelze erstarrt ist. Bei vorsichtiger und erschütterungsfreier Abkühlung kann deshalb eine Schmelze auch unter ihre Erstarrungstemperatur abkühlen und zwar um so leichter, je komplizierter die Ordnung des Stoffes ist.

Tafel 2.28 Schmelzpunkte in °C, spezifische Schmelzwärmen in J/kg und molare Schmelzwärmen in J/kmol einiger Stoffe

Stoff	Schmelzpunkt	spezifische Schmelzwärme	molare Schmelzwärme
Wasserstoff	-259,2	$58,3 \cdot 10^3$	$117 \cdot 10^3$
Sauerstoff	-218,8	$13,8 \cdot 10^3$	$442 \cdot 10^3$
Quecksilber	-38,89	$11,7 \cdot 10^3$	$235 \cdot 10^4$
Äthylglykol	-17,4	$174 \cdot 10^3$	$912 \cdot 10^4$
Wasser	0	$333 \cdot 10^3$	$567 \cdot 10^4$
Blei	+327,4	$23,9 \cdot 10^3$	$495 \cdot 10^4$
Aluminium	+658	$394 \cdot 10^3$	$106 \cdot 10^5$
Kupfer	+1083	$203 \cdot 10^3$	$129 \cdot 10^5$
Stähle	+1370...1500		
Platin	+1774	$113 \cdot 10^3$	$220 \cdot 10^5$
Wolfram	+3380	$192 \cdot 10^3$	$353 \cdot 10^5$

Die beim Schmelzen oder Erstarren auftretenden Veränderungen können durch mechanische Kräfte beeinflusst werden. Ist der Abstand der Molekeln im Festkörper im Mittel kleiner als in der Schmelze, so kann die Schmelztemperatur durch äußeren Druck auf den Körper – wodurch der Abstand verkleinert wird – zu höherer Temperatur hin verschoben werden. Im umgekehrten Fall wird durch den äußeren Druck die Schmelztemperatur erniedrigt. Bei Wasser beträgt die Schmelztemperaturerniedrigung etwa $7,7 \cdot 10^{-3}$ K/(1000 hPa). Beim Schmelzen des Eises unter Druck wird die Schmelzwärme verbraucht, wodurch sich Eis und Wasser abkühlen, sodass beim Nachlassen des Druckes das Wasser sofort wieder gefriert. Diese Erscheinung nennt man Regelation.

Lösungen und häufig auch Legierungen haben tiefer liegende Schmelztemperaturen als ihre Komponenten. Die Gefriertemperaturerniedrigung pro Volumenprozent von in Wasser gelöstem Kochsalz beträgt 0,5 K/Prozent. Der entsprechende Wert für Äthylglykol (Gefrierschutzmittel) ist im Mittel etwa 0,9 K/Prozent.

Anwendungen. Die mit 9% beträchtliche Ausdehnung des Wassers beim Gefrieren ist die wichtigste Ursache für die Verwitterung. Von den Menschen wurde sie schon vor Jahrtausenden z.B. zum Absprennen von Gestein benützt.

In Form von sog. latenten Wärmen können (bei konstanter Temperatur) relativ große Energiebeträge gespeichert werden. Schmilzt Eis oder Schnee unter dem Druck von Schlittschuhen oder Skiern (und auf Grund der beim Gleiten aufgewendeten Reibungsarbeit), so erleichtert die entstandene Wasserschicht das Gleiten beträchtlich (innere Reibung). Um das Wasser im Kühler oder der Scheibenwaschanlage eines Kraftfahrzeuges vor dem Gefrieren zu schützen, setzt man diesem wasserlösliche Flüssigkeiten wie Äthylglykol zu. Zum Auftauen von Eis und Schnee auf Straßen werden Salze gestreut. Das Eis schmilzt unter deutlicher Abkühlung, da ihm die Schmelzwärme und die so genannte Lösungswärme des Salzes entzogen wird. Deshalb nennt man eine Mischung aus Salz und Eis auch Kältemischung. Mit diesen lassen sich Temperaturen zwischen -65 °C und 0 °C herstellen. Die jeweils tiefste erreichbare Schmelztemperatur hängt vom Verhältnis der Massenanteile ab. Man nennt die sehr genaue Schmelztemperatur den eutektischen Punkt. Mit 22,9% Massenanteil NaCl in einem Salz-Eis-Gemisch erreicht man -21 °C , mit 14% MgCl -34 °C , mit 30,2% CaCl -50 °C mit 30,9% KOH -63 °C .

2.4.5.2 Verdampfen und Dampfdruck

Dass eine Flüssigkeit auch, ohne zu sieden, in den gasförmigen Zustand übergeht, ist allgemein bekannt. Man nennt diesen Vorgang Verdunstung. Dieser Prozess lässt sich mit der für die kinetische Wärmetheorie entwickelten Modellvorstellung gut verstehen:

Gegen die Oberfläche der Flüssigkeit stößt von innen eine gewisse Anzahl Molekeln mit verschiedenen Geschwindigkeiten. Diejenigen mit der größten Geschwindigkeit sind imstande, die Anziehungskräfte ihrer Nachbarmolekeln zu überwinden und die Flüssigkeit zu verlassen, also zu verdampfen bzw. zu verdunsten. Dies sind diejenigen Molekeln, die sich in der Boltzmannverteilung (Bild 2.14) ganz auf dem äußeren rechten Teil der Kurve befinden und demnach eine große Geschwindigkeit und hohe Energie haben. Schafft man die verdampften Molekeln etwa durch Abpumpen weg, so kühlt sich die Flüssigkeit ab, da immer nur die Molekeln geringerer Energie in ihr zurückbleiben. Das lässt sich zeigen, indem man etwas Wasser auf einem Uhrglas unter eine Glasglocke bringt und evakuiert, bis das Wasser gefriert. Sinkt die Temperatur, so verringert sich dabei die innere Energie. Verdunstet die Flüssigkeit in einem geschlossenen Raum, so nimmt die Dampfdichte langsam zu. Mit zunehmender Dichte des Dampfes kehren aber immer mehr Molekeln in die Flüssigkeit zurück. Es stellt sich ein Gleichgewicht ein, wenn die Zahl der pro Zeit austretenden Molekeln gleich der Zahl der wieder eintretenden ist. In diesem Gleichgewichtszustand ist der Druck des Dampfes konstant.

Der durch den thermischen Austritt von Molekeln in den Gasraum entstehende Gasdruck heißt Dampfdruck.

□ **Versuch 10.** Unter einer evakuierten Glasglocke mit einem Manometer befindet sich eine mit einer Flüssigkeit gefüllte Flasche. Öffnet man z.B. magnetisch die Flasche, so verdampft ein Teil der Flüssigkeit, und man kann am Manometer den Dampfdruck ablesen. Er erreicht nach einiger Zeit einen Sättigungswert, den so genannten Sättigungsdampfdruck p_s .

Dieser ist bei konstanter Temperatur unabhängig von der Größe des Gefäßes, also vom Gasvolumen, was man leicht durch die Verwendung verschieden großer Glasglocken zeigen kann. Erwärmt man das Gefäß, so steigt der Druck an. □

Der Versuch 10 stimmt mit dem p - V_S -Diagramm der realen Gase (Bild 2.23) folgendermaßen überein: Die Geraden unter der Grenzkurve zeigen den Druck des Dampfes im Gleichgewichtszustand mit der Flüssigkeit. Auf jeder Geraden ist der Sättigungsdampfdruck vom Volumen unabhängig, mit steigender Temperatur kommt man zu höher liegenden Geraden mit höheren Druckwerten.

Im Gleichgewichtszustand zwischen Flüssigkeit und Dampf stellt sich der Sättigungsdampfdruck p_S ein. Er hängt nur von der Art des Stoffes und der Temperatur und nicht vom Volumen ab.

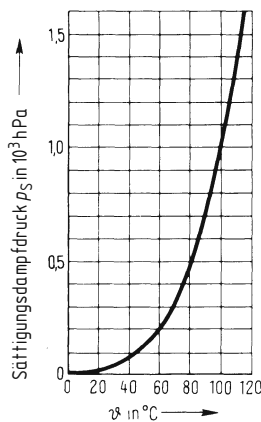


Bild 2.29 Dampfdruckkurve von Wasser

Dass der Dampfdruck mit zunehmender Temperatur stark ansteigt, leuchtet unmittelbar ein, da die Zahl der energiereichen Molekeln mit der Temperatur wächst. Technisch besonders interessant ist der Sättigungsdampfdruck von Wasser. Seine Temperaturabhängigkeit zeigen Bild 2.29 und Tafel 2.30.

Da auch in der Oberfläche fester Stoffe immer einige Molekeln genügend Energie besitzen, um aus dem Festkörper auszutreten, haben auch diese einen Dampfdruck (Beispiel: Geruch von Naphthalin). Geht ein fester Körper bei Zufuhr von Wärme in den gasförmigen Zustand über, so sagt man, er sublimiert.

Tafel 2.30 Sättigungsdampfdruck von Wasser

Temperatur in °C	100	110	120	125	130	135	140	145	150
Sättigungsdampfdruck in 10^3 hPa	1,01	1,49	2,09	2,42	2,81	3,26	3,76	4,32	4,95

Anwendungen. Da der Sättigungsdampfdruck eindeutig nur von der Temperatur abhängt, benützt man ihn zum Bau von Thermometern und Thermostaten, z.B. für Kraftfahrzeuge. Dazu befindet sich in einem geschlossenen Federkörper eine Flüssigkeit mit niedriger Siedetemperatur, z.B. Äther, im Gleichgewicht mit ihrem Dampf. Der Sättigungsdampfdruck steigt mit der Temperatur, und durch den auseinander gedrückten Federkörper wird z.B. ein Ventil im Kühlwasserkreislauf oder ein Zeiger bewegt. Wegen der Nichtlinearität der Dampfdruck-Temperaturkurve erhält man eine anfangs zusammengedrückte und dann auseinandergezogene Anzeigeskala. Der Quecksilber-Gasdruck in den Leuchtstofflampen entsteht durch den Sättigungsdruck von im Überschuss vorhandenem flüssigen Quecksilber. Stoffe mit niedrigem Dampfdruck (Quecksilber, Öle) verwendet man in Vakuumpumpen. Stoffe mit hohem Dampfdruck (z.B. Frigen) verwendete man früher als Treibgas in den Sprühdosen.

2.4.5.3 Siedetemperatur und Verdampfungswärme

Der Sättigungsdampfdruck eines Stoffes ist ein wichtiges Merkmal für seine Phasenübergänge, so z.B. für den vom flüssigen zum gasförmigen Zustand. Ist der Sättigungsdampfdruck gleich dem in der Flüssigkeit herrschenden statischen Druck, der sich aus dem auf

der Flüssigkeit lastenden (z.B. Luft-)Druck und dem Schweredruck zusammensetzt, so findet der Übergang flüssig \rightarrow dampfförmig nicht nur an der Oberfläche statt, sondern überall in der Flüssigkeit: Die Flüssigkeit siedet. Daher ist die Siedetemperatur vom Druck abhängig.

Eine Flüssigkeit siedet, wenn der Gesamtdruck in ihr gleich ihrem Sättigungsdampfdruck für die betreffende Temperatur ist. Bei dem äußeren Druck 1013 hPa und vernachlässigbaren sonstigen Drücken ergibt sich so die normale Siedetemperatur oder der Siedepunkt.

□ **Versuch 11.** Führt man einer Flüssigkeit Wärme zu, so nimmt ihre Temperatur nur bis zu einem für die Flüssigkeit bei gegebenem Druck typischen Wert zu (Bild 2.31). Bei weiterer Wärmezufuhr treten deutlich sichtbare Gasblasen an der Oberfläche und im Innern der Flüssigkeit auf. Die Flüssigkeit geht ohne weitere Temperaturerhöhung in den gasförmigen Zustand über. Umgekehrt bildet sich bei Abkühlung eines Gases bei der gleichen konstanten Temperatur die Flüssigkeit zurück. □

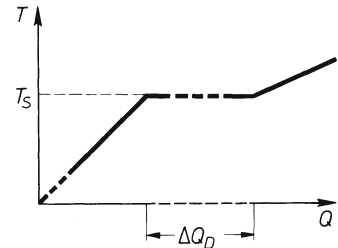


Bild 2.31 Temperaturverlauf beim Verdampfen

Definitionen: Die bei konstanter Siedetemperatur zu- oder abgeführte Wärme ΔQ_D heißt Verdampfungswärme oder Kondensationswärme bzw. -enthalpie.

Den Quotienten aus der Verdampfungswärme ΔQ_D und der Masse m des verdampften Stoffes nennt man spezifische Verdampfungswärme q_D

$$q_D = \frac{\Delta Q_D}{m}$$

Sublimiert ein Festkörper, so ist die dafür erforderliche Sublimationswärme gleich der Summe aus Schmelz- und Verdampfungswärme.

Die Verdampfungswärme dient dazu, beim Austritt der Molekeln aus der Flüssigkeitsoberfläche gegen die Molekularkräfte die so genannte Austrittsarbeit zu verrichten, sowie zur Vergrößerung des Volumens. So ist z.B. das Volumen von 1 kg Wasser etwa 1 l, von 1 kg Wasserdampf bei 100 °C und 1013 hPa 1,67 m³. Der bei weitem überwiegende Teil der Verdampfungswärme dient dabei der Überwindung der Kräfte zwischen den Molekülen, der geringere Teil zur Volumenvergrößerung (s.a. Aufgabe 3 zu Abschn. 2.4.5).

Tafel 2.32 zeigt die Siedepunkte und die zugehörigen spezifischen und molaren Verdampfungswärmen einiger Stoffe.

Tafel 2.32 Siedepunkte (bei 1013 hPa) in °C und zugehörige spezifische Verdampfungswärmen in J/kg und molare Verdampfungswärmen in J/kmol einiger Stoffe

Stoff	Siedepunkt	spezifische Verdampfungswärme	molare Verdampfungswärme
Stickstoff	-195,7	$2,06 \cdot 10^5$	$5,7 \cdot 10^6$
Sauerstoff	-182,9	$2,14 \cdot 10^5$	$6,8 \cdot 10^6$
Benzol	+ 80,1	$3,95 \cdot 10^5$	$3,1 \cdot 10^7$
Wasser	+100	$22,60 \cdot 10^5$	$4,1 \cdot 10^7$
Quecksilber	+357,25	$4,80 \cdot 10^5$	$9,6 \cdot 10^7$
Eisen	+2730	$63,80 \cdot 10^5$	$3,6 \cdot 10^8$

Andere Umwandlungswärmen. Es gibt Stoffe, die bei einer bestimmten Temperatur ihren Kristallaufbau ändern, ohne dass dabei der Aggregatzustand geändert wird, z.B. Eisen bei 907 °C (α -,Phase“ in γ -,Phase“). Auch für solche Prozesse ist eine latente Umwandlungswärme oder -enthalpie erforderlich.

Anwendungen. Der Wert der spezifischen Verdampfungswärme ist bei den meisten Stoffen sehr groß. Alle Flüssigkeiten, die beim Verdampfen die hierzu erforderliche Wärme ihrer Umgebung entziehen, kühlen diese stark ab. Darauf beruht die Arbeitsweise vieler Kältemaschinen. Umgekehrt kann die bei der Kondensation eines Gases frei werdende Wärme zu Heizungszwecken ausgenützt werden (Dampfheizung).

Partialdrücke. In Versuch 10 wird gezeigt, dass der Sättigungsdampfdruck nicht vom Volumen abhängt. Da es aber gleichgültig ist, ob man das Volumen durch Verkleinern des Gefäßes oder durch das Einbringen von anderen Körpern, etwa durch die Moleküle eines fremden Gases, verringert, hängt der Sättigungsdampfdruck nicht vom Druck anderer Gase und Dämpfe ab. In einem Gasgemisch nennt man die Drücke der einzelnen Gase oder Dämpfe Partialdrücke. Was hier für gesättigte Dämpfe gezeigt wurde, gilt auch für ungesättigte.

Der Partialdruck eines jeden Gases in einem Gasgemisch ist so groß, als ob das Gas den Raum allein ausfüllen würde. Der Gesamtdruck des Gasgemisches ist gleich der Summe der Partialdrücke (Daltonsches Gesetz).

2.4.5.4 Boltzmann-Faktor

In Abschn. 1.6.2.2 wurde gezeigt, dass der Luftdruck in der Erdatmosphäre mit zunehmender Höhe nach der barometrischen Höhenformel

$$p = p_0 e^{\frac{-\rho_0 g h}{p_0}}$$

abnimmt¹⁾. Wir wollen diese Gleichung verallgemeinern. Dazu formen wir den Exponenten um. Mit Gl. (2.18) wird $\rho/p = 1/(R_S T)$. Das gilt auch für $\rho_0/p_0 = 1/(R_S T)$. Ersetzen wir gleichzeitig die Gaskonstante R_S mit Gl. (2.24) durch Nk/m und setzen für m/N die Molekülmasse m_M , so erhalten wir für die Höhenformel

$$p = p_0 e^{\frac{-m_M g h}{kT}} \quad (2.50)$$

Der Zähler $m_M g h$ des Exponenten in Gl. (2.50) gibt die potentielle Energie eines Moleküls im Schwerfeld der Erde an, das sich in der Höhe h befindet. Das Molekül ist auf Grund der Wärmebewegung bis auf die Schwellenenergie $W_{\text{schw}} = m_M g h$ gegen die Erdanziehungskraft gehoben worden.

Definition: Wir nennen den Ausdruck $e^{-\frac{W_{\text{schw}}}{kT}}$ den Boltzmann-Faktor.

¹⁾ ρ_0 ist hier die Dichte, p_0 der Druck der Luft in der Höhe Null (s. Abschn. 1.6.2.2).

Dieser ist nicht zu verwechseln mit der Boltzmann-Konstanten k . Der Boltzmann-Faktor ist überall da in der Physik von Bedeutung, wo die Wärmebewegung von Teilchen eine Rolle spielt. Die Moleküle der Erdatmosphäre im Schwerfeld der Erde sind nur ein Beispiel.

Wir haben den Boltzmannfaktor hier aus der barometrischen Höhenformel plausibel gemacht. Allgemein ergibt er sich eigentlich aus statistischen Überlegungen. Diese Herleitung würde jedoch den Rahmen dieses Buches überschreiten.

Da der Druck p der Dichte ρ und damit der Teilchenzahldichte $n = N/V$ (Zahl der Teilchen pro Volumen) proportional ist, können wir für Gl. (2.50) auch schreiben

$$n/n_0 = e^{-\frac{W_{\text{schw}}}{kT}} \quad (2.51)$$

Diese Gleichung gibt also ganz allgemein den Bruchteil von Teilchen an, die auf Grund der Wärmebewegung (Größenordnung der mittleren thermischen Energie gleich kT) die Energieschwelle W_{schw} erreichen oder gerade überschreiten.

Dabei kann die zu überwindende Schwellenenergie von sehr verschiedener Art sein: So erhalten wir die Zahl der beim Verdampfen austretenden Moleküle oder den Dampfdruck, wenn W_{schw} die Verdampfungsenthalpie pro Molekül ist.

Weitere Beispiele sind: Die Maxwell-Boltzmann-Verteilung der Geschwindigkeit mit der kinetischen Energie W_{schw} , die elektrische Leitfähigkeit eines Elektronenhalbleiters, wobei W_{schw} die Ablösearbeit für ein Elektron ist, oder die Elektronenemission einer Glühkathode mit der Austrittsarbeit W_{schw} .

Bild 2.33 zeigt den Verlauf von $\ln(p_{S2}/p_{S1})$ von Wasserdampf, aufgetragen gegen $1/T$; p_{S2} ist der Sättigungsdruck bei 350 °C, p_{S1} ein (nur wenig temperaturabhängiger) Proportionalitätsfaktor, der vom jeweiligen Stoff abhängt. Die Steigung der Geraden ist ein Maß für die Schwellenenergie beim Verdampfen.

$$\frac{\Delta\left(\ln\frac{p_{S2}}{p_{S1}}\right)}{\Delta\left(\frac{1}{T}\right)} = -\frac{W_{\text{schw}}}{k}$$

Aus der Steigung ergibt sich für W_{schw} der Wert $6,89 \cdot 10^{-20}$ Nm. W_{schw} heißt in diesem Falle auch Austrittsarbeit. Sie gibt an, welche Arbeit ein Molekül beim Austritt aus der Flüssigkeitsoberfläche gegen die Anziehungskräfte der in der Flüssigkeit befindlichen Moleküle aufbringen muss.

Multipliziert man diese Arbeit mit der Zahl der beim Verdampfen austretenden Moleküle, so erhält man den Anteil der Verdampfungswärme, der nicht zur Ausdehnung gegen einen äußeren Druck gebraucht wird (s. auch Aufgabe 3 zu Abschn. 2.4.5).

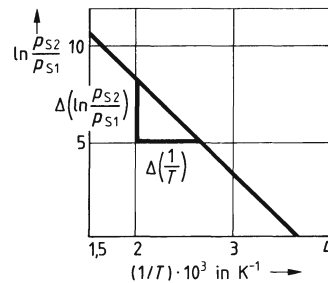


Bild 2.33 Dampfdruckkurve des Wassers zwischen 10 °C und 350 °C
 p_{S2} = Sättigungsdampfdruck
 p_{S1} = Sättigungsdampfdruck bei 10 °C

Aufgaben zu Abschn. 2.4.5

1. Wie viel mm Regen von 6 °C muss auf eine Schneefläche von 2 cm Höhe und der Temperatur –5 °C fallen, damit der Schnee gerade schmilzt? ($\rho_{\text{Schnee}} = 102 \text{ kg/m}^3$)?
2. Wie weit kann die Gefriertemperatur von Wasser durch Zugabe von Äthylglykol erniedrigt werden, wenn die niedrigste Schmelztemperatur bei der Lösung von 60 Volumenprozent Äthylglykol in Wasser eintritt?
3. Wie groß ist der für die Änderung der Ordnung erforderliche Teil der Verdampfungsenthalpie, also die Austrittsarbeit für alle Moleküle, wenn das spezifische Volumen von Wasserdampf bei 100 °C und 1013 hPa 1,673 m³/kg beträgt?
4. Wie groß ist die spezifische Enthalpie von Wasserdampf bei 110 °C (c_p von Wasserdampf = $1,84 \cdot 10^3 \text{ J/(kg K)}$)?
5. a) Bei welcher Temperatur siedet Wasser in einem Unterdruckgefäß mit dem Druck 400 hPa?
b) Auf welche Temperatur wird das Wasser in einem Dampfkochtopf erhitzt, wenn der Überdruck im Topf 3300 hPa ist? (Werte für a) und b) aus Bild 2.29 und Tafel 2.30.)
c) Im Topf sind 4 kg Wasser. Wie viel Wasser verdampft beim Öffnen des Topfes, bis sich das Wasser auf 100 °C abgekühlt hat?

2.5 Luftfeuchte

Der Begriff Luftfeuchte ist im allgemeinen Sprachgebrauch nicht sehr präzise. Man bezeichnet mit ihm den Anteil an Wasserdampf im luftgefüllten Raum. Für Mensch und Material ist dieser Anteil von erheblicher Bedeutung. Deshalb spielen die folgenden Definitionen und Messmethoden nicht nur in der Klimatechnik eine große Rolle.

Unser Luftraum enthält außer Luft immer auch Wasserdampf. Der z.B. mit einem Barometer gemessene „Luft“-Druck wird nicht nur durch die Stickstoff- und Sauerstoffmoleküle der Luft verursacht, sondern auch mehr oder minder durch die im Raum enthaltenen Wassermoleküle (s. hierzu auch Dampfdruck des Wassers Abschn. 2.4.5.2 und 2.4.5.4).

Wegen der Temperaturabhängigkeit des Sättigungsdampfdruckes gibt es bei jeder Temperatur eine Höchstmenge Wasserdampf, die in einer bestimmten Luftmenge maximal enthalten sein kann.

Meist ist die Luft jedoch nicht mit Wasserdampf gesättigt. Im Falle der Sättigung ist der Partialdruck des Wasserdampfes im Wasserdampf-Luft-Gemisch gleich dem Sättigungsdampfdruck des Wassers bei der betreffenden Temperatur.

Absolute und relative Luftfeuchte

Definitionen:

$$\text{Absolute Luftfeuchte} = \frac{\text{Masse des in der Luft enthaltenen Wasserdampfes}}{\text{Volumen der feuchten Luft}} \quad \varphi = \frac{m_D}{V_L}$$

$$\text{Relative Luftfeuchte} = \frac{\text{Masse des in der Luft enthaltenen Wasserdampfes}}{\text{Masse des Wasserdampfes bei Sättigung}} \quad \varphi_{\text{rel}} = \frac{m_D}{m_{\text{max}}}$$

Die relative Feuchte ist demnach das Verhältnis aus tatsächlich enthaltener zur maximal möglichen Masse des Wasserdampfes in Luft. Sie heißt auch Sättigungsgrad. Gleichwertig ist folgende

Definition:

Relative Luftfeuchte = $\frac{\text{Partialdruck des Wasserdampfes}}{\text{Sättigungsdampfdruck des Wasserdampfes bei der betreffenden Temperatur}}$

$$\varphi_{\text{rel}} = \frac{p_D}{p_S} \quad (2.52)$$

Wenn sich mit Wasserdampf gesättigte Luft abkühlt, kondensiert der Dampf an festen Oberflächen zu Wasser, es bildet sich Tau.

Die Temperatur, bei der bei Abkühlung der Luft Taubildung eintritt, heißt Taupunkt.

Kondensation ohne Festkörper, so genannte Nebelbildung, tritt jedoch erst nach einer gewissen, mehr oder weniger großen Unterkühlung ein, d.h., der Wasserdampf wird übersättigt, da die Kondensation die Möglichkeit einer Tröpfchenbildung voraussetzt (vgl. Unterkühlung einer Schmelze).

Diese Tröpfchenbildung wird aber erst durch das Zusammentreten sehr vieler Moleküle möglich. Bei Anwesenheit von Kondensationskernen dagegen, etwa in Form von Staub, tritt die Tropfenbildung augenblicklich ein.

Messung der Luftfeuchte

Taupunktmethode. Eine Spiegelfläche wird in der Luft abgekühlt, bis sich auf ihr Wasser niederschlägt (Taupunkt). Dann ist die in der Luft enthaltene Wasserdampfmenge gleich der maximal möglichen (Sättigung) bzw. der Partialdruck p_D des Wasserdampfes ist gleich dem Sättigungsdampfdruck. Seinen Wert erhält man mit Hilfe der zugehörigen (Spiegel-) Temperatur, ebenso den Sättigungsdampfdruck p_S des Wasserdampfes für die gemessene Lufttemperatur (vgl. Tafel 2.34 und Aufgabe 2 zu Abschn. 2.5). Aus beiden Werten errechnet man dann nach Gl. (2.52) die relative Luftfeuchte. Diese Methode wird vor allem zur Kalibrierung verwendet.

Psychrometer. Die Kugel eines Thermometers wird mit einem feucht gehaltenen Lappen umwickelt. Durch Verdunsten kühlt es sich ab, bis der Partialdruck des Wasserdampfes gleich dem zu dieser Temperatur gehörenden Sättigungsdampfdruck ist. Ein zweites – „trockenes“ – Thermometer zeigt die Temperatur der Luft an.

Tafel 2.34 Sättigungsdampfdruck p_S des Wasserdampfes in hPa und absolute Feuchte bei Sättigung φ_S in g/m^3 für verschiedene Temperaturen ϑ in $^{\circ}\text{C}$

ϑ	-30	-20	-10	0	10	20	30
p_S	0,37	1,03	2,62	6,11	12,3	23,2	42,1
φ_S	0,33	0,88	2,15	4,84	9,4	17,2	30,1

Tafel 2.35 Lösungen zum Einstellen bestimmter relativer Luftfeuchten bei 20 °C

Masseanteil H ₂ SO ₄ in %	80	70	60	50	40	30	20	10	0
Relative Luftfeuchte in %	2	5	17	35	56	75	87	97	100
Gesättigte Lösung des Salzes	CaCl ₂		Ca(NO ₃) ₂			NaCl		KCl	PHO ₂
Relative Luftfeuchte in %	35		54			75		85	10

Das feuchte Thermometer kühlt sich umso mehr ab, je trockener die Luft ist. Die zum Verdunsten erforderliche Wärme wird vor allem dem Thermometer entzogen. Die Temperaturdifferenz ΔT der beiden Thermometer ist ein Maß für die relative Luftfeuchte.

Haarhygrometer. Die Länge so genannter hygroskopischer Stoffe (entfettetes Haar, Kunststoffe) ändert sich mit der Feuchtigkeit. Die hierauf beruhenden Hygrometer zeigen nach Kalibrierung (z.B. durch den Taupunktspiegel) die relative Feuchtigkeit an.

Absorptionsmethode. Getrocknete hygroskopische Stoffe wie Chlorkalzium entziehen der Luft den Wasserdampf. Durch Wägung kann die absolute Feuchtigkeit des Raumes, dem der Dampf entzogen worden ist, ermittelt werden.

Die absolute Feuchte und den Sättigungsdruck für einige Temperaturwerte zeigt Tafel 2.34. Über wässrigen Lösungen mit Wasser-Dampfdrücken, die vom gelösten Stoff und dessen Konzentration abhängen, stellen sich bestimmte relative Feuchten ein. Hierfür eignen sich H₂SO₄-Lösungen oder gesättigte Salzlösungen (s. Tafel 2.35). So stellt sich über einer Flüssigkeit, die zu 80% aus H₂SO₄ und 20% Wasser besteht, bei 20 °C die relative Luftfeuchte 2% ein. Die Anwendung bei empfindlichen elektronischen Schaltungen wird nicht empfohlen.

Anwendungen. In unterkühltem Dampf bilden sich Nebeltröpfchen an Kondensationskernen, z.B. an Staubteilchen oder Ionen. In der so genannten Wilsonschen Nebelkammer werden dadurch geladene Teilchen nachgewiesen und ihre Bahn sichtbar gemacht (s. Abschn. 6.2.2.1). Kühlung durch Verdunstung ist umso wirksamer, je trockener die Luft ist. Messung und Regelung der Luftfeuchte spielen in vielen Industriezweigen und auch in der Wohnkultur eine zunehmende Rolle (Klimatechnik). Der Feuchtegehalt der Luft hat neben der Formveränderung (Quellen, Verziehen) auch auf die Beschaffenheit von Oberflächen (Korrosion) Einfluss.

Aufgaben zu Abschn. 2.5

1. Wie groß ist die relative Luftfeuchte in einem geheizten ($\vartheta = 20$ °C), mit der Außenwelt in Luftwechsel stehendem Raum, wenn sie außerhalb bei der Temperatur -10 °C 85% beträgt?
2. Kühlt man einen Metallspiegel von der Lufttemperatur 30 °C ab, so beschlägt er bei 20 °C. Wie groß ist die relative Luftfeuchte?

2.6 Transportvorgänge

Wenn sich zwei Körper mit verschiedenen Temperaturen berühren, so stellt sich nach einer bestimmten Zeit Temperaturgleichheit, also thermisches Gleichgewicht, ein. Das Gleiche kann eintreten – jeweils nach unterschiedlichen Zeitspannen –, wenn die Körper durch ein Gas oder Vakuum voneinander getrennt sind. In allen Fällen muss Wärme vom Körper

höherer Temperatur auf den niedrigerer Temperatur übergehen. Dieser Wärmeübergang oder -transport beruht auf recht verschiedenartigen Vorgängen, von denen oft einer überwiegt. Diese Vorgänge sowie die Diffusion werden in den folgenden Abschnitten behandelt.

2.6.1 Konvektion oder Wärmeströmung

□ **Versuch 12.** Bringt man in ein wassergefülltes ringförmiges Glasrohr (Bild 2.36) durch die Öffnung 1 etwas Farbstoff, so breitet sich dieser nur langsam aus. Erwärmt man jedoch das Glasrohr etwa an der Stelle 2, so setzt sogleich eine starke Zirkulation des Wassers ein (Pfeile), die durch die schnelle Verteilung des Farbstoffes zu verfolgen ist. An der Stelle 3 kühlen wir so, dass der Temperaturunterschied $dT = T_2 - T_3$ zwischen 2 und 3 konstant bleibt. □

Das bei 2 erwärmte Wasser dehnt sich aus und erfährt wegen seiner gegenüber dem kälteren Wasser geringeren Dichte einen Auftrieb. Umgekehrt sinkt es nach Abgabe der Wärme an einen kälteren Körper bei 3 wieder nach unten. Führt man bei 2 z.B. durch eine elektrische Heizvorrichtung den konstanten, so genannten Wärmestrom $I_W = dQ/dt$ zu, so wird durch das strömende Wasser der Energiestrom

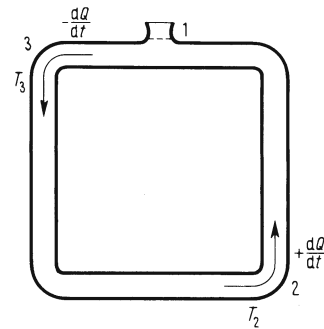


Bild 2.36 Versuch zur Demonstration der Konvektion

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{dm}{dt} c dT \quad (2.53)$$

vom Ort der Erwärmung 2 wegtransportiert. Dabei ist $dm/dt = \rho Av$ mit der Dichte ρ , dem Querschnitt A und der Geschwindigkeit v der Flüssigkeit. Die Energie gelangt (unter Vernachlässigung von Verlusten) zur Stelle 3, wo der gleiche Wärmestrom wie bei 2 wieder abgeführt wird.

Definition: Die in Flüssigkeiten und Gasen durch Temperatur- und damit Dichteunterschiede verursachte Strömung heißt freie Konvektion. Dabei wird Energie transportiert. Wird die Bewegung des zum Energietransport dienenden Stoffes vorwiegend durch äußere Kräfte, z.B. durch eine Pumpe oder einen Ventilator, bewirkt, so spricht man von erzwungener Wärmeströmung oder erzwungener Konvektion.

Wärmeübergang

Wenn Gase oder Flüssigkeiten am Wärmetransport beteiligt sind, so ist die Wärmeübertragung von diesen auf die Begrenzungsfläche eines festen Körpers und umgekehrt ausschlaggebend für die übertragbare Wärmeenergie. Man nennt diese Wärmeübertragung Wärmeübergang. Viele Einflussgrößen machen den Wärmeübergang schwer berechenbar.

Der Wärmestrom beim Wärmeübergang hängt von der Temperaturdifferenz ΔT zwischen Wand und strömendem Medium, der Berührungsfläche A und einer Wärmeübergangszahl α ab:

$$dQ/dt = \Delta T \alpha A$$

Für Übergänge Luft–Wand liegen die experimentell ermittelten Werte für α zwischen $5 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$ und $1,5 \cdot 10^3 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$, für solche zwischen Flüssigkeiten und Wand zwischen $5 \cdot 10^2 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$ und $1,5 \cdot 10^4 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$.

Anwendungen. Auf Konvektion beruhen zum großen Teil die Energietransporte im täglichen Leben und der Technik. Bei Heizungsanlagen wird die Wärme meist durch erzwungene Konvektion des Wassers vom Kessel (in dem die Erwärmung ebenfalls durch Konvektion, aber auch durch Strahlung und Wärmeleitung geschieht) zu den Heizkörpern übertragen. Vorbeiströmende Luft übernimmt die Energie und verteilt sie durch freie Konvektion im Raum. Warmluftheizungen beruhen auf der freien oder erzwungenen Konvektion erwärmter Luft. Andere Beispiele sind der Kühlkreislauf in einem Kraftfahrzeug oder die Gegenstromkühlung im Lindeverfahren (Abschn. 2.4.4.3). Zur Verhinderung von Wärmetransport durch Konvektion umgibt man Körper mit Kleidung oder schützenden Gehäusen. Da stark verdünnte Gase kaum Wärme durch Konvektion übertragen können, werden die zur Wärmeisolation dienenden Dewargefäße (Thermosflaschen) evakuiert. Zwischen zwei nahe beieinander liegenden Scheiben erfährt die Luft schon bei kleinen Geschwindigkeiten einen so großen Strömungswiderstand, dass keine nennenswerte Konvektion zustande kommt (Doppelverglasung zur Wärmeisolation).

2.6.2 Wärmeleitung

□ **Versuch 13.** Taucht man das Ende eines Aluminiumstabes mit der Hand in heißes Wasser, so spürt man nach wenigen Sekunden, dass sich der Stab bis zum anderen Ende erwärmt hat. Wenn man den gleichen Versuch mit einem Glasstab gleicher Abmessungen durchführt, kann man erst nach längerer Zeit eine geringe Erwärmung feststellen. □

Der Versuch 13 mit festen Stoffen zeigt, dass, auch wenn die Molekeln sich nicht fortbewegen, Wärme durch den Körper transportiert werden kann. Die Molekeln höherer Energie übertragen Energie auf diejenigen niedrigerer Energie. Die Energie wandert durch den Körper.

Definition: Wird Wärme innerhalb eines Stoffes von Teilchen zu Teilchen fortgeleitet, ohne dass die Teilchen selbst transportiert werden, so nennt man den Vorgang Wärmeleitung.

Da die Energieübertragung zwischen den Molekeln aller Stoffe möglich ist, tritt Wärmeleitung auch in allen Aggregatzuständen auf. Sie wird jedoch beim Auftreten von Konvektion oft durch diese überdeckt, weshalb sie in Flüssigkeiten oder Gasen schlecht zu beobachten ist.

Versuch 13 hat schon gezeigt, dass die Wärmeleitung von der Art des Stoffes abhängt. Weitere Versuche ergeben, dass sie ebenso vom Querschnitt und der Länge wie von der Temperaturdifferenz dT zwischen Anfang und Ende des Wärmeleiters abhängig ist. Wenn durch Wärmeleitung zwischen zwei Körpern deren Temperatur nicht geändert wird, was z.B. durch entsprechende Wärmespeicher erreicht werden kann, so nennt man die Wärmeleitung stationär. Allgemein gilt:

Die in der Zeit dt durch die Fläche A hindurchtretende Wärme dQ ist der Fläche A und der auf der Länge dl herrschenden Temperaturdifferenz dT proportional

$$\frac{dQ}{dt} = -\lambda A \frac{dT}{dl} \quad (2.54)$$

Die Wärme strömt immer in Richtung fallender Temperatur. Damit ist das Temperaturgefälle negativ. Wir berücksichtigen dies durch das negative Vorzeichen in Gl. (2.54). λ heißt die Wärmeleitfähigkeit eines Stoffes. Sie ist bei nicht zu großen Temperaturunterschieden von der Temperatur unabhängig.

Die Messung der Wärmeleitfähigkeit ist schwierig. Bei Metallen genügt oft eine Messung der elektrischen Leitfähigkeit, die nach dem Wiedemann-Franz'schen Gesetz (Abschn. 3.2.2.2) bei nicht zu tiefer Temperatur erstaunlicherweise der Wärmeleitfähigkeit proportional ist. Die Wärmeleitfähigkeit einiger technisch wichtiger Stoffe zeigt Tafel 2.37. Man beachte, dass die Wärmeleitfähigkeit mancher Stoffe stark vom Feuchtigkeitsgehalt abhängt. In Mauerwerk z.B. steigt bei Unterschreiten des Taupunktes mit sinkender Temperatur die Wärmeleitung stark an.

Tafel 2.37 Wärmeleitfähigkeit λ in W/(m K) einiger technisch wichtiger Stoffe bei +20 °C

Silber	421	Wasser	0,58
Kupfer	384	Ziegelmauer	0,35...0,9
Aluminium	209	Glaswolle	0,04
Chromstahl	20...40	Kork	0.035...0,06
Eis (0 °C)	2,23	Luft (trocken)	0,034
Beton	0,8...1,3	Hartschaum	0,035
Glas	≈ 0,7	Superisolierung ¹⁾	0,0001

Gl. (2.54) schreibt man oft in Anlehnung an das Ohmsche Gesetz der Elektrizitätslehre als das so genannte Ohmsche Gesetz für Wärmeleitung

$$P_w = I_w = -\frac{dQ}{dt} = \frac{\Delta T}{R_w}$$

Dabei ist P_w die übertragene Wärmeleistung, I_w der so genannte Wärmestrom und $R_w = dl/(\lambda A)$ der so genannte Wärmewiderstand. Eine Anwendung gibt z.B. Aufgabe 1 zu Abschn. 2.6. Für „hintereinandergeschaltete“ Wärmeübertragungstrecken gilt

$$R_w = R_{w1} + R_{w2} + \dots + R_{wN}.$$

Anwendungen. Diamant, Kupfer und Silber haben die besten Wärmeleitfähigkeiten aller Festkörper. Mit einem Trick, der die großen Verdampfungswärmen (s. Abschn. 2.4.5.2) von Flüssigkeiten ausnützt, arbeiten die so genannten Wärmerohre (engl. heat pipes). Sie bestehen aus geschlossenen Metallrohren, in denen sich etwas Flüssigkeit befindet. Diese verdampft am heißen Ende. Der Dampf kondensiert unter Abgabe der Verdampfungswärme am kalten Ende. Die kondensierte Flüssigkeit fließt dann bei geeigneter Innenauskleidung des Rohres wieder zum heißen Ende des Rohres zurück. Dadurch wird, ähnlich wie in einer Dampfheizung, ein kontinuierlicher Wärmetransport aufrecht erhalten. Mit

¹⁾ Glasseidengewebe mit geknitterter Alufolie; Wert gilt für 0 °C.

solchen Rohren, die es für Temperaturen zwischen -200 °C und $+1500\text{ °C}$ gibt, erreicht man bei minimalen Temperaturdifferenzen einen um 3 bis 4 Größenordnungen höheren Wärmetransport als mit Stäben gleicher Abmessungen aus Silber oder Kupfer. Außerdem bilden Wärmerohre ein Wärmeventil, das den Wärmetransport überwiegend in einer Richtung ermöglicht.

Die Wärmeleitung ist an fast allen Wärmetransporten beteiligt. Das Heißwasser einer Heizung bekommt die Wärme von der Kesselwand (Wärmeübergang) und gibt sie in einem Wärmeübergang an die Innenwand des Heizkörpers ab. In diesem wird sie durch Wärmeleitung an die Außenwand transportiert, wo ein weiterer Wärmeübergang, nämlich zur Raumluft stattfindet. Eine solche Kette von Wärmeübergängen und Wärmeleitung nennt man Wärmedurchgang.

Wärmedurchgangskoeffizient k . Durch eine Wand geht der Wärmestrom $I_W = kA\Delta T$. Der in dieser Gleichung auftretende Proportionalitätsfaktor k heißt Wärmedurchgangskoeffizient. Dieser setzt sich aus den Übergangskoeffizienten α und den Leitfähigkeiten λ auf den Strecken s_i zusammen:

Wärmedurchgangskoeffizient k . Durch eine Wand geht der Wärmestrom $I_W = kA\Delta T$. Der in dieser Gleichung auftretende Proportionalitätsfaktor k heißt Wärmedurchgangskoeffizient. Dieser setzt sich aus den Übergangskoeffizienten α und den Leitfähigkeiten λ auf den Strecken s_i zusammen:

$$\frac{1}{k} = \sum_{i=1}^K \frac{1}{\alpha_i} + \sum_{i=1}^L \frac{s_i}{\lambda_i} = \sum_{i=1}^K \frac{1}{\alpha_i} + A \sum_{i=1}^L R_{wi}$$

Für eine zweischichtige Wand (Bild 2.38) z.B. ergibt sich

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{s_1}{\lambda_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{s_2}{\lambda_2} + \frac{1}{\alpha_3}$$

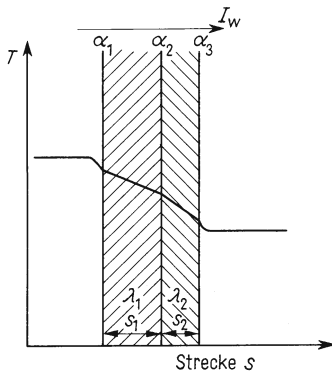


Bild 2.38 Wärmestrom I_W und Temperaturverlauf in einer zweischichtigen Wand

2.6.3 Strahlung

Dass Wärme auch von einem Körper auf einen anderen übertragen werden kann, wenn sich keinerlei Stoffe zwischen beiden befinden, kann jeder am Beispiel der Sonne leicht beobachten, deren Energie durch das Vakuum des Weltraums zu uns gelangt. Dabei beruht die Erwärmung eines Körpers auf der Aufnahme oder Absorption der von der Sonne ausgehenden Strahlung. Man nennt diese Art von Wärmeübergang meist Wärmestrahlung.

Den Wärmeaustausch, der auch stattfindet, wenn mangels stofflicher Verbindung keine Wärmeleitung oder Konvektion zwischen den Körpern auftreten kann, nennt man Wärmetransport durch Strahlung. Jeder Körper strahlt, und zwar umso stärker, je höher seine Temperatur ist.

Die Natur dieser Strahlung wird in Abschn. 5.2.5.4 behandelt. Zwei Versuche sollen die Größen aufzeigen, die Abstrahlung und Absorption beeinflussen.

□ **Versuch 14a.** Ein Blechwürfel ist mit heißem Wasser gefüllt. Seine vier quadratischen, senkrecht stehenden Seiten haben verschiedene Oberflächen, eine mattschwarz, eine frisch weiß gestrichen, eine matt- und eine hochglanzvernickelt. Die von den Flächen emittierte Strahlung kann mit dem berußten Glaskolben eines Gasthermometers oder einem für Wärmestrahlung empfindlichen Strahlungsempfänger mit Anzeigeelement (Galvanometer) gemessen werden. Man stellt fest, dass die schwarze Oberfläche am stärksten, die

hochglänzende am schwächsten strahlt; die beiden anderen liegen mit etwa gleichen Werten in der Mitte. Ist die weiße Fläche alt oder verschmutzt, so strahlt sie ähnlich der mattschwarzen. Die Strahlung hängt außerdem stark von der Temperatur des Strahlers ab und ist der Fläche des Strahlers proportional, was man durch teilweises Abdecken des Würfels zeigen kann. □

Quantitative Versuche ergeben:

Die pro Zeit abgestrahlte Energie, d.h. die Strahlungsleistung, eines Körpers hängt von der Beschaffenheit der strahlenden Fläche, ihrem Betrag und ihrer Temperatur ab.

□ **Versuch 14b.** Wenn man den Glaskolben des Gasthermometers nicht beruht, sondern mit Stanniol beklebt, so zeigt das Thermometer eine geringere Temperatur an. □

Auch die Absorption der Strahlung hängt von der Beschaffenheit der Oberfläche des absorbierenden Körpers ab.

Definition: Wir bezeichnen einen strahlungsundurchlässigen Körper, der die gesamte auftreffende Strahlung absorbiert – also keine Strahlung reflektiert –, als „schwarzen Körper“.

Dies geschieht in Anlehnung an die Begriffsbildung im täglichen Leben, wo man einen Stoff, der die sichtbare Strahlung – das Licht – nahezu völlig schluckt, schwarz nennt. Umgekehrt ist ein Körper, der die ganze Strahlung reflektiert, also nichts absorbiert, ein „weißer Körper“. Körper zwischen diesen beiden, jeweils nur annähernd realisierbaren Grenzzuständen nennt man „grau“¹⁾. Ein „schwarzer Körper“ ist auch ein idealer Strahler. Wäre er das nicht, würde er von der Umgebung mehr Energie aufnehmen, als er emittiert, und sich so dauernd erwärmen, was der Erfahrung widerspricht. Umgekehrt emittiert ein „weißer Körper“ keine Strahlung. Um die emittierte und absorbierte Strahlungsleistung quantitativ erfassen zu können, führen wir die Größen „Emissionsgrad“ und „Absorptionsgrad“ ein:

Definition: Das Verhältnis aus der von der Fläche A pro Zeit abgestrahlten Energie zu der von der gleichen Fläche eines schwarzen Körpers bei gleicher Temperatur pro Zeit abgestrahlten Energie nennt man den Emissionsgrad ε eines Körpers.

Als Absorptionsgrad α bezeichnet man das Verhältnis aus absorbierter Strahlungsenergie und auffallender Strahlungsenergie.

Für den „schwarzen Körper“ ist $\alpha = 1$ und $\varepsilon = 1$, für einen weißen $\alpha = 0$ und ebenso $\varepsilon = 0$, für graue Körper liegt α zwischen 0 und 1, und der Emissionsgrad nimmt in gleichem Verhältnis zu; denn hier gilt, wie schon oben gesagt, dass diese Körper nicht mehr Energie aufnehmen können, als sie emittieren.

Der Emissionsgrad eines Körpers ist gleich seinem Absorptionsgrad (Kirchhoffsches Strahlungsgesetz).

¹⁾ Ein Körper ist allerdings nur dann in diesem physikalischen Sinne grau, wenn er alle Wellenlängen (s. Abschn. 5.2.5.5) gleichmäßig absorbiert.

Da ein Körper nur den Anteil α der auf ihn eingestrahlten Energie absorbieren kann, muss der restliche Anteil $\varrho = 1 - \alpha$ reflektiert werden: Die Summe aus Absorptionsgrad und Reflexionsgrad ist demnach gleich 1.

Definition: Als Reflexionsgrad ϱ bezeichnet man das Verhältnis aus reflektierter und auffallender Strahlungsenergie.

Ein „schwarzer Körper“ emittiert mehr Strahlung als irgendein anderer Körper bei der gleichen Temperatur. Die Öffnung eines innen geschwärzten und zur Verminderung von Reflexionen mit Lamellen versehenen Rohrs, das z.B. elektrisch geheizt werden kann, strahlt und absorbiert in sehr guter Näherung wie ein „schwarzer Körper“. Annähernd so strahlt auch die Sonne ($T \approx 6 \cdot 10^3$ K). Ein „schwarzer Körper“ ist also unter Umständen alles andere als das, was wir in der Umgangssprache schwarz nennen. Aus Experimenten ergibt sich:

Die pro Zeit von der Fläche A abgestrahlte Energie, die Strahlungsleistung P_S eines „schwarzen Körpers“ ist der Fläche A und der 4. Potenz der absoluten Temperatur T proportional (Gesetz von Stefan und Boltzmann).¹⁾

$$P_S = \sigma A T^4 \quad (2.55)$$

Die Proportionalitätskonstante ist $\sigma = 5,670 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$.

Dieses Gesetz gilt nur für den vollkommen „schwarzen Körper“. Als solches ist es auch theoretisch herleitbar, so dass σ nur aus verschiedenen Naturkonstanten besteht: $\sigma = 2\pi^5 k^4 / (15 h^3 c_0^3)$, wobei k die Boltzmannkonstante, h die Plancksche Konstante (s. Abschn. 6.1.1.2) und c_0 die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit ist. Die Verteilung der Strahlungsintensität eines „schwarzen Strahlers“ über die Wellenlänge wird in Abschn. 5.2.5.5 beschrieben. Das dort eingeführte Wiensche Verschiebungsgesetz (Gl. (5.88)) gibt an, dass die am stärksten abgestrahlte Wellenlänge der thermodynamischen Temperatur umgekehrt proportional ist.

Ein strahlender „schwarzer Körper“ mit der Temperatur T_1 absorbiert aber gleichzeitig die von der Umgebung mit der Temperatur T_2 auf ihn eingestrahlte Leistung $P_{S2} = A \sigma T_2^4$.

So ist die effektiv abgestrahlte Leistung eines „schwarzen“ Körpers

$$\Delta P_S = \sigma A (T_1^4 - T_2^4) \quad (2.56)$$

Für einen „grauen“ Körper ist $\Delta P_S = \varepsilon \sigma A (T_1^4 - T_2^4)$. ε liegt zwischen 0 und 1.

Beispiel 7. Ein „schwarzer Körper“ hat die Oberfläche $A = 1 \text{ cm}^2$ und die Temperatur $T_1 = 373 \text{ K}$. Bei der Umgebungstemperatur $\vartheta = 20 \text{ °C}$ strahlt er $6,76 \cdot 10^{-2} \text{ W}$ ab. Ist er jedoch nicht „schwarz“, sondern reflektiert er 20%, so kann er nur 80% absorbieren. Da sich das Absorptionsvermögen wie das Emissionsvermögen verhält, emittiert er – wenn er strahlt – auch nur 80% der Leistung, das sind $5,41 \cdot 10^{-2} \text{ W}$.

¹⁾ J. Stefan (1835 bis 1893), L. Boltzmann (1844 bis 1906).

Anwendungen. Raumheizungen sollen neben der Konvektion immer einen Strahlungsanteil aufweisen. Reine Strahlungsheizungen verwendet man, wenn in großen Räumen nur bestimmte Objekte erwärmt werden sollen, welche die Strahlung absorbieren. Auch bei der Zubereitung von Speisen ist die berührungslose Erhitzung durch Strahlung (Grill) verbreitet. Bei Vorrichtungen, die durch Abstrahlen kühlen oder die Abstrahlung verhindern sollen, muss auf geeignete Oberflächenbeschaffenheit geachtet werden. So färbt man Strahlungs-Kühlflächen (z.B. Anoden von Senderöhren) schwarz und versilbert die Wandungen der Thermosflaschen. Wenn man z.B. zur Verbesserung der Kühlung durch Wärmestrahlung die Wolframanode einer Röntgenröhre mit Molybdän überzieht, erreicht man eine Erhöhung des Emissionsgrades von $\varepsilon_W = 0,3$ auf $\varepsilon_{MO} = 0,8$. Solarkollektoren dienen zur Umwandlung der Energie der absorbierten Sonnenstrahlung in Wärme (z.B. Brauchwassererwärmung). Ihr Wirkungsgrad kann durch selektive Absorptionsschichten (z.B. Kobaltsulfid auf Metall) erhöht werden, die im Bereich des Sonnenspektrums ($\lambda \approx 0,4 \dots 0,2 \mu\text{m}$) stark absorbieren ($\alpha \approx 0,97$), im fernen Infraroten ($\lambda = 6 \dots 40 \mu\text{m}$) jedoch nur gering absorbieren und damit auch gering emittieren ($\varepsilon = 0,05$ bei einer Kollektortemperatur um 90°C). Siehe hierzu Abschn. 5.2.5.5, Emission eines schwarzen Strahlers. Die Energiestromdichte oder Intensität der Sonnenstrahlung auf der Erdoberfläche beträgt maximal etwa 1 kW/m^2 .

2.6.4 Diffusion

Neben den in Abschn. 2.6.1 bis 2.6.3 behandelten Energietransportvorgängen gibt es bei Dichteunterschieden auch Teilchentransportvorgänge. Sie werden in diesem Abschnitt dargestellt.

□ **Versuch 15.** Ein poröser Tonzylinder 1 geht in ein Glasrohr mit einem Manometer 2 über (Bild 2.39). In den Poren des Zylinders 1 befindet sich Luft. Wir stülpen nun ein Becherglas 3 über den Tonzylinder und lassen aus einem Schlauch 4 Wasserstoffgas unter das Becherglas strömen. Sogleich erhöht sich der Druck im Tonzylinder und sinkt kurz darauf wieder auf den ursprünglichen Stand. Wenn wir den Schlauch 4 und das Becherglas 3 wegnehmen, sinkt der Druck vorübergehend und steigt wenig später auf den alten Stand. □

Wir wollen den Versuch deuten: Zunächst befinden sich im Zylinder keine H_2 -Moleküle. Diese dringen jedoch ein, sobald wir das Gas in das Becherglas strömen lassen. Durch die regellose Wärmebewegung der Moleküle gelangen mehr hinein als heraus, da die H_2 -Dichte im Zylinder geringer ist als außerhalb. Genau so verhält es sich mit den vorhandenen Luftmolekülen (O_2 und N_2). Da nach der kinetischen Wärmetheorie (Abschn. 2.3.1) die O_2 - oder N_2 -Moleküle im Mittel viel langsamer sind als die H_2 -Moleküle, sind beim Einleiten des Wasserstoffs vorübergehend mehr Moleküle im Tonzylinder, was zu dem angezeigten Überdruck führt. Beim Wegnehmen des Becherglases, d.h. beim Wegnehmen der (Wasserstoff + Luft)-Atmosphäre gelangen die H_2 -Moleküle aus dem gleichen Grund schneller heraus als die Luftmoleküle hinein, was durch den Unterdruck deutlich wird.

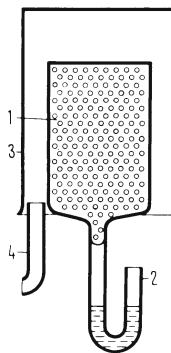


Bild 2.39 Versuch zur Diffusion

Der Versuch 15 bringt zwei wichtige Ergebnisse:

1. Den Beweis für die tatsächliche Existenz der Moleküle, da der Versuch makroskopisch nicht erklärbar ist.
2. Den Beweis, dass Moleküle verschiedener Massen verschiedene Geschwindigkeiten haben.

Definition: Wir nennen den Teilchentransport, der zwischen Bereichen unterschiedlicher Teilchendichte gleichartiger Teilchen durch die thermische Bewegung dieser Teilchen erfolgt, Diffusion.

Werden die Unterschiede der Teilchendichten durch die Diffusion nicht geändert, dann nennt man die Diffusion stationär. Versuche ergeben:

Die Anzahl der pro Zeit dt durch einen bestimmten Querschnitt A hindurchdiffundierenden Teilchen dN eines Stoffes ist der Fläche A und dem Unterschied der Teilchenzahldichte dn längs der Strecke ds proportional

$$\frac{dN}{dt} = -DA \frac{dn}{ds} \quad \text{erstes Ficksches Gesetz}^1) \quad (2.57)$$

Der Proportionalitätsfaktor D ist der so genannte Diffusionskoeffizient.

Wir bestimmen ihn am Beispiel der Diffusion von Gasen. Die Diffusion erfolgt auf Grund der thermischen Bewegung der Teilchen, die bei Zusammenstößen Energie und Impuls übertragen. Die Teilchen diffundieren bei konstantem Konzentrationsgefälle mit gleichbleibender mittlerer Geschwindigkeit. Diese Diffusionsgeschwindigkeit oder Driftgeschwindigkeit ist sehr klein gegenüber der mittleren thermischen Geschwindigkeit der Teilchen. Wir beschreiben den Vorgang so, als ob auf die Teilchen eine Kraft in Bewegungsrichtung und in entgegengesetzter Richtung eine gleich große Reibungskraft wirkte. Letztere ist für Kugeln in einem reibenden Medium nach Gl. (1.56) $F = 6\pi \eta r v$.

Definition: Wir nennen den Quotienten aus Driftgeschwindigkeit v_D und Reibungskraft F

$$v_D/F = b \quad (2.58)$$

die Beweglichkeit²⁾ b der Teilchen.

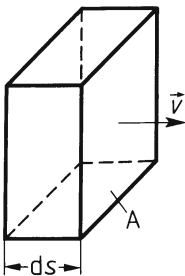


Bild 2.40 Zur Diffusionsgeschwindigkeit

Diese ist mit Gl. (1.56) $b = 1/(6\pi \eta r v)$. Im Volumen $V = A ds$ (Bild 2.40) sind $N = n A ds$ Moleküle. Die Kraft auf alle Teilchen ist dann $F_{\text{ges}} = NF = n dV F = n A ds F$. So entsteht ein Druckgefälle $dp = F_{\text{ges}}/A$ in Diffusionsrichtung, senkrecht zur Fläche A .

Es ist $dp = n ds F$ oder nach der Zustandsgleichung (2.20) für Gase $dp = dn kT$. Eingesetzt erhalten wir für $F = \frac{dn kT}{n ds}$. Mit Gl. (2.58) ist dann die Diffusionsgeschwindigkeit $v_D = \frac{bkTdn}{nds}$, und da die Zahl der durch

¹⁾ A. Fick (1829 bis 1901).

²⁾ Bei elektrisch geladenen Teilchen ist $b = v/E$, s. Abschn. 3.2.2.1.

die Fläche A in der Zeit dt hindurchdiffundierenden Teilchen $\frac{dN}{dt} = n A v_D$ ist, ergibt sich $\frac{dN}{dt} = b k T A \frac{dn}{ds}$ und daraus der

Diffusionskoeffizient

$$D = b k T \quad (2.59)$$

Diffusion tritt sowohl in Gasen wie in Flüssigkeiten und festen Körpern auf. Auch in diesen Fällen gilt Gl. (2.59), wie hier nicht bewiesen werden kann. Am deutlichsten macht sich die Diffusion wegen der großen Beweglichkeit der Moleküle bei Gasen bemerkbar, wo die Diffusionsgeschwindigkeiten beim Normzustand um 10^{-6} m/s liegen. Bei Flüssigkeiten und festen Stoffen sind diese von der Größenordnung 10^{-7} m/s.

Anwendungen. Die Durchmischung von Flüssigkeiten sowie Lösungsvorgänge laufen ohne äußere Einwirkung allein mit Hilfe der Diffusion ab. Behindert man die Durchmischung durch eine Trennwand, die nur die eine Komponente hindurchlässt (semipermeable Wand), so entsteht ein so genannter osmotischer Druck. Dieser Vorgang – Osmose genannt – spielt in tierischen und pflanzlichen Organismen eine Rolle. In der Vakuumtechnik wird die Diffusion zum Pumpen ausgenutzt.

Andererseits stört bei sehr hohem Vakuum die Diffusion von Molekülen durch die Gefäßwände. Das Verhalten und die Behandlung von Oberflächen wird wesentlich durch Diffusionsvorgänge mitbestimmt. Korrosion, Verzunderungs- und Anlaufvorgänge gehen unter Diffusion der Reaktionspartner vor sich. Bei der Entkohlung von Eisen diffundiert der Kohlenstoff aus dem Eisen heraus oder bei der Aufkohlung hinein. Weitere Beispiele sind Diffusionsvorgänge an den Elektroden und im Elektrolyten bei elektrischer Leitung in Flüssigkeiten.

Die durch Temperaturunterschiede hervorgerufene so genannte Thermodiffusion wird u.a. zur Isotopentrennung ausgenutzt. Von besonderer Bedeutung ist die Diffusion für die Festkörperphysik und deren Anwendungen. In der Halbleitertechnik werden Sperrschichten und Kontakte dadurch erzeugt, dass man Fremdstoffe in die reinen Halbleitermaterialien hineindiffundieren lässt, z.B. für die Herstellung von Dioden, Transistoren und integrierten Halbleiterschaltungen (s. Abschn. 7.4.3).

Aufgaben zu Abschn. 2.6

- Ein Transistor hat die maximal zulässige Sperrschichttemperatur $\vartheta_{\max} = 150$ °C. Der Widerstand zwischen Sperrschicht und Gehäuse ist $R_W = 35$ K/W. Welche maximale Verlustleistung ist bei $\vartheta_G = 80$ °C Gehäusetemperatur zulässig?
- Welche Heizleistung ist für den Ersatz der Wärmeleitungsverluste pro Fläche bei einer 30 cm dicken trockenen Ziegelwand ($\lambda = 0,40$ W/m K) erforderlich, wenn die Außentemperatur -20 °C und die Innentemperatur $+20$ °C ist? Um welchen Betrag steigt der Bedarf bei feuchter Wand ($\lambda = 0,93$ W/m K)?
- Ein Uranstab in einem Kernreaktor hat den Durchmesser 4 cm. Durch Kernumwandlung entsteht im Stab pro Sekunde und Kubikzentimeter die Energie $4,19 \cdot 10^2$ J. Wie groß ist die Temperatur im axialen Bereich des Stabes im stationären Fall bei der Manteltemperatur 360 °C ($\lambda = 84$ J m $^{-1}$ s $^{-1}$ K $^{-1}$)?
- Ein zylindrischer Heizstrahler von 20 cm Länge und 1 cm Durchmesser ist ein grauer Körper mit dem Reflexionsgrad 30% und strahlt die Heizleistung 400 W ab. Welche Temperatur muss er haben?

2.7 Entropie und zweiter Hauptsatz der Wärmelehre

Der erste Hauptsatz der Wärmelehre erlaubt grundsätzlich den Wirkungsgrad 1 für die Umwandlung verschiedener Energieformen. Für die Umwandlung von elektrischer Energie in die innere Energie einer Flüssigkeit mit Hilfe eines Tauchsieders ist dies auch annähernd so. Will man jedoch diese innere Energie in mechanische oder elektrische Energie zurückverwandeln, so ist dies auch im Idealfall – also ohne Berücksichtigung von Verlusten auf Grund mangelhafter technischer Realisierung – nur zu einem meist geringen Anteil möglich.

Für Umwandlungsprozesse sind also die verschiedenen Energieformen keineswegs gleich gut geeignet. Die Geschwindigkeiten der Moleküle weisen in alle Richtungen, sie bilden also eine ungeordnete Bewegung. Deshalb ist die Verwendbarkeit der inneren Energie eingeschränkt. Da Umwandlungsvorgänge ohne Beteiligung innerer Energie nicht möglich sind, gilt für alle Prozesse, dass sogar der ideale Wirkungsgrad kleiner als 1 ist. Dies ist der Inhalt des zweiten Hauptsatzes der Wärmelehre, der auch die Definition einer Größe ermöglicht, die ein Maß für die Umwandelbarkeit darstellt, die so genannte Entropie.

2.7.1 Reversible und irreversible Vorgänge, Entropie

Reversible Vorgänge

Um diese Begriffe verständlich zu machen, beginnen wir mit einem Beispiel aus der Mechanik: Eine auf einer horizontalen ebenen Fläche reibungsfrei rollende Kugel läuft nach elastischem Stoß an einer Wand großer Masse mit dem gleichen Betrag der Geschwindigkeit in umgekehrter Richtung weiter. Das kräftefreie Rollen einer Kugel ist ein umkehrbarer oder reversibler Vorgang. Dieser Vorgang läuft ohne Wärmeaustausch, d.h. ohne Temperaturdifferenzen ab. Ein weiteres Beispiel für reversible Vorgänge sind Schwingungen (Abschn. 5.1). Diese Vorgänge laufen von selbst in umgekehrter Richtung ab, ohne dass Energie zugeführt werden muss.

Definition: Bei einem reversiblen Vorgang kann durch Umkehr der Richtung des Ablaufs ohne Energiezufuhr der Ausgangszustand wiederhergestellt werden.

Da bei den genannten Beispielen wie bei allen Vorgängen in Wirklichkeit Reibung unvermeidlich ist, muss zur Wiederherstellung des Ausgangszustandes Energie zugeführt werden; folglich sind reversible Vorgänge idealisierte Grenzfälle.

Realisierbare Prozesse dagegen sind, zumindest in Teilabschnitten, nicht umkehrbar.

Irreversible Vorgänge

Eine in einem Gefäß rotierende Flüssigkeit kommt ohne äußere Einwirkung unter Erwärmung zur Ruhe. Sie beginnt jedoch nicht unter Abkühlung wieder zu rotieren. Ein plastisch verformter Körper kann nur unter Arbeitsaufwand wieder in seine ursprüngliche Form gebracht werden. Die aus einer offenen Parfümflasche in die Luft diffundierten Moleküle kehren nicht von selbst in die Flasche zurück. Diese Vorgänge sind Beispiele irreversibler Prozesse.

Definition: Vorgänge, bei denen Umkehr und Wiederherstellung des Ausgangszustandes nur unter Arbeitsaufwand möglich ist, nennt man irreversibel.

Irreversible Vorgänge laufen von selbst nur in einer Richtung ab.

So geht die Wärme beispielsweise nur vom heißen Körper auf den mit ihm wärmeleitend verbundenen kalten über, bis beide die gleiche Temperatur haben.

Kreisprozesse

Wenn ein Stoff nach einer Reihe von Zustandsänderungen in den ursprünglichen Zustand zurückgelangt, hat er einen so genannten Kreisprozess durchlaufen. Nach dem Ersten Hauptsatz ist die Änderung der inneren Energie für beliebige Kreisprozesse gleich Null. $\Delta U = \Delta Q - \Delta W = 0$, da die Endtemperatur gleich der Anfangstemperatur ist.

Daher ist die innere Energie zur Unterscheidung zwischen reversiblen und irreversiblen Kreisprozessen nicht geeignet. Wir benötigen dazu eine andere Zustandsgröße. Zu ihrer Herleitung betrachten wir einen speziellen, nach Carnot (1796 bis 1832) benannten Kreisprozess.

Carnotscher Kreisprozess (Bild 2.41).

Zuerst wird einer abgeschlossenen Gasmenge bei der Temperatur T_1 in isothermer Expansion 1–2 die Wärme Q_{12} zugeführt. Dann folgt unter völliger Isolation die adiabatische Expansion 2–3. Darauf wird – nun bei der niedrigeren Temperatur T_2 – in isothermer Kompression 3–4 die Wärme Q_{34} abgeführt und schließlich in adiabatischer Kompression 4–1 der Ausgangszustand erreicht. Da die innere Energie sich beim Kreisprozess nicht ändert, ist die abgegebene Arbeit gleich der gesamten zugeführten Wärme $\Delta W = \Delta Q$.

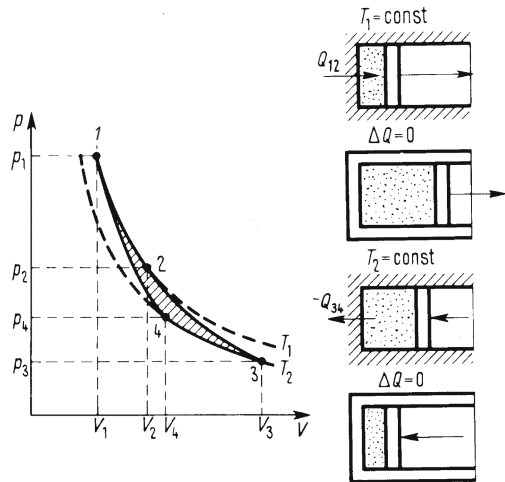


Bild 2.41 Carnotscher Kreisprozess

Die Summe der auf den Adiabatenästen verrichteten Arbeit ist gleich Null: Da nämlich keine Wärme ausgetauscht wird, ändert sich nur $U = f(T)$, und da beide Temperaturänderungen gleich sind, ist $\Delta U_{23} = -\Delta U_{41}$. Also ist

$$W_{23} + W_{41} = \Delta U_{23} + \Delta U_{41} = m c_V (T_2 - T_1) + m c_V (T_1 - T_2) = 0$$

Somit ist die insgesamt beim Kreisprozess vom Gas verrichtete Arbeit mit Gl. (2.42) gleich der auf den Isothermenästen verrichteten Arbeit.

$$W = W_{12} + W_{34} = Q = Q_{12} - Q_{34} = m R_S (T_1 \ln (V_2/V_1) - T_2 \ln (V_3/V_4))$$

Nach Gl. (2.46) ist $T_1/T_2 = (V_3/V_2)^{\kappa-1}$ und $T_1/T_2 = (V_4/V_1)^{\kappa-1}$. Daraus folgt $V_2/V_1 = V_3/V_4$ und $\ln V_2/V_1 = \ln V_3/V_4$. Also ergibt sich schließlich für die Arbeit

$$W = m R_S (T_1 - T_2) \ln (V_2/V_1) \quad (2.60)$$

Bei der isothermen Expansion nimmt das Gas aus einem Vorrat die der Ausdehnungsarbeit W_{12} entsprechende Wärme Q_{12} bei der Temperatur T_1 auf

$$W_{12} = Q_{12} = m R_S T_1 \ln (V_2/V_1) \quad (2.61)$$

Die geringere Wärme Q_{34} wird bei der Temperatur T_2 wieder abgegeben:

$$W_{34} = Q_{34} = m R_S T_2 \ln (V_2/V_1) \quad (2.62)$$

Die im System verbliebene Wärme $Q = Q_{12} - Q_{34}$ ist in die Arbeit W umgewandelt worden. Für eine Wärmekraftmaschine gilt die

Definition: Man nennt den Quotienten aus abgeführter Arbeit W und der bei der höheren Temperatur zugeführten Wärme Q_{12} den thermischen Wirkungsgrad der Maschine.

$$\frac{W}{Q_{12}} = \frac{Q}{Q_{12}} = \frac{Q_{12} - Q_{34}}{Q_{12}} = \eta$$

und mit Gl. (2.60) und (2.61) erhalten wir

$$\eta_{\text{ideal}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad (2.63)$$

Der Wirkungsgrad heißt deshalb ideal, weil beim reversiblen Prozess keine Verluste berücksichtigt werden.

Bei allen realen, irreversiblen Prozessen muss $\eta < \eta_{\text{ideal}}$ sein.

Thermodynamische Temperaturskala. Der Carnotsche Kreisprozess erlaubt auch die Festlegung einer von Systemgrößen unabhängigen Temperaturskala, da sich nach Gl. (2.61) und (2.62) die aufgenommenen und abgegebenen Wärmen verhalten wie die zugehörigen Temperaturen

$$\frac{Q_{12}}{Q_{34}} = \frac{T_1}{T_2}$$

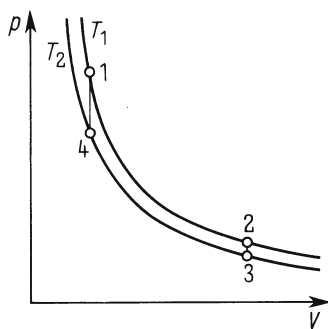


Bild 2.42 Stirlingscher Kreisprozess

Wenn also eine Temperatur festliegt, wie z.B. diejenige des Tripelpunktes des Wassers, so kann jede andere nun aus der Messung der Wärmen Q_{12} und Q_{34} ermittelt werden. Auf diese Weise entsteht die so genannte thermodynamische Temperaturskala oder Kelvinskala.

Stirlingscher Kreisprozess. Dieser schon 1816 von Robert Stirling (1790 bis 1878) formulierte Kreisprozess ist in jüngster Zeit durch neue Anwendungen wieder interessant geworden. Wie der Carnot-Prozess beginnt er bei der hohen Temperatur T_1 mit einer isothermen Expansion 1–2 in Bild 2.42.

Dieser schließt sich eine isochore Abkühlung 2–3 auf die niedrige Temperatur T_2 an. Eine isotherme Kompression 3–4 führt auf das Ausgangsvolumen, eine weitere isochore Erwärmung 4–1 wieder auf den Ausgangszustand zurück.

Nur wenn die auf der ersten Isochore abgegebene Energie gespeichert wird, um auf der zweiten verlustlos wieder zugeführt zu werden, erreicht der Stirlingprozess den Carnotschen Wirkungsgrad. Dann ist nämlich die insgesamt geleistete Arbeit gleich der auf den Isothermenästen verrichteten Arbeit [(Gl. (2.61) und (2.62)]. Die Speicherung der Energie kann dadurch erreicht werden, dass das Gas zum Abkühlen durch einen gut wärmespeichernden porösen Körper geleitet wird, der die dabei aufgenommene Wärme dann an das zurückströmende Gas wieder abgibt, wodurch die Temperaturerhöhung beim zweiten Isochorenast (4–1) erfolgt (Regenerator 3 in Bild 2.43).

Anwendungen. Der Stirlingsche Kreisprozess wird heute zur Erzeugung sehr tiefer Temperaturen eingesetzt. Seine ursprüngliche Anwendung als Heißluftmotor hat ebenfalls in den letzten Jahren an Bedeutung stark gewonnen, weil dieser mit allen möglichen Brennstoffen arbeiten kann, im stationären Betrieb sogar mit Hilfe der Energie der Sonnenstrahlung. Das Prinzip des Stirlingschen Heißluftmotors geht aus Bild 2.43 hervor. Im Zylinder befinden sich ein Verdrängerkolben 1 und ein Arbeitskolben 2.

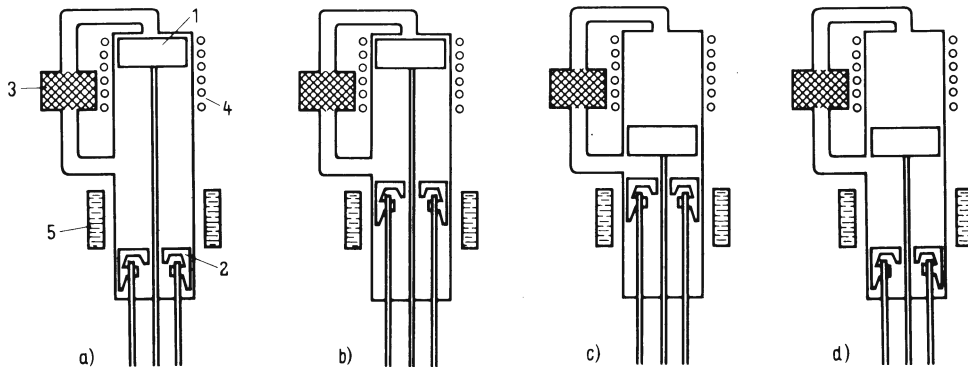


Bild 2.43 Stirlingscher Kreisprozess im Heißluftmotor

Die beiden Kolben machen eine um ca. 90° phasenverschobene Bewegung, was in der Praxis dadurch bewirkt werden kann, dass sie beide über verschiedene Nocken einer Welle oder mit einem so genannten Rhombengetriebe verbunden werden. Der Zylinder hat einen oberen – warmen – Teil und einen unteren – kalten – Teil. Beide sind über einen äußeren Regenerator 3 verbunden. Außen am Zylinder sitzen die Heizvorrichtung 4, die das Gas im oberen Teil erwärmt, und die Kühlvorrichtung 5, die dem Gas im unteren Teil Wärme entzieht. In Bild 2.43a befindet sich das Arbeitsgas, z.B. Luft, im unteren kalten Teil. Es hat sein größtes Volumen und deswegen den geringsten Druck. Zum leichteren Verständnis betrachten wir den Kreisprozess ausgehend von der tieferen Temperatur (Punkt 3 in Bild 2.42) mit der Kompression 3–4 des Arbeitsgases durch den nach oben gehenden Arbeitskolben 2 (Bild 2.43 b). Um das Gas auf konstanter Temperatur zu halten, muss dabei das Kühlsystem 5 Wärme aufnehmen. Dann geht der Verdrängerkolben 1 nach unten (Bild 2.43c) und verdrängt das Gas bei konstantem Volumen durch den Regenerator 3 nach oben (4–1), wobei es die vom vorherigen Zyklus gespeicherte Wärme aufnimmt. Die Temperatur des Gases und damit sein Druck steigen. Dadurch wird der Arbeitskolben 2 über den Regeneratorzweig nach unten gedrückt (Bild 2.43d), wobei die durch den Erhitzer 4 zugeführte Wärme eine Abkühlung verhindert (1–2). Schließlich bewegt sich der Verdränger 1 wieder nach oben (Bild 2.43a) und verdrängt das Gas unter Abkühlung durch den Regenerator in den unteren Zylinderteil (2–3).

Bei Verbrennungsmotoren wird die im Kraftstoff gespeicherte Energie als Verbrennungswärme einem Kraftstoff-Luft-Gemisch zugeführt, das anschließend nach Expansion als Abgas ausgestoßen

wird. Ohne den Gasaustausch und die Umwandlung des Gases im Einzelnen zu beschreiben, lassen sich die Vorgänge durch einfache Vergleichs-Kreisprozesse mit gleichbleibender Gaszusammensetzung darstellen (Bild 2.44).

Im Otto-Motor¹⁾ (Bild 2.44a) wird das kalte Kraftstoff-Luft-Gemisch angesaugt (1) und adiabatisch verdichtet (1–2). Beim anschließenden schnellen Verbrennen (2–3) steigen Druck und Temperatur bei konstantem Volumen (isochore Zustandsänderung s. Abschn. 2.4.3.2) unter Zufuhr der Verbrennungswärme Q_V . Das heiße Abgas expandiert adiabatisch unter Arbeitsabgabe (3–4) und wird schließlich durch Öffnen des Auslassventils praktisch isochor unter Abkühlung entspannt (4–1). Danach wird es ausgestoßen. Die zugeführte Wärme ist mit Gl. (2.44) $Q_{zu} = c_V m (T_3 - T_2)$. Wir setzen vereinfachend die spezifische Wärmekapazität c_V des Gasgemisches gleich derjenigen des Abgases und erhalten für die abgeführte Wärme $Q_{ab} = c_V m (T_4 - T_1)$. Damit wird der ideale Wirkungsgrad

$$\eta_{ideal} = \frac{Q_{zu} - Q_{ab}}{Q_{zu}} = \frac{T_3 - T_2 - T_4 + T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$$

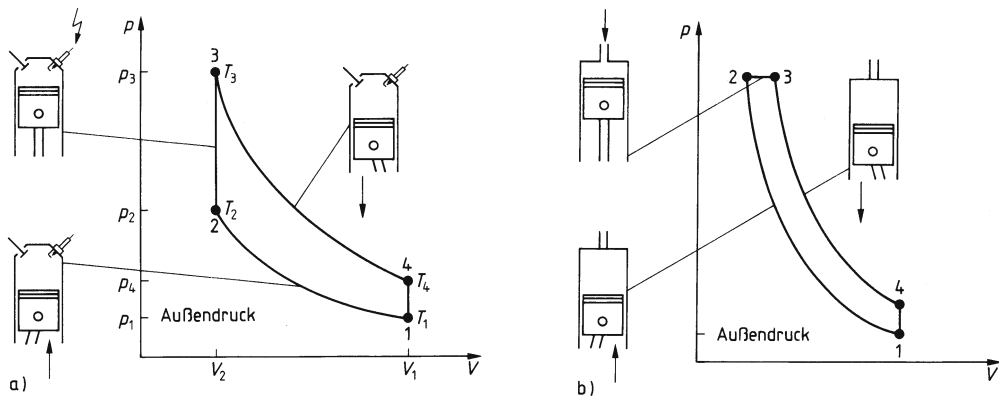


Bild 2.44 Vereinfachte Darstellung a) des Otto-Prozesses, b) des Diesel-Prozesses

Da sowohl das Verdichten (1–2) als auch das Expandieren (3–4) adiabatisch geschieht, gelten Gl. (2.46) bis (2.48). Damit ergibt sich $T_3/T_4 = (V_1/V_2)^{\kappa-1}$ und $T_2/T_1 = (V_1/V_2)^{\kappa-1}$ und daraus $T_3/T_4 = T_2/T_1$. Damit wird

$$\eta_{ideal} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3(T_4 - T_1) \frac{1}{T_4}} = 1 - \frac{T_4}{T_3} = 1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa-1} = \frac{T_3 - T_4}{T_3}$$

Der ideale Wirkungsgrad hängt von der Temperaturdifferenz $T_3 - T_4$ oder vom Verdichtungsverhältnis $\varepsilon = V_1/V_2$ ab, das bei Otto-Motoren zwischen 6 und 12 liegt, womit sich ideale Wirkungsgrade zwischen 0,51 und 0,73 ergeben. Wegen der in der Praxis unvermeidlichen Reibungsverluste ist der technisch erreichbare Wirkungsgrad mit Werten um 0,25 erheblich niedriger.

Im Diesel-Motor²⁾ (Bild 2.44 b) wird reine Luft stark adiabatisch verdichtet (1–2) und dabei so sehr erhitzt (auf 550 °C bis 620 °C), dass der eingespritzte Kraftstoff selbständig zündet (2–3) und die Verbrennungswärme Q_V freisetzt. Das heiße Abgas expandiert adiabatisch (3–4), wird unter Abkühlung isochor entspannt (4–1) und anschließend ausgestoßen. Für die etwas komplizierteren Verhältnisse beim Diesel-Motor erhält man auf ähnliche

¹⁾ Nikolaus Otto (1832 bis 1891).

²⁾ Otto Diesel (1858 bis 1913).

Weise wie für den Otto-Motor und mit dem so genannten Einspritzverhältnis $\varphi = V_3/V_2$ den idealen Wirkungsgrad

$$\eta_{\text{ideal}} = 1 - \frac{\varphi^\kappa - 1}{\kappa \varepsilon^{\kappa-1}(\varphi - 1)} = 1 - \frac{(T_4 - T_1)}{\kappa(T_3 - T_2)}$$

Entropie. Wir finden mit Gl. (2.61) und Gl. (2.63) für den Carnotschen und für den Stirlingschen Kreisprozess:

$$Q_{12}/T_1 - Q_{34}/T_2 = mR_S \ln(V_2/V_1) - mR_S \ln(V_2/V_1) = 0 \quad (2.64)$$

Die Summe aus reversibel zugeführter Wärme Q_{12} , dividiert durch die absolute Temperatur T_1 bei der Zufuhr, und reversibel entnommener Wärme Q_{34} , geteilt durch die Temperatur T_2 bei der Entnahme, ist gleich Null.

Gl. (2.64) gilt auch für beliebige reversible Kreisprozesse, da man diese immer in ein System Carnotscher Prozesse mit Wärmeaustausch bei jeweils zwei Temperaturen zerlegen kann (Bild 2.45). Bis auf die stark ausgezogenen Kurvenstücke, welche die Kurve des Kreisprozesses schneiden, heben sich die Arbeitsbeträge bzw. die entsprechenden Wärmen unterhalb jeder Isothermen im Innern der umfahrenen Fläche auf, da diese Kurventeile in beiden Richtungen je einmal pro Gesamtprozess durchlaufen werden. Da für jeden einzelnen Prozess $Q_{12}/T_1 - Q_{34}/T_2 = 0$ ist, muss dies auch für den Kreisprozess gelten.

Daraus folgt:

Für einen reversiblen Kreisprozess ist die Summe der Wärmen, dividiert durch die Temperaturen beim Austausch, gleich Null

$$\sum_{i=1}^N \frac{Q_{\text{rev}}}{T_i} = 0 \quad (2.65)$$

Wenn die einzelnen Streifen in Bild 2.45 beliebig schmal werden, erhalten wir das Integral über den geschlossenen Weg

$$\oint \frac{dQ_{\text{rev}}}{T} = 0$$

Definition: Wir nennen den vom Weg unabhängigen Quotienten aus reversibel ausgetauschter Wärme und der absoluten Temperatur beim Austausch Entropie S . Ihr Nullpunkt ist willkürlich wählbar. Die Änderung der Entropie ist

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \sum_{i=1}^N \frac{Q_{\text{rev}}}{T_i} \quad (2.66)$$

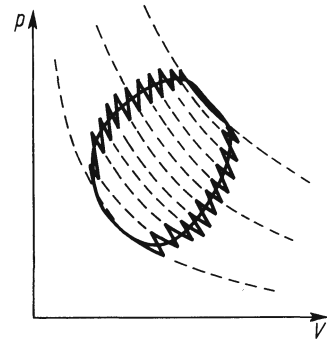


Bild 2.45 Ersatz eines beliebigen Kreisprozesses durch ein System von Carnotschen Kreisprozessen

Für einen reversiblen Kreisprozess ist die Entropieänderung nach Gl. (2.65)

$$\Delta S = 0$$

Bei einem irreversiblen Kreisprozess ist entweder die abgeführte Arbeit kleiner oder die zugeführte Wärme größer als beim reversiblen Vorgang. Deshalb ist in einem abgeschlossenen System

$$\Delta S > 0$$

Die Entropieänderung bei einer Änderung des Aggregatzustandes bei $T_S = \text{const}$ mit der Umwandlungswärme Q_S , z.B. beim Schmelzen oder Verdampfen, ist $\Delta S = Q_S/T_S$. Bei Erwärmung ohne Änderung des Aggregatzustandes beträgt die Entropieänderung

$$\Delta S = \int_{Q_1}^{Q_2} dQ/T = cm \int_{T_1}^{T_2} dT/T = cm \ln T_2/T_1$$

Die Entropieänderung zeigt an, ob ein Prozess ohne äußere Energiezufuhr unmöglich ($S < 0$), reversibel ($S = 0$) oder irreversibel ($S > 0$) ist.

Anschauliche Deutung der Entropie. Man kann sich die Entropie modellmäßig als eine Größe vorstellen, die, ähnlich wie eine Art Stoff, Ladung oder eine andere mengenartige Größe in jeder Materie steckt. Diese Größe entsteht bei allen Energieumwandlungen neu, sie ist jedoch unzerstörbar, d.h., ihr Vorrat nimmt dauernd zu. Damit hat die Entropie höchst bemerkenswerte Eigenschaften:

Beispiel 8. Wir haben oben die Wärmeleitung als Beispiel eines irreversiblen Prozesses erwähnt. Wenn man einem heißen Körper mit der Temperatur T_1 die Energie ΔW zuführt, erzeugt man damit die Entropie $\Delta S_1 = \Delta W_1/T_1$. Ein mit dem heißen wärmeleitend verbundener kalter Körper mit der Temperatur T_2 nimmt im stationären Zustand die vom heißen zufließende Energie ΔW_1 auf, was zu einer Entropieerzeugung $\Delta S_2 = \Delta W_1/T_2$ führt. Man kann sich nun vorstellen, dass der niedrigere Entropiebetrag S_1 von dem Körper höherer Temperatur T_1 auf denjenigen Körper niedrigerer Temperatur T_2 übergeht und dort als $\Delta S_2 = \Delta S_1 T_1/T_2$ ankommt.

Das Beispiel 8 zeigt, dass bei höherer Temperatur die gleiche Energie weniger Entropie erzeugt als bei niedrigerer Temperatur. Um bei der höheren Temperatur die gleiche Entropie zu erzeugen, müsste man dort die Energie $\Delta W_2 = \Delta W_1 T_1/T_2$ aufwenden. Die Differenz zwischen dieser Energie und der tatsächlich aufgewendeten könnte man mit einer Wärmekraftmaschine gewinnen, nämlich

$$\Delta W_2 - \Delta W_1 = \Delta S_2 (T_1 - T_2)$$

Nur dieser Energieanteil ist auch speicherfähig. In jedem Fall bleibt schließlich Entropie bei niedriger Temperatur übrig. Diese Entropie wurde bei dem Vorgang erzeugt, sie kann jedoch nicht vernichtet werden. Man kann sie allenfalls – z.B. mit dem Wasser, das das kalte Ende der Wärmeleitungsstrecke kühlt – abtransportieren. Die Entropie ist demnach von ausschlaggebender Bedeutung für jede Energieumwandlung. Sie gibt an, welcher Nutzen aus Energievorräten gezogen werden kann. Nur Energieumwandlungen mit geringer Entropieerzeugung sind wirtschaftlich nutzbar. Die Bedeutung der

Entropie wird z.B. auch dadurch unterstrichen, dass die universelle Naturkonstante k dimensionsmäßig eine Entropie ist.

Je größer die Entropiezunahme bei einem Prozess ist, desto mehr Wärme muss für eine bestimmte Arbeit zugeführt werden oder desto weniger Arbeit kann abgeführt werden. Die Entropieänderung ist ein Maß für die Irreversibilität des Vorgangs. Bei allen irreversiblen Vorgängen wird die nach dem ersten Hauptsatz grundsätzlich mögliche Umkehrung nicht erreicht.

Statistische Deutung der Entropie. Die Temperatur gibt den Zustand eines makroskopischen Körpers wieder. Sie ist aber dem gemittelten Wert der kinetischen Energie der einzelnen Moleküle proportional. Ebenso ist die Entropie eine Zustandsgröße für einen Körper oder ein System von Körpern. Eine molekulare Deutung liefert z.B. die Diffusion beim Mischen zweier Gase. Dies wollen wir uns an Hand eines Modells klarmachen. Wir schichten in einen Behälter über eine Lage weißer Kugeln eine Anzahl roter. Diese Ordnung bleibt erhalten, so lange die Kugeln in Ruhe sind. Wir ahmen durch kräftiges Schütteln die thermische Bewegung der Modellmoleküle nach. Schnell mischen sich rote und weiße Kugeln: Die Ordnung ist gestört und ihre zufällige Wiederherstellung ist umso unwahrscheinlicher, je mehr Kugeln vorhanden sind. Die alte Ordnung stellt sich von selbst nicht mehr ein, der Vorgang ist irreversibel. Demgemäß lässt sich ein irreversibler Prozess atomistisch so deuten, dass er in Richtung auf den Zustand größerer Unordnung abläuft.

Die Entropie ist ein Maß für die Unordnung.

Zusammenhang zwischen Information und Entropie

Informationsgehalt. Nachrichten bestehen aus einer Folge von Zeichen aus einem Zeichenvorrat, z.B. den Buchstaben des Alphabets. Wie jeder an einem beliebigen Text sehen kann, bringt erst ein Auswahlprozess aus diesen Zeichen wirklich die Information. So wird z.B. die Nachricht 20 erst durch die Auswahlvorschrift „Konzentration, Zahlenangabe in der Einheit g/cm^3 “ zur Information über eine bestimmte Dichte.

Die Autoren dieses Buches stellen die Nachrichtenquelle des Buchtextes dar, das Buch selbst ist der Kanal oder das Übertragungsmedium, der Leser ist der Empfänger der Information.

Die Nachrichtenquelle wählt aus einer Menge möglicher Nachrichten aus, um sie einem Empfänger zu übermitteln. Zwischen beiden muss es eine Interpretationsvereinbarung geben.

Die Auswahl muss frei verfügbar sein. Die N einzelnen Zeichen können dabei verschieden häufig auftreten. Zum Beispiel ist der Buchstabe e das häufigste Zeichen im deutschen Alphabet.

$N = 2^n$ Elemente ermöglichen bzw. benötigen n Entscheidungen oder in der Sprache der Informatik n bit, um ein bestimmtes Zeichen auszuwählen. Mit der Logarithmenrechnung ergibt sich

$$n = \text{ld } N = 3,322 \lg N$$

Zum Beispiel ergeben 10 Elemente $\text{ld } 10 = 0,322$ bit oder mit der nächsten ganzen Zahl 4 bit.

Nun ist der Informationsgehalt eines einzelnen Zeichens je nach der Häufigkeit seines Auftretens verschieden hoch. Wir zeigen diesen Zusammenhang an folgendem Beispiel:

Beispiel 9. Der Zeichenvorrat bestehe aus den 4 Elementen A_1, A_2, A_3, A_4 mit den relativen Häufigkeiten p_1, p_2, p_3 und p_4 ; Bild 2.46 zeigt die Häufigkeiten der Zeichen und die nötigen Entscheidungsschritte, um die Auswahl zu treffen.

Die relativen Häufigkeiten sind $p_1 = 1/2, p_2 = 1/4, p_3 = p_4 = 1/8$. Die zugehörigen Informationsgehalte sind 1 bit für A_1 , 2 bit für A_2 , je 3 bit für A_3 und A_4 .

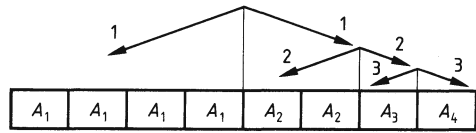


Bild 2.46 Zeichenhäufigkeit und Informationsgehalt

Der Informationsgehalt für ein Zeichen mit dem Index K ist dann

$$I(p_K) = \text{ld} \frac{1}{p_K} \text{ bit} = -\text{ld} p_K \text{ bit}$$

Wegen $0 \leq p \leq 1$ ist I nicht negativ.

Als gewichtete Summe des Informationsgehaltes aller Einzelzeichen erhält man

$$H = \sum_{K=1}^N p_K(A_K) I(p_K) \frac{\text{bit}}{\text{Zeichen}} = -\sum p_K \text{ld} p_K \frac{\text{bit}}{\text{Zeichen}}$$

Definition: $H = -\sum p_K \text{ld} p_K$ ist die gewichtete Summe der Informationsgehalte aller Einzelzeichen.

Diese gewichtete Summe ist der mittlere Informationsgehalt eines Zeichens, auch der Quelle, oder einfach die Information.

In unserem Beispiel ist $H = 0,5 \cdot 1 + 0,25 \cdot 2 + 0,125 \cdot 3 \text{ bit/Zeichen} = 1,75 \text{ bit/Zeichen}$.

Informationsgehalt und Entropie. Wir kommen jetzt auf einen bemerkenswerten Zusammenhang zwischen dem mittleren Informationsgehalt pro Zeichen eines Zeichenvorrates und der physikalischen Größe Entropie. Hierzu betrachten wir die Verteilung von Teilchen im Raum. Wir nehmen an, dass sich N_1 Moleküle zunächst im Teilvolumen $V_1 = V_E/2$ befinden. Wir besitzen also die Information, dass sie alle im Teilvolumen V_1 sind. Jetzt verdoppeln wir das Volumen auf das doppelte Ausgangsvolumen. Dann verlieren wir genau

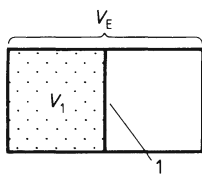


Bild 2.47 Zum Informationsverlust bei der Verteilung von Molekülen auf verschiedene Volumina. 1 = verschiebbare Wand

$-\Delta I = N_1$ bit Information, da wir nicht mehr wissen, ob sich die Teilchen im Teilvolumen V_1 oder in V_2 befinden. Wir gehen jetzt noch weiter und verdoppeln n mal, dass also das Endvolumen $V_E = 2^n V_1$ ist. Bei jeder Verdoppelung verlieren wir wieder N_1 bit Information, insgesamt also

$$-\Delta I = n N_1 \text{ bit} = n N_1 \text{ld} 2 = N_1 \text{ld} 2^n = N_1 \text{ld} V_E/V_1$$

Nach Abschn. 2.7.2 ist jede Volumenvergrößerung mit einer Entropiezunahme verbunden.

Diese ist

$$\Delta S = \Delta Q/T = m R_S \ln (V_E/V_1)$$

Nun hängt der natürliche Logarithmus mit dem Zweier-Logarithmus durch die einfache Beziehung $\ln z = \text{ld} z \ln 2$ zusammen. Dann gilt mit $m R_S = kN$

$$\Delta S = k N_1 \text{ld} (V_E/V_1) \ln 2$$

das heißt,

$$\Delta S = -\Delta I k \ln 2$$

Man sieht daraus, dass die Entropiezunahme ΔS dem Informationsverlust ΔI direkt proportional ist.

Wenn im gleichen Anfangsvolumen verschiedene Arten von Molekülen sind mit der jeweiligen Anzahl $N_i = h_1 N_{\text{ges}} \dots N_N = h_N N_{\text{ges}}$, dann ergibt sich hierfür

$$-\Delta I = \sum \Delta I_i = \text{ld} (V_E/V_1) \sum N_i \quad \text{und} \quad \Delta S = k \ln 2 \text{ld} (V_E/V_1) \sum N_i$$

Verteilen sich außerdem die verschiedenen Molekülarten am Anfang auf verschiedene Bruchteile h_i des Endvolumens V_E , so gilt mit $h_i = g_i/V_E$

$$-\Delta I = \sum N_i \text{ld} (1/h_i) \quad \text{und} \quad \Delta S = \sum N_i k \ln 2 \text{ld} (1/h_i)$$

Das heißt, dass die Entropiezunahme dem mittleren Informationsverlust proportional ist.

$$\Delta S = -\Delta I k \ln 2$$

Die Entropiezunahme ist dem Informationsverlust proportional, daher rührt auch für ΔI die Bezeichnung negative Entropie oder Negentropie.

Die Entropie ist am größten, wenn jedes Zeichen mit der gleichen Häufigkeit auftritt.

Schließlich ergibt sich der mittlere Informationsverlust pro Teilchen, der auch gleich dem anfänglichen mittleren Informationsgehalt pro Teilchen ist, indem man durch die Anzahl aller Teilchen teilt

$$H = \frac{-\Delta I}{N_{\text{ges}}} = \sum \frac{N_i}{N_{\text{ges}}} \text{ld} \frac{1}{h_i} = \sum h_i \text{ld} \frac{1}{h_i} = -\sum h_i \text{ld} h_i \quad \text{mit der Einheit bit/Zeichen}$$

entsprechend unserer auf S. 228 gegebenen Definition des mittleren Informationsgehaltes pro Zeichen bei einer Nachrichtenübertragung.

Im vorausgehenden Abschnitt haben wir die Entropie als ein Maß für die Unordnung dargestellt. Aus dem hier abgeleiteten Zusammenhang zwischen Entropiezunahme und Informationsverlust ergibt sich demnach, dass jeder Verlust an Ordnung auch mit einem Verlust an Information verbunden ist. Anders ausgedrückt ergibt sich aus einem Informationsverlust immer eine Erhöhung der Unordnung und umgekehrt.

2.7.2 Zweiter Hauptsatz der Wärmelehre

Der erste Hauptsatz gibt die Energiebilanz bei der Umwandlung von mechanischer Energie in Wärme und umgekehrt an. Er sagt nichts darüber aus, ob und wann solche Umwandlungen möglich sind und welche Energie damit umgewandelt werden kann. So schließt der erste Hauptsatz z.B. nicht aus, dass ein Schiff aus dem Meer als Energiespeicher Energie zu seinem Antrieb entnimmt und dabei das Wasser abkühlt. Eine solche Anordnung, die man *perpetuum mobile* zweiter Art nennt, gibt es aber nicht. Man

braucht zur periodischen Umwandlung von innerer Energie in Arbeit eine schon am Anfang vorhandene Temperaturdifferenz. Wohl kann man z.B. bei der isothermen Expansion eines idealen Gases die zur Erhaltung der inneren Energie zugeführte Wärme völlig in die Ausdehnungsarbeit überführen. Man muss jedoch dann Arbeit verrichten, um den Ausgangszustand wieder herzustellen. So können wir folgenden, die Gültigkeit des ersten Hauptsatzes einschränkenden Erfahrungssatz formulieren:

Zweiter Hauptsatz der Wärmelehre: Es gibt keine periodisch arbeitende Maschine, die mechanische Arbeit allein durch Abkühlung eines Energiespeichers erzeugt.

So wie wir mit Hilfe der inneren Energie U dem ersten Hauptsatz eine mathematische Fassung geben konnten, formulieren wir den zweiten Hauptsatz mit Hilfe der Entropie S :

Alle Zustandsänderungen in einem abgeschlossenem System verlaufen so, dass die Entropie zunimmt

$$\Delta S > 0$$

Alle Zustandsänderungen in einem abgeschlossenem System vergrößern die Unordnung.

T-S-Diagramm. Wir haben in Abschn. 2.4 und 2.7 Zustandsänderungen im p - V -Diagramm dargestellt. Dabei sind die Flächen unter den Kurven ein Maß für die Volumenänderungsarbeiten. Die bei den Prozessen zu- oder abgeführten Wärmen lassen sich aus diesen Diagrammen jedoch nicht entnehmen. Bei reversiblen Prozessen ist mit Gl. (2.66) $TdS = dQ$. Damit sind die Flächen unter den Kurven im T - S -Diagramm (Bild 2.48) ein Maß für die bei den reversiblen Prozessen zu- oder abgeführten Wärmen.

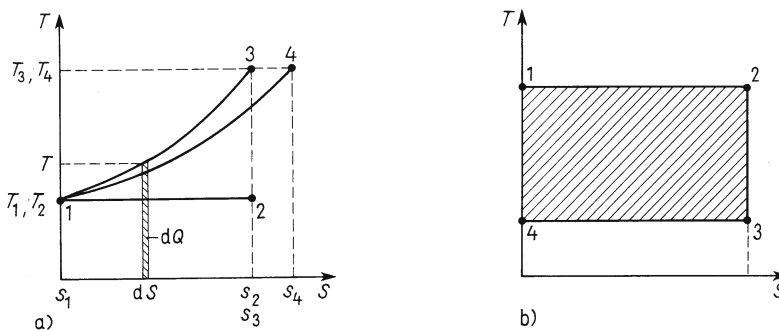


Bild 2.48 a) T - S -Diagramme für verschiedene Zustandsänderungen: 1–2 isotherme Expansion, 1–3 isochore Druckerhöhung, 1–4 isobare Volumenvergrößerung

b) Carnot-Kreisprozess, bestehend aus den Isothermen 1–2 und 3–4, sowie den Adiabaten 2–3 und 4–1

Für eine isotherme Expansion wird mit Gl. (2.42) die Entropiezunahme

$$\Delta S = mR_S \ln p_1/p_2$$

Die Fläche unter dem Geradenstück 1–2 in Bild 2.45a stellt wegen $dQ = p dV$ auch die Volumenänderungsarbeit dar.

Die isochore Druckerhöhung 1–3 bedingt mit Gl. (2.44) die Entropiezunahme um

$$\int_{S=S_1}^{S_3} dS = m c_v \int_{T=T_1}^{T_3} dT/T = \Delta S = m c_v \ln T_3/T_1$$

Die Fläche unter dem Kurvenabschnitt 1–3 ist wegen

$$\Delta Q = \int_{T=T_1}^{T_2} T dS$$

ein Maß für die zugeführte Wärme.

Die isobare Volumenvergrößerung 1–4 erfolgt unter der Entropieerhöhung

$$\int_{T=T_1}^{T_4} dS = m c_p \int_{T=T_1}^{T_4} dT/T = \Delta S = m c_p \ln T_4/T_1$$

Den in Abschn. 2.7.1 behandelten Carnot-Kreisprozess, bestehend aus zwei Isothermen und zwei Adiabaten, zeigt das T - S -Diagramm (Bild 2.48 b). Die zugeführte Wärme ergibt sich aus der Fläche unterhalb der Isotherme 1–2, die abgeführte Wärme aus der Fläche unter der Isotherme 3–4, sodass die Differenz der Wärmen, also die vom Gas verrichtete Arbeit, aus der schraffierten Rechteckfläche direkt entnommen werden kann.

Wert von Wärme. Man kann den Wert der Wärme in einem Energieumwandlungsprozess ausdrücken durch die zugehörige Temperatur $T = \Delta W/\Delta S$, die gleich ist dem Quotienten aus dem Betrag der gelieferten Energie und dem Betrag der gelieferten Entropie. Mit jeder Energiemenge wird also eine bestimmte Entropiemenge geliefert, und die gleiche Energiemenge ist um so mehr wert, je weniger Entropie „sie enthält“. So liefert z.B. die Sonne bei der Temperatur 6000 K der Erde mit jedem Energiebetrag 1 Ws die Entropie $1/6000 \text{ Ws/K} = 1,66 \cdot 10^{-4} \text{ Ws/K}$. Von der Erde wird Strahlung etwa bei der Temperatur 250 K wieder in den Weltraum abgegeben. Die Entropie wird also auf der Erde um den Faktor $6000 \text{ K}/250 \text{ K} = 24$ erhöht, die Energie um den gleichen Faktor entwertet.

2.7.3 Thermische Maschinen

Wärmekraftmaschine. Die Umwandlung von innerer Energie in mechanische Energie gehört zu den wichtigsten technischen Problemen. Abkühlung eines Energiespeichers, z.B. durch Wärmeleitung oder -strahlung, ist irreversibel und bringt weiter nichts als eine Zunahme der Entropie. Zur dauernden Umwandlung in mechanische Energie ist eine periodisch arbeitende Maschine sinnvoll.

Eine Wärmekraftmaschine muss also von selbst in den Ausgangszustand zurückkehren. Sie durchläuft Kreisprozesse. Deren Wirkungsgrad gibt Gl. (2.63) wieder. Die vom Speicher hoher Temperatur entnommene Energie wird nur zu einem Bruchteil in Arbeit W umgewandelt, der umso größer ist, je größer das Temperaturgefälle zwischen dem oberen und dem unteren Speicher ist (Bild 2.49a)

$$W = Q_1 (T_1 - T_2) / T_1 = Q_1 \eta_{\text{ideal}}$$

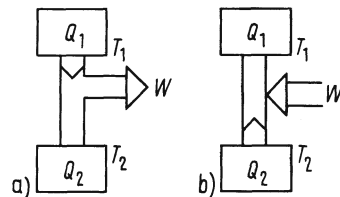


Bild 2.49 Zur Funktion einer Wärmekraftmaschine (a) und einer Wärmepumpe (b)

In der Praxis lässt sich der Wirkungsgrad nur durch Erhöhung von T_1 beeinflussen, da T_2 durch die Außentemperatur nach unten begrenzt ist. So hat also eine Dampfturbine, die nicht mit überhitztem Dampf arbeitet, den idealen Wirkungsgrad

$$\eta_{\text{ideal}} = (373 \text{ K} - 293 \text{ K})/373 \text{ K} \cdot 100\% = 21,4\%$$

In Wirklichkeit sind die Wirkungsgrade noch viel kleiner; in unserem Beispiel liegt der tatsächliche Wirkungsgrad nur bei 12 bis 15% (vgl. S. 224).

Wärmepumpe. Lässt man eine Maschine den Carnotschen Kreisprozess in umgekehrter Richtung ausführen, dann arbeitet sie als Wärmepumpe. Unter Arbeitsaufwand wird Energie vom unteren Speicher zum oberen hinaufgepumpt (Bild 2.49b). Somit kann man entweder den oberen Speicher erwärmen oder den unteren abkühlen (Kältemaschine). Die aufzuwendende Arbeit ist minimal für den reversiblen Grenzfall. Dann ist die so genannte Leistungszahl ε^1 für die Erwärmung des oberen Speichers gleich dem Verhältnis aus der bei der Temperatur $T_1 > T_2$ abgegebenen Wärme und der aufgewendeten Arbeit. Mit Gl. (2.60) und (2.61) ist

$$\varepsilon_{1 \text{ ideal}} = Q_1/W = T_1/(T_1 - T_2)$$

Man beachte, dass die Leistungszahl einer Wärmepumpe größer als 1 ist (vgl. Aufgabe 5). In gleicher Weise ist die Leistungszahl für die Abkühlung bei einer Kältemaschine gleich dem Verhältnis aus der bei der Temperatur $T_2 < T_1$ aus dem Speicher entnommenen Wärme und der erforderlichen Arbeit.

$$\varepsilon_{2 \text{ ideal}} = Q_2/W = T_2/(T_1 - T_2)$$

Die technisch realisierbaren Leistungszahlen sind auch bei allen diesen Fällen erheblich kleiner als $\varepsilon_{\text{ideal}}$.

Aufgaben zu Abschn. 2.7

1. Einem kg Eis von 0°C wird die Wärme $333 \cdot 10^3 \text{ J}$ zugeführt. Man berechne die Entropieänderung für Schmelzen und Erwärmen und deute daraus, welches der wahrscheinlichere Vorgang, d.h. derjenige mit der größten Entropiezunahme, ist.
2. Wie groß ist die Entropieänderung für 1 kmol Wasserstoff, wenn sein Volumen bei Temperaturverdoppelung auf die Hälfte verkleinert wird? ($c_v = 10,1 \cdot 10^3 \text{ N m/(kg K)}$).
3. Man formuliere den zweiten Hauptsatz mit Hilfe des Carnotschen Wirkungsgrades.
4. Wie groß ist der ideale Wirkungsgrad einer Dampfturbine, in der Dampf von 530°C durch Entspannen auf 35°C abgekühlt wird?
5. Ein Wohnhaus soll mit einer Wärmepumpe aus einem benachbarten Gewässer mit der Temperatur 4°C so beheizt werden, dass innen die konstante Temperatur 20°C herrscht.
 - a) Wie groß ist die ideale Leistungszahl?
 - b) Welche Leistung muss bei einem Heizleistungsbedarf von $4,18 \cdot 10^7 \text{ J/h}$ für den Antrieb der Pumpe aufgewendet werden, wenn sie nur 40% der idealen Leistungszahl erreicht?
 - c) Wie viel ist das im Verhältnis zur Heizleistung?

¹⁾In der technischen Literatur auch Leistungsziffer.

3 Elektrizität und Magnetismus

Grundlegende Erfahrungen. Außer den mechanischen Kräften und der Gravitationskraft kennen wir in der Natur noch die magnetischen und elektrischen Kräfte; von den Kernkräften, die zwischen den Bausteinen der Atomkerne wirken und der sog. schwachen Wechselwirkung (s. Abschn. 6.2.3.2), sei hier einmal abgesehen. – Wir wenden uns zunächst den elektrischen Erscheinungen zu. Hierfür einige Beispiele:

1. Man kann bestimmte Körper, wie z.B. Glas oder Hartgummi, durch Reiben in einen Zustand versetzen, in dem sie andere Körper anziehen oder abstoßen, also auf diese eine Kraft ausüben. Wir bezeichnen Körper in diesem Zustand als elektrisch geladen. Dabei unterscheidet sich der Ladungszustand von Glas und Hartgummi. Willkürlich hat man den Zustand, in dem sich eine Glasstange nach dem Reiben befindet, positiv (+), denjenigen beim Hartgummistab negativ (–) elektrisch geladen genannt¹⁾.
2. Die Beobachtung lehrt, dass die Materie gewöhnlich ungeladen, also weder positiv noch negativ geladen, d.h. elektrisch neutral ist.
3. Die elektrische Ladung ist an Materie gebunden. Für die Ladung gilt ein Erhaltungssatz; außerdem hat die Ladung eine atomistische Struktur, d.h. sie besteht aus kleinsten nicht mehr unterteilbaren Ladungen (s. Abschn. 3.1.1.1).

3.1 Ladung und elektrisches Feld

Elektrizität kennen wir meist durch den Gebrauch elektrischer Geräte. Wir lernen auf diese Weise früh mit den Begriffen elektrische Spannung und Strom umzugehen. Will man aber kompliziertere Vorgänge verstehen, wie etwa solche im Dielektrikum eines Kondensators oder in der Grenzschicht einer Halbleiterdiode, so stoßen wir schnell an Grenzen. Erst die physikalischen Ursachen elektrischer Erscheinungen, die elektrischen Ladungen und die durch sie verursachten elektrischen Felder ermöglichen ein wirkliches Verständnis oft scheinbar vertrauter Phänomene.

Wie die schwere Masse oder Gravitationsladung das Gravitationsfeld bewirkt, so erzeugen elektrische Ladungen elektrische Felder. Sie erfüllen in gleicher Weise wie Schwerefelder den Raum. Ladungen, die sich in elektrischen Feldern bewegen, gewinnen oder verlieren potentielle und kinetische Energie wie schwere Teilchen im Gravitationsfeld. Mit Hilfe der Feldstärke = Kraft/Ladung, des Potentials = potentielle Energie/Ladung und der Potentialdifferenz – bekannt als elektrische Spannung zwischen zwei Punkten – können wir elektrische Felder beschreiben.

Elementare Versuche. Derartige Versuche verleiten häufig zu der Meinung, es handle sich dabei um Erscheinungen, die den vertrauten elektrotechnischen Vorgängen sehr wenig verwandt sind. Für deren Verständnis sind diese jedoch von großem Nutzen.

¹⁾ Georg Christoph Lichtenberg (1742 bis 1799).

□ **Versuch 1.** Berührt man mit einem Glasstab, den man mit einem Seidenlappen positiv (s.o.) aufgeladen hat, einen an einem Faden aufgehängten leichten Körper, etwa einen Papierzylinder oder auch eine Schaumstoffkugel, so werden diese Körper danach abgestoßen. Nähert man sodann einen mit einem Katzenfell geriebenen und so negativ aufgeladenen Hartgummistab demselben Körper, so erfolgt eine Anziehung. Führt diese bis zur Berührung, so wird der Körper dann abgestoßen. Bringt man nun wieder den geladenen Glasstab in die Nähe, so tritt erneute Anziehung auf. □

Mit Naturseide und Katzenfell wurden diese Effekte entdeckt. Wir haben heute viele Möglichkeiten, die Aufladung von Körpern durch Reibung festzustellen. So kann man z.B. durch Hin- und Herrutschen auf einem lackierten Stuhl oder einem mit Kunststoffbezügen versehenen Autositz den eigenen Körper aufladen. Dass ein durch trockenes Haar gezogener Kamm dieses auflädt, ist allgemein bekannt.

Durch Berühren mit geladenen Stäben können ungeladene Körper also aufgeladen werden. Das geschieht durch Abfließen der Ladungen von einem Körper auf den anderen. Berührt man den eben mit einem Stab geladenen Körper mit der Hand, so verschwindet sofort die Abstoßung gegenüber dem Stab, von dem die Ladungen herkamen. Die Ladungen sind über die Hand „abgeflossen“, der Körper wurde entladen.

□ **Versuch 2.** Zwei nebeneinander hängende Schaumstoffkugeln stoßen sich ab, wenn man sie mit dem gleichartig geladenen Stab berührt hat. Sie ziehen sich an, wenn jede von einem ungleichartig geladenen Stab berührt wurde. □

Aus Versuch 1 und 2 geht eine wichtige Tatsache hervor:

Gleichartige Ladungen stoßen sich ab, ungleichartige Ladungen ziehen sich an.

3.1.1 Elektrische Ladung

Die elektrische Ladung eines geladenen Körpers wird festgestellt durch diejenige Kraft, die er auf andere geladene Körper ausübt. Damit besitzen wir ein Vergleichsverfahren:

Wir vereinbaren, dass eine Ladung doppelt so groß ist wie eine andere, wenn sie im gleichen Abstand die doppelte Anziehungskraft bewirkt.

Die elektrische Ladung erhält das Symbol Q ; ist sie zeitlich veränderlich, schreiben wir für den Momentanwert q .

Zum Nachweis elektrischer Ladungen benützt man ein Elektroskop (Bild 3.1). In ein Metallgehäuse 1 ragt ein isoliert angebrachter Metallbolzen 2, der außerhalb des Gehäuses eine Kugel 3 tragen kann. Am Bolzen hängen unten zwei dünne Metallblättchen. Lässt man – etwa von einem bereits geladenen Körper – Ladungen auf die Kugel abfließen, so lädt sich das System Kugel-Bolzen-Blättchen auf. Infolge der gegenseitigen Abstoßung der Ladungen spreizen sich die beiden Metallblättchen umso mehr auseinander, je größer die vorhandene Ladung ist. Derartige Instrumente gibt es in vielen Abwandlungen, s. Abschn.3.1.2.6, Anwendungen.

Quantitative Versuche zur Bestimmung der Kräfte zwischen geladenen Körpern erfordern höheren experimentellen Aufwand, nämlich eine so genannte Drehwaage (Bild 3.2). An dem Torsionsfaden 1 ist ein Arm mit der Kugel 2 zur Aufnahme von Ladungen angebracht.

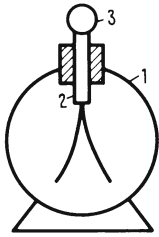


Bild 3.1
Elektroskop

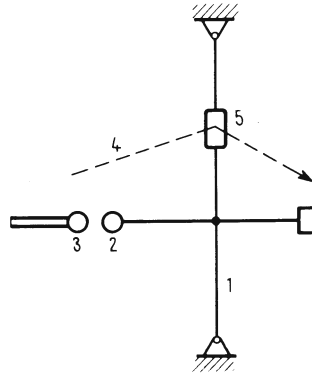


Bild 3.2
Drehwaage

Die bei Annäherung einer zweiten geladenen Kugel 3 erfolgende Anziehung oder Abstößung wird über einen Lichtstrahl 4, der vom Spiegel 5 reflektiert wird, angezeigt.

Coulombsches Gesetz¹⁾. Vereinbarungsgemäß ist die Kraft zwischen zwei Ladungen Q_1 und Q_2 diesen Ladungen proportional:

$$F \sim Q_1 Q_2$$

Über die Abhängigkeit dieser Kraft vom Abstand r der Ladungen liefern quantitative Versuche die Aussage, dass die Kraft dem Quadrat des Abstandes r umgekehrt proportional ist

$$F \sim \frac{1}{r^2}$$

Beide Proportionalitäten sind im Coulombschen Gesetz zusammengefasst:

$$F = a \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \quad (3.1)$$

worin a eine Konstante ist. Dieses Gesetz erinnert in seiner Form an das Newtonsche Gravitationsgesetz (Abschn. 1.4.2).

Wahl der Einheiten. Zahlenwert und Einheit der Proportionalitätskonstanten a im Coulombschen Gesetz, Gl. (3.1), hängen von der Wahl der Einheiten für die Ladung ab. Würde man die Konstante z.B. gleich Eins setzen, so würde sich aus Gl. (3.1) für die elektrische Ladung $Q = \sqrt{\text{Kraft} \times \text{Länge}^2}$ eine aus Einheiten der Mechanik abgeleitete Einheit ergeben. Im cgs-System²⁾ erhält man so für die Einheit der Ladung

$$1 \text{ g}^{1/2} \text{ cm}^{3/2} \text{ s}^{-1}$$

Solche aus der Mechanik abgeleiteten Einheiten für elektrische Größen sind unanschaulich. Im internationalen Einheitensystem (SI)²⁾ wird daher durch die Einführung einer vierten – elektrischen – Basisgröße (deren Einheit Ampere, s. Abschn. 3.2) das Einheitensystem der Mechanik auf kohärente elektrische und magnetische Einheiten ergänzt. Mit der vierten Basisgröße ergibt sich für die

Einheit der elektrischen Ladung

$$1 \text{ Coulomb} = 1 \text{ C}$$

¹⁾ Charles A. de Coulomb (1736 bis 1806).

²⁾ s. Anhang, Einheiten und Einheitensysteme.

Diese Einheit ergibt zwar unbequem kleine Zahlenwerte (s. Beispiel 1 in Abschn. 3.1.2.1); jetzt ist es aber möglich, die Proportionalitätskonstante des Coulombschen Gesetzes festzulegen. Dabei hat es sich als zweckmäßig erwiesen, sie in der folgenden Form

$$a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

einzuführen. Durch das Zerlegen der Konstante a in die Zahl $1/(4\pi)$ und eine neue Konstante $1/\epsilon_0$ wird der Kugelsymmetrie des Feldes einer Punktladung Rechnung getragen, so dass sich bei Berechnung der charakteristischen Feldgrößen (s. Abschn. 3.1.2) besonders einfache Gleichungen ergeben. Mit der Schreibweise

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r_2^2} \quad (3.2)$$

für Gl. (3.2) ergibt sich die

Influenzkonstante oder elektrische Feldkonstante

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}$$

Für die Konstante $a = 1/(4\pi\epsilon_0)$ ergibt sich somit

$$a = 8,988 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$$

3.1.1.1 Elementarladung

Misst man die Ladung kleinster Körper, etwa nach der von Millikan durchgeführten Methode (s. Abschn. 3.1.2.8), so erhält man stets ein ganzzahliges Vielfaches desselben Wertes. Das bedeutet, dass jede Ladung aus kleinsten, nicht mehr unterteilbaren Einheiten besteht. Deren Ladung ist die so genannte

$$\text{Elementarladung } e_0 = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Träger dieser Elementarladung sind in der Hülle des Atoms die Elektronen mit der Ladung $-e_0$ und der Masse $m_e = 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, während die positiven Kerne der Wasserstoffatome, die so genannten Protonen, die Ladung $+e_0$ und die Masse $m_p = 1,672 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ haben.

Die beweglichen Ladungsträger sind bis auf spezielle Ausnahmen die Elektronen.

Neutrale Körper enthalten außer diesen ebenso viele positive Ladungsträger (s. Abschn. 6). In Halbleitern gibt es neben den Elektronen positiv geladene Löcher (s. Abschn. 7.4.3) und in Gasentladungen positiv geladene Ionen (s. Abschn. 3.2.6.2). Die Ladung eines makroskopischen Körpers ist durch Überschuss oder Mangel an solchen negativen oder positiven Ladungsträgern verursacht.

3.1.1.2 Leiter – Nichtleiter

□ **Versuch 3.** Verbindet man die Kugel eines geladenen Elektroskops (Bild 3.1) und dessen Gehäuse mit einem metallischen Gegenstand, so fallen die Blättchen des Elektroskops sogleich zusammen. Die Ladungen sind durch das Metall zum Gehäuse abgeflossen, das Elektroskop ist entladen. Nimmt man an Stelle des Metalls einen isolierenden Körper, z.B. aus Glas oder Kunststoff, so bleibt der Ladungszustand erhalten. □

In grober Weise kann man die Körper unterteilen in Leiter, durch die elektrische Ladungsträger leicht „hindurchwandern“ können, und Nichtleiter oder Isolatoren, in denen dies nur in sehr geringem Maße möglich ist. Die Zahl der frei beweglichen Ladungsträger, der Elektronen, in einem Stoff ist außerordentlich groß. Metalle besitzen $10^{22} \dots 10^{23}$ freie Elektronen pro Kubikzentimeter. Je nach Zahl und Beweglichkeit dieser freien Ladungsträger gibt es jede Abstufung zwischen den besten Leitern und dem nicht realisierbaren Extremfall völliger Isolation. Zu den Leitern zählen Metalle sowie Salze in Lösung oder in flüssiger Phase. Keramische Stoffe, Glas, Glimmer, viele Kunststoffe sowie Öle gehören in die Gruppe der Isolatoren.

Der Begriff Halbleiter wurde eingeführt für Körper, bei denen die Zahl der freien Ladungsträger von äußeren Einflüssen (z.B. der Temperatur) abhängt (s. Abschn. 7.4.3).

Aufgaben zu Abschn. 3.1.1

- Zwei an langen Fäden aufgehängte Schaumstoffkugeln befinden sich im Abstand 10 cm voneinander. Beide sind negativ geladen mit je einer Ladung 10^{-8} C.
 - Mit welcher Kraft stoßen sie sich gegenseitig ab?
 - Träger der Ladung sind Elektronen. Wie viele überschüssige sind auf jeder Kugel?
- Welche Kraft üben zwei Ladungen 1 C im Abstand 1 km aufeinander aus?

3.1.2 Elektrisches Feld

3.1.2.1 Elektrische Feldstärke

Auf eine Probeladung Q übt nach dem Coulombschen Gesetz Gl. (3.2) ein geladener Körper eine bestimmte Kraft aus. Der Quotient aus dieser Kraft und der Ladung des Probelkörpers ist eine für das elektrische Feld an diesem Ort charakteristische Größe; wir nennen sie die elektrische Feldstärke. (Zum Begriff Feld und Feldstärke siehe auch Abschn. 1.4.3 und 3.3.5.7.)

Definition:

$$\text{Elektrische Feldstärke} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Ladung}}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q}$$

(3.3)

Damit ist die

$$\text{Kraft auf eine Ladung } \vec{F} = Q\vec{E}$$

Die Feldstärke ist wie die Kraft ein Vektor; \vec{E} hat die Richtung der Kraft \vec{F} , da Q ein Skalar ist. Wir beschreiben ein elektrisches Feld anschaulich mit Hilfe von Feldlinien, die in jedem Punkt des Raumes die Richtung der Feldstärke angeben (Bild 3.3). Auf einer Feldlinie bewegen wir uns also, wenn wir von einer Ladung zur entgegengesetzten, immer in Richtung der Feldstärke, fortschreiten. Diese Feldlinien haben keine Realität, sondern sind nur eine zeichnerische Darstellung des Kraftfeldes, (Im Übrigen s. Abschn. 1.4.3). Elektrische Feldlinien sind somit Verbindungslinien zwischen positiven und negativen Ladungen, sind also weder in sich geschlossen¹⁾, noch enden sie je im freien Raum. Als positive Richtung der Feldlinien wurde die Richtung von der positiven zur negativen Ladung vereinbart.

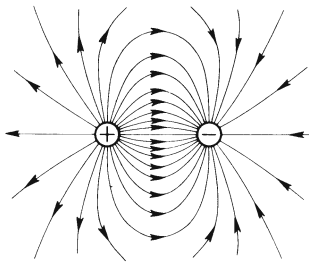


Bild 3.3 Feldlinienbild des Feldes zweier gleich großer ungleichartiger Ladungen

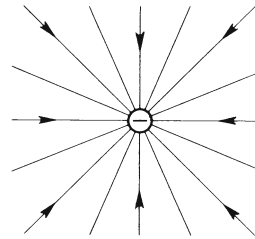


Bild 3.4 Elektrisches Feld einer negativen Punktladung

Feld einer Punktladung. Für das kugelsymmetrische Feld einer einzelnen Punktladung Q_1 ergibt sich aus dem Coulombschen Gesetz die Feldstärke

$$E = \frac{F}{Q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r^2} \quad (3.5)$$

Die Feldlinien einer einzelnen Punktladung (Bild 3.4) verlaufen geradlinig radial und symmetrisch. Die Feldstärke nimmt mit dem Quadrat der Entfernung von der Punktladung ab, ebenso die Dichte der Kraftlinien. Veranschaulicht man das elektrische Feld durch Kraftlinien, so ist die Dichte der Kraftlinien ein relatives Maß für die Stärke des elektrischen Feldes; je enger die Kraftlinien beieinander liegen, umso größer ist die Feldstärke.

Beispiel 1. Das elektrische Feld einer geladenen Kugel ist mit dem einer Punktladung identisch (s. Abschn. 3.1.2.4). Wie groß ist die Feldstärke in 10 cm Abstand vom Mittelpunkt einer Kugel, die die Ladung $Q_1 = 10^{-8}$ C trägt und deren Radius < 10 cm ist?

Die Feldstärke einer Punktladung ist

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r^2} = \frac{1 \text{ Nm}^2}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2} \frac{10^{-8} \text{ C}}{10^{-2} \text{ m}^2} = 9,0 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

Die Kraft auf einen Körper mit der Ladung $Q = 10^{-9}$ C in 10 cm Abstand von der Kugel beträgt

$$F = EQ = 9,0 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{C}} \cdot 10^{-9} \text{ C} = 9,0 \cdot 10^{-6} \text{ N}$$

¹⁾ Ausnahme s. Abschn. 3.3.6.

Homogenes Feld. Hat die Feldstärke in einem Raum überall gleichen Betrag und gleiche Richtung, so ist das Feld homogen. Ein derartiges Feld besteht z.B. zwischen zwei parallelen, elektrisch geladenen Platten, wenn man die Randgebiete ausschließt. Die Feldlinien sind (Bild 3.5) parallele Geraden, die senkrecht auf den Platten stehen.

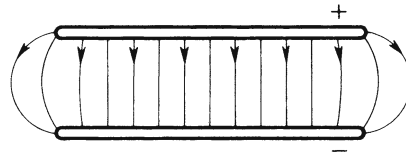


Bild 3.5 Homogenes elektrisches Feld (ohne Randgebiete)

3.1.2.2 Elektrische Spannung und Potential

In einem beliebigen inhomogenen Feld soll eine Probeladung Q längs der Wege $\Delta\vec{s}_1$ bis $\Delta\vec{s}_N$ vom Punkt A zum Punkt B verschoben werden (Bild 3.6). Auf jedem Wegstück $\Delta\vec{s}_i$ wirkt dabei auf sie jeweils die Kraft $\vec{F}_i = Q\vec{E}_i$. Es wird hier also gegen die jeweiligen Feldkräfte durch die angreifenden Kräfte $-\vec{F}_i$ die Arbeit $\Delta W_i = -\vec{F}_i \cdot \Delta\vec{s}_i$ verrichtet (vgl. Abschn. 1.3.4.1). Die gesamte Arbeit ergibt sich demnach als

$$W_{AB} = \sum_{i=1}^N \Delta W_i = - \sum_{i=1}^N Q \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{s}_i \quad (3.6)$$

und im allgemeinen Fall, wenn die Feldstärke \vec{E} sich kontinuierlich längs des Verschiebungsweges ändert, als

$$W_{AB} = - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = -Q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (3.7)$$

In Gl. (3.7) ist das Integral ein so genanntes Linienintegral längs des Weges, auf dem die Ladung transportiert wird, d.h. zu integrieren sind alle skalaren Produkte $\vec{E} \cdot d\vec{s} \cos \angle(\vec{E}; d\vec{s})$.

Diese Arbeit ist unabhängig davon, auf welchem Weg die Ladung vom Punkt A zum Punkt B gelangt, wie hier nicht gezeigt werden soll. Sie hängt also nur von der Lage beider Punkte im elektrischen Feld und von der Ladung Q ab. Man erhält nun eine für das jeweilige Feld charakteristische Größe, die auch von der Probeladung Q unabhängig ist, wenn man die Arbeit W_{AB} durch die Ladung Q teilt:

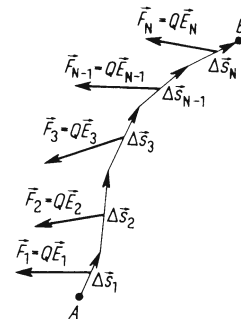


Bild 3.6 Verschiebung einer Ladung Q im elektrischen Feld

Definition: Die Größe

$$U_{AB} = \frac{W_{AB}}{Q} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (3.8)$$

nennt man die elektrische Spannung zwischen den Punkten A und B im elektrischen Feld. Sie ist der Quotient aus der bei der Verschiebung der Ladung Q vom Punkt A zum Punkt B gewonnenen potentiellen Energie W_{AB} und der Ladung Q . Die Spannung U hängt bei gegebenem Feld nur von der Lage der Punkte A und B ab.

Die Dimension der Spannung ist Arbeit pro Ladung.

Ist die Spannung zeitlich veränderlich, so schreiben wir für den Momentanwert der Spannung den Formelbuchstaben u .

Um unter Arbeitsaufwand eine Ladung Q von einem Punkt A aus sehr weit weg zu bringen ($B \rightarrow \infty$), bedarf es im Allgemeinen keiner unendlich großen Arbeit, da die meisten elektrischen Feldstärken für große Entfernungen von den sie erzeugenden Ladungen gegen Null gehen (vgl. Abschn. 3.1.2.1 Feld einer Punktladung). Diese Arbeit ist nach Gl. (3.7)

$$W_{AB} = W_{A\infty} = -Q \int_A^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (3.9)$$

Umgekehrt hat eine Ladung Q , die aus sehr großer Entfernung (von $B = \infty$) zum Punkt A gebracht wurde, die potentielle Energie

$$W_{\infty A} = -Q \int_{\infty}^A \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (3.10)$$

Man erhält nun eine nur für den Punkt A im gegebenen elektrischen Feld charakteristische Größe, wenn man, wie oben, $W_{\infty A}$ durch Q teilt:

Definition: Die Größe

$$\varphi_{\text{el}}(A) \frac{W_{\infty A}}{Q} = - \int_{\infty}^A \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (3.11)$$

nennt man das elektrische Potential des Punktes A im elektrischen Feld. Es ist gleich dem Quotienten aus der potentiellen Energie $W_{\infty A}$ einer beliebigen Ladung Q , die sich am Punkt A im elektrischen Feld befindet, und dieser Ladung. $\varphi_{\text{el}}(A)$ hängt nur von der Lage des Punktes A im vorgegebenen elektrischen Feld ab.

Haben zwei Punkte A und B die elektrischen Potentiale $\varphi_{\text{el}}(A)$ und $\varphi_{\text{el}}(B)$, so ist ihre Potentialdifferenz

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{el}}(B) - \varphi_{\text{el}}(A) &= - \int_{\infty}^B \vec{E} \cdot d\vec{s} - \left(- \int_{\infty}^A \vec{E} \cdot d\vec{s} \right) \\ &= - \int_B^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{\infty}^A \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} \end{aligned}$$

Dies ist aber gemäß der Definitionsgleichung (3.8) die Spannung U_{AB} .

Die Potentialdifferenz $\varphi_{\text{el}}(B) - \varphi_{\text{el}}(A)$ ist gleich der Spannung zwischen den Punkten A und B .

Häufig setzt man das Potential eines bestimmten Leiters gleich Null, z.B. das der Erde. Dann ist die Spannung irgendeines Raumpunktes gegenüber diesem Bezugspunkt gleich dem Potential des Raumpunktes. Solche Potentiale und Potentialdifferenzen oder Spannungen spielen in der Elektrotechnik eine außerordentliche Rolle, z.B. die auf Erde bezogenen Netzspannungen. Sie sind mit Spannungsmessern (s. Abschn. 3.1.2.2) direkt messbar.

Einheiten. Man hat für die Einheit 1 Nm/C die Einheitenbenennung

$$1 \text{ Nm/C} = 1 \text{ Volt} = 1 \text{ V}$$

eingeführt, d.h. sowohl Spannungen als auch Potentiale werden in Volt gemessen.¹⁾

Beispiel 2. Eine Batterie mit der Spannung $U = 100 \text{ V}$ ist leitend mit zwei parallelen Platten verbunden. Zwischen den Platten, die den Abstand 1 cm haben, befindet sich ein homogenes elektrisches Feld. Im homogenen Feld ist nach Gl. (3.8) $U = E \cdot s$ und die Feldstärke überall gleich groß, nämlich gleich $E = U/s = 100 \text{ V}/10^{-2} \text{ m} = 10^4 \text{ V/m}$. Vergrößert man den Abstand auf das Doppelte, so sinkt die Feldstärke auf die Hälfte.

Beispiel 3. Im Abstand $r_1 = 5,29 \cdot 10^{-11} \text{ m}$ (so genannter Bohrscher Radius s. Abschn. 6.1.2.1) von dem mit einer Elementarladung positiv geladenen Kern eines Wasserstoffatoms besteht – bezogen auf den Abstand unendlich – das Potential

$$\varphi_{\text{el}} = - \int_{\infty}^{r_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{e_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^{r_1} \frac{1}{r^2} dr = - \frac{e_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} \right) = - \frac{e_0}{4\pi\epsilon_0 r_1} = 27,2 \frac{\text{Nm}}{\text{C}}$$

Die potentielle Energie eines Elektrons auf einer Bahn um den Radius r_1 ist dann

$$W_{\text{pot}\infty} = - e_0 \varphi_{\text{el}} = - e_0^2 / (4\pi\epsilon_0 r_1) = - 4,35 \cdot 10^{-18} \text{ Nm}$$

Mit Hilfe des Josephson-Effektes (s. Abschn. 7.4.5) lässt sich heute das Volt aus einer sehr genau möglichen Frequenzmessung mit Hilfe der Gleichung $2 e_0/h = 483597,9 \text{ GHz/V}$ bestimmen. Dabei ist $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$ die Plancksche Konstante (s. Abschn. 5.3). Auf diese Weise ist die Einheit 1 Volt mit der relativen Messunsicherheit 10^{-10} darstellbar. Dies bedeutet, dass für die Kohärenz des Internationalen Einheitensystems (s. Abschn. 3.2.2.7) die Definition der Einheit 1 Volt für die Einheitengleichung (3.57) bestimmend ist.

3.1.2.3 Äquipotentialflächen

Verbindet man in einem elektrischen Feld die Punkte gleichen Potentials, so erhält man so genannte Äquipotentialflächen. Zusammen mit den Kraftlinien gestatten sie eine besonders anschauliche Darstellung elektrischer Felder. Um elektrische Ladungen auf einer Äquipotentialfläche zu verschieben, ist keine Arbeit aufzuwenden, denn alle Punkte auf einer Äquipotentialfläche haben die Potentialdifferenz Null, d.h. die Spannung zwischen ihnen ist gleich Null. In Gl. (3.8) muss $\int_{\text{A}}^{\text{B}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$ sein. Dies ist nur möglich, wenn $\cos \angle(\vec{E} \cdot d\vec{s}) = 0$ ist. Das bedeutet, dass die Äquipotentialfläche, in der ja alle $d\vec{s}$ liegen, immer rechtwinklig zu den Feldlinien steht.

Ergänzt man die Darstellungen des Feldes einer Punktladung und des homogenen Feldes durch Einzeichnen von Äquipotentiallinien (Schnittkurven der Äquipotentialflächen mit der Zeichenebene), so erhält man die Bilder 3.7a und 3.7b. Je näher die Äquipotentiallinien beieinander liegen, d.h. je kleiner

¹⁾ Alessandro Graf Volta (1745 bis 1827).

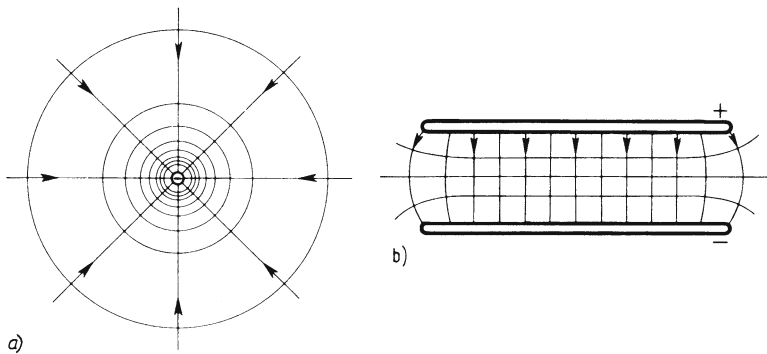


Bild 3.7 Feld- und Äquipotentiallinien des elektrischen Feldes
 a) einer Punktladung
 b) von Ladungen auf zwei parallelen Platten (homogenes Feld)

der Abstand zwischen zwei Potentialen ist, desto größer ist mit Gl. (3.8) die elektrische Feldstärke E . Wie bei den Feldlinien ist also auch bei den Äquipotentiallinien der Abstand ein relatives Maß für die Feldstärke, wenn immer die gleiche Potentialdifferenz zwischen benachbarten Potentiallinien besteht.

3.1.2.4 Ladungsverteilung

In makroskopischen Körpern ist die Lage der einzelnen Ladungsträger nicht feststellbar. Die mittlere Verteilung der Ladung im Innern eines Körpers wird durch die Raumladungsdichte ρ angegeben.

Definition: Die Raumladungsdichte ist der Quotient aus der Teilladung in einem Teilvolumen und diesem Teilvolumen.

$$\rho = \frac{\Delta Q}{\Delta V}$$

Dabei darf ΔV nicht so klein gewählt werden, dass es atomare Dimensionen annimmt, da sich sonst ΔQ sprunghaft ändern würde. Die Raumladungsdichte ist bei Körpern mit geringer Beweglichkeit der elektrischen Ladungen, z.B. bei Elektrolyten oder Halbleitern, von Bedeutung.

Überschüssige Ladungsträger gleichen Vorzeichens im Innern eines Leiters stoßen sich gegenseitig ab. Möglichst weit auseinander strebend, wandern sie an die Begrenzungsflächen. Dort hört die Bewegung erst auf, wenn keine Kraftkomponente mehr parallel zur Oberfläche vorhanden ist. Dann ist die Feldstärke und die Raumladungsdichte im Innern des Leiters Null geworden, und auf den Begrenzungsflächen ist die Richtung der Feldstärke überall senkrecht zur Oberfläche.

Da somit überschüssige Ladungen eines Leiters stets nur auf der Oberfläche sind, ist es für Leiter wenig sinnvoll, bei der Einführung der Ladungsdichte die Zahl der Ladungsträger auf das Volumen zu beziehen. Dem entsprechen wir mit folgender

Definition: Die Flächenladungsdichte ist der Quotient aus der Teilladung auf einer Teilfläche und dieser Teilfläche.

$$\sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta A} \quad (3.12)$$

Dabei gilt für ΔA die gleiche Bedingung wie für die Abmessungen von ΔV .

Ist die Oberfläche des Körpers eine Kugel, so verteilen sich die Ladungen darauf gleichmäßig. Damit wird

$$\sigma = \frac{\text{Gesamtladung}}{\text{Oberfläche der Kugel}} = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

mit R als Radius der Kugel. Nach Gl. (3.5) ist die Feldstärke des kugelsymmetrischen Feldes der Punktladung Q gleich $E = Q/4\pi\epsilon_0 r^2$. Diese Feldstärke ist auf jeder Kugeloberfläche mit dem Radius r konstant.

□ **Versuch 4.** Man lädt eine Reihe von Metallkugeln mit verschiedenen Durchmessern alle gleich auf. Misst man die elektrische Feldstärke der Felder der verschiedenen Kugeln jeweils gleich weit vom Mittelpunkt mit einer Drehwaage, so stellt man bei allen Versuchen den gleichen Wert fest. □

Es ist demnach gleichgültig, ob die Ladung Q in einem Punkt konzentriert oder z.B. auf einer Kugeloberfläche mit dem Radius r gleichmäßig verteilt ist. Wir können also oben $r = R$ setzen und erhalten für die Flächenladungsdichte

$$\sigma = \epsilon_0 E \tag{3.13}$$

Die Flächenladungsdichte ist dem Betrag der elektrischen Feldstärke proportional.

Diese Gleichung verbindet die Ursache des elektrischen Feldes (Ladung) mit dessen Wirkung (Kraft auf Ladung).

Durch Messung der Feldstärke in einem homogenen Feld zwischen zwei geladenen Platten, wobei man Fläche und Ladung variiert, erhält man den gleichen Zusammenhang. Gl. (3.13) gilt also auch für ein homogenes Feld.

Verbindet man eine große und eine kleine Kugel leitend miteinander und lädt sie auf, so misst man unmittelbar über der Oberfläche der kleineren Kugel eine größere Feldstärke als über der größeren. Dagegen ist das Potential überall gleich. Allgemein gilt für beliebig geformte Leiter, dass die elektrische Feldstärke und mit Gl. (3.13) die Flächenladungsdichte an Stellen mit kleinem Krümmungsradius größer ist als an Stellen mit großem Krümmungsradius. An Spitzen kann die Feldstärke so groß werden, dass Austritt von Ladungsträgern und Entladung z.B. durch die Luft, die so genannte Spitzenentladung, eintritt.

Anwendungen. Für den Austritt von Elektronen aus Metallen benötigt man Feldstärken von ca. 10^9 V/m. In feinen Metallspitzen mit Radien kleiner als $1\ \mu\text{m}$ erreicht man schon mit Spannungen von einigen Hundert Volt so große Feldstärken. Zur Erzeugung von freien Elektronen im Hochvakuum finden solche Metallspitzen als so genannte Feldkathoden Verwendung. Zu stillen Vorentladungen führt die hohe Feldstärke an der Spitze von Blitzableitern. Damit wird ein Ladungsausgleich ermöglicht, ohne dass es zur Ausbildung einer starken Funkenentladung – des Blitzes – kommt. Zur Verhinderung von durch hohe Feldstärken hervorgerufenen Entladungen vermeidet man bei Anlagen mit hohen Spannungen scharfkantige Teile und führt sie mit größeren Radien aus.

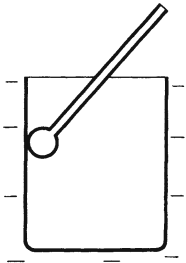


Bild 3.8 Faraday-Behcher

Bringt man Ladungen, etwa mit Hilfe einer an einem Stab aus Isolationsmaterial angebrachten Kugel an die Innenseite eines leitenden Hohlkörpers, so fließen diese sofort auf dessen Außenseite ab. So kann eine völlige Abgabe der Ladungen erreicht werden (Bild 3.8).

Metallische Körper – meist genügen engmaschige Gitter – werden als so genannte Faraday-Käfige auch zur Abschirmung äußerer elektrischer Felder verwendet. Das Innere eines derartigen Käfigs ist feldfrei.

Anwendungen. Im Innern von Faradayschen Käfigen können z.B. Beobachtungspersonen in die Nähe von hochspannungsführenden Teilen gebracht werden. Die Innenräume von Flugzeugen oder Kraftfahrzeugen bieten als feldfreie Räume Schutz vor Blitzschlag. In vielen Geräten der Nachrichtentechnik wird durch metallische Abschirmungen der Schutz vor störenden äußeren elektrischen Feldern erreicht.

3.1.2.5 Grundgleichung des elektrischen Feldes

Wie wir in den vorhergegangenen Abschnitten gesehen haben, ist die Ursache des elektrischen Feldes die Ladung. Die Wirkung des Feldes ist die Kraft auf elektrische Ladungen, ausgedrückt durch die elektrische Feldstärke. Beliebige inhomogene Felder kann man sich zusammengesetzt denken aus lauter genügend kleinen Bereichen homogener Felder. Man kann sich vorstellen, dass diese homogenen Felder durch die Ladungen erzeugt werden, die auf zwei parallelen Platten sitzen, die diese kleinen Bereiche begrenzen. Sie sind so geladen, dass zwischen ihnen die gleiche Feldstärke herrscht, die ohne die Platten vorhanden wäre. Diese ist nach Gl. (3.13) $E = \sigma/\epsilon_0$, sie hängt also von der Flächenladungsdichte ab. Es leuchtet ein, dass nicht nur die Flächenladungsdichte, sondern auch die Stellung der Platten im Raum eine Rolle spielt. Es ist deshalb notwendig, eine vektorielle Größe an Stelle der skalaren Flächenladungsdichte einzuführen. Um auszudrücken, dass diese Größe für die Ursache des elektrischen Feldes steht, nennt man sie elektrische Erregung. Der Betrag ihrer Normalkomponente ist gleich der Flächenladungsdichte.

Wir vereinbaren folgende

Definition: Zwei parallele Platten haben je die Fläche A und die Ladungen $+Q$ und $-Q$. Ihre elektrische Erregung \vec{D} ist ein Vektor mit dem Betrag $D = \sigma = Q/A$ und der Richtung der Flächennormalen von der positiven Platte zur negativen Platte. Dann gilt für diese vektorielle elektrische Erregung mit Gl. (3.13) die Grundgleichung des elektrischen Feldes:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \quad (3.14)$$

Man kann in dem erwähnten inhomogenen Feld jedem Punkt auch ohne das Vorhandensein von Platten einen Vektor \vec{D} mit geeignetem Betrag und geeigneter Richtung zuordnen, also gilt:

Die elektrische Erregung \vec{D} ist wie die elektrische Feldstärke eine Größe, die das elektrische Feld beschreibt.

¹⁾ Gilt nur im materiefreien Raum. Ansonsten siehe Gl. (3.24).

Wenn man die Verteilung von Ladungen kennt, so kann man die durch diese bewirkte Feldstärke an einem beliebigen Ort des Feldes berechnen, z.B. für eine Punktladung mittels Gl. (3.5). Aus der Kenntnis der Feldstärke an einem bestimmten Ort lässt sich jedoch nicht eindeutig die Ladungsverteilung ermitteln, die diese bewirkt. So ist beispielsweise nicht zu unterscheiden, ob die Ladung auf einem Punkt oder einer Kugelschale um diesen Punkt sitzt, wenn beide weit genug vom Messort entfernt sind. Es ist deshalb zweckmäßig, sich jeweils am Ort der bestimmten Feldstärke eine elektrische Erregung zu denken, die genau die vorhandene Feldstärke hervorruft. Man ersetzt also die Fernwirkung einer Ladungsverteilung durch eine immer eindeutige Nahwirkung. Die elektrische Erregung nimmt mit dem Abstand zur Punktladung ab. Wenn man das Feld durch \vec{D} -Linien darstellt (Bild 3.9), zeigt sich dies durch die abnehmende D -Liniendichte anschaulich. Im Abstand r von der Ladung q beträgt die elektrische Erregung $D = \frac{q}{4\pi r^2}$.

Definition: Integriert man alle zu den jeweiligen Teilflächen $d\vec{A}$ im Feld senkrecht stehenden Komponenten der elektrischen Erregung \vec{D} über die Fläche A , so erhält man den

$$\text{elektrischen Erregungsfluss } \psi_{\text{el}} = \int_A D_N \cdot dA = \int_A \vec{D} \cdot d\vec{A} \quad (3.15)$$

durch diese Fläche.¹⁾

Wenn wir uns die Teilfläche A zu einer geschlossenen Hülle A_H , z.B. einer Kugel, um die Ladung Q ergänzt denken, so erfasst diese den gesamten von Q ausgehenden Erregungsfluss, den so genannten

$$\text{Hüllenfluss } \psi_{\text{Hülle}} = \int_{A_H} \vec{D} \cdot d\vec{A} \quad (3.16)$$

Für die Punktladung in Bild 3.9 ist dieser mit Gl. (3.16)

$$\psi_{\text{Hülle}} = \oint_{A_H} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{4\pi r^2} 4\pi r^2 = Q$$

Allgemein gilt

$$\psi_{\text{Hülle}} = \oint_{A_H} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \sum_i^N Q_i \quad (3.17)$$

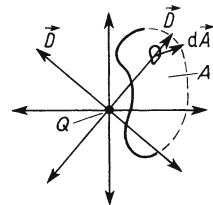


Bild 3.9 Feld der Punktladung, dargestellt durch \vec{D} -Linien, und Ermittlung des elektrischen Erregungsflusses

Gaußscher²⁾ Satz: Der durch eine beliebige geschlossene Fläche gehende Hüllenfluss ist gleich der Summe der von der Fläche umschlossenen Ladungen.

Der Gaußsche Satz eignet sich besonders gut zur Berechnung der Feldstärken und Spannungen um eine bestimmte Ladungsverteilung sowie zur Berechnung von Kapazitäten (s. Beispiel 4 in Abschn. 3.1.2.7). Voraussetzung ist jedoch, dass aus der Verteilung der Ladung der Feldlinienverlauf im Raum eindeutig hervorgeht.

¹⁾ Der Vektor $d\vec{A}$ hat den Betrag des Flächenelementes dA und steht senkrecht auf diesem.

²⁾ Karl Friedrich Gauß (1777 bis 1855).

Aufgaben zu Abschn. 3.1.2.1 bis 3.1.2.5

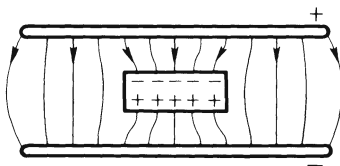
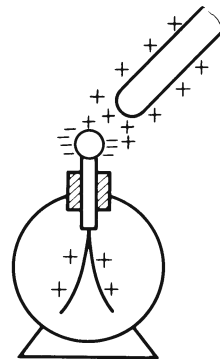
1. Die Feldstärke des elektrischen Feldes der Erde beträgt auf der Erdoberfläche $E = 100 \text{ V/m}$. Die Richtung zeigt auf den Erdmittelpunkt. Wie groß ist die Gesamtladung und die Flächenladungsdichte der Erde?
2. Welche Arbeit muss aufgewendet werden, wenn man zwei gleichartige Ladungen von je 10^{-5} C einander von einer Entfernung $r_1 = 1 \text{ m}$ auf $r_2 = 0,1 \text{ m}$ nähert?

3.1.2.6 Elektrische Influenz

Bringt man einen Leiter in ein elektrisches Feld, so wirken auf die frei beweglichen Ladungsträger des Leiters Kräfte. Unter dem Einfluss dieser Kräfte bewegen sich die negativen Ladungsträger (meist handelt es sich um Elektronen) entgegen, positive in der Feldrichtung. In dem vorher neutralen Leiter tritt eine Ladungstrennung auf, es entsteht ein dem ursprünglichen Feld entgegengerichtetes Feld.

Man nennt die durch ein äußeres elektrisches Feld in elektrischen Leitern hervorgerufene Ladungstrennung Influenz.

Das äußere sowie das influenzierte Feld überlagern sich, und die Bewegung von Ladungsträgern hört erst auf, wenn das resultierende Feld überall im Leiter gleich Null ist (Bild 3.10). Im Leiter herrscht dann überall das gleiche Potential. Die Aufrechterhaltung eines elektrischen Feldes in einem Leiter ist dagegen nur möglich, wenn laufend von außen Ladungen nachgeschoben werden, wenn also künstlich eine Potentialdifferenz aufrecht erhalten wird.

**Bild 3.10** Influenz**Bild 3.11** Influenzierte Ladung eines Elektroskops

□ **Versuch 5.** Nähert man einen geriebenen Glasstab der Kugel eines ungeladenen Elektroskops, ohne diese jedoch zu berühren, so spreizen sich sogleich die beiden Metallblättchen (Bild 3.11). Im Feld der Glasstange haben sich die negativen Ladungsträger zur Kugel bewegt. Die positiven bleiben auf den Blättchen, so dass diese sich infolge der Abstoßung der gleichartigen Ladungen auseinanderspreizen. Sobald man den Glasstab entfernt, verschwindet die influenzierte Ladungstrennung, die Blättchen liegen wieder aneinander. □

Mit der Influenz ist auch die Anziehung eines ungeladenen Körpers durch einen geladenen erklärbar. Das elektrische Feld des geladenen influenziert im ungeladenen Körper ein

umgekehrt gerichtetes Feld. In der ungeladenen Materie konzentrieren sich die zum ersten Körper ungleichartigen Ladungen auf der diesem zugewandten Seite. Der Körper wird polarisiert. In der Nähe des geladenen Stabes ist das Feld sehr inhomogen; die Feldstärke nimmt mit der Entfernung stark ab. Die ungleichartigen Ladungen werden also durch die Ladung des ersten Körpers mehr angezogen als die weiter entfernten gleichartigen abgestoßen. Insgesamt resultiert also eine anziehende Kraft. Diese Erscheinung tritt auch bei Nichtleitern auf; hier wird die Polarisation durch die Verschiebung von Ladungen innerhalb der Moleküle bewirkt.

Die Influenz spielt bei fast allen elektrostatischen Erscheinungen eine wichtige Rolle. Sie ist ein bedeutsames Mittel zum Nachweis elektrischer Felder.

□ **Versuch 6.** Wenn man zwei sich berührende elektrisch neutrale Metallkugeln in ein elektrisches Feld bringt, lädt sich durch Influenz die eine negativ, die andere positiv auf. Trennt man die Kugeln noch im Feld und nimmt sie einzeln heraus – beides geschieht unter Arbeitsaufwand – so erhält man zwei gleich stark aber entgegengesetzt geladene Kugeln, da die Ladungen erhalten bleiben. □

Anwendungen. Nach dem in Versuch 6 gezeigten Prinzip arbeitet die Influenzmaschine. In steter Folge werden auf metallischen Flächen influenzierte Ladungen von sich drehenden Scheiben in das Innere von leitenden Kugeln „abgestreift“ und diese kontinuierlich aufgeladen. Die Erzeugung sehr hoher Spannungen – mehrere Millionen Volt – durch Aufladung ist technisch im Bandgenerator nach van de Graaff¹⁾ verwirklicht (Bild 3.12). Ein endloses breites Band 1 aus einem isolierenden Material läuft über zwei Rollen 2, 3, davon eine im Innern der Kugel 4. Die andere Rolle 3 wird durch einen kleinen Elektromotor angetrieben. Auf das Band 1 werden durch einen metallischen Pinsel 5 Ladungen, entweder aus einer Batterie oder durch Reibung getrennt, gebracht. Der Pinsel 6 nimmt sie ab und führt sie vollständig an die metallische Kugel 4 ab, wo sie sich auf der Oberfläche ansammeln. Durch die ununterbrochene Aufladung steigt die Spannung der Kugel auf einen nur durch die Isolation der Kugel begrenzten Wert.

In der Form der so genannten statischen Voltmeter sind geeichte Elektroskope, auch Elektrometer genannt, in der Technik verbreitet.

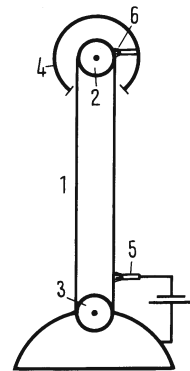


Bild 3.12 Bandgenerator nach van de Graaff

3.1.2.7 Kapazität

Wir wollen zwei gegeneinander isolierte Leiter betrachten, zwischen denen ein elektrisches Feld besteht. Eine solche Anordnung, ein so genannter Kondensator, ist von großer technischer Bedeutung. Man kann damit nämlich Ladungen und elektrische Energie speichern. Seine Wirkungsweise wird im Folgenden dargestellt. Im Innern eines jeden stromlosen Leiters ist die Feldstärke bekanntlich gleich Null, alle Punkte eines Leiters besitzen das gleiche Potential. Wie in Abschn. 3.1.2.4 ausgeführt, verschwindet im Inneren auch die Raumladungsdichte. Überschüssige Ladungen sind demnach nur auf der Oberfläche vorhanden. Zwischen beiden Leitern herrscht eine bestimmte Potentialdifferenz; sie ist gleich der Summe der Teilspannungen längs einer Feldlinie. Diese Teilspannungen sind der jeweiligen Feldstärke und damit dem Betrag der Ladungen proportional. Somit ergibt sich Proportionalität zwischen Spannung und Ladung der aus zwei Leitern bestehenden Anordnung.

$$Q = CU$$

¹⁾ R.J. van de Graaff (1901 bis 1967).

Der Proportionalitätsfaktor C ist eine für die Anordnung charakteristische Größe, die Kapazität des Systems.

Definition:

$$\text{Kapazität} = \frac{\text{Ladung}}{\text{Spannung}}$$

$$C = \frac{Q}{U} \quad (3.18)$$

Die Kapazität einer Leiteranordnung gibt also an, welche Ladung bei vorgegebener Spannung gespeichert werden kann, oder welche Spannung zwischen den Leitern herrscht, wenn eine bestimmte Ladung aufgebracht wurde.

Einheiten. Nach Gl. (3.18) hat die Kapazität die Einheit 1 C/V. Dafür schreiben wir

$$1 \text{Farad} = 1 \text{F} = \frac{\text{C}}{\text{V}} \text{¹⁾}$$

Ein Körper mit der Kapazität 1 Farad benötigt die Ladung 1 Coulomb, um auf die Spannung 1 Volt aufgeladen zu werden. Diese Einheit 1 F liefert in der Praxis unbequem kleine Zahlenwerte. Technisch realisierbare Kapazitäten liegen meist zwischen 10^{-12} F und einigen mF.

Plattenkondensator. Von großer technischer Bedeutung ist der Plattenkondensator. In der einfachsten Ausführung besteht er aus zwei gleich großen parallelen Metallplatten mit geringem Abstand. Im geladenen Zustand herrscht zwischen den Platten ein Feld, das an den Begrenzungen in geringem Maße über den Bereich der Platten hinausgreift (s. Bild 3.7b). Das Feld ist im Inneren homogen, d.h. die Feldstärke ist überall gleich groß und gleich gerichtet. Somit ist die elektrische Erregung D auf den Platten konstant. Positiven Ladungen $+Q$ auf der einen Platte stehen entsprechende negative $-Q$, infolge Influenz gebunden, auf der anderen Platte gegenüber. Die Ladung des Kondensators ist Q . Solange der Abstand d der Platte klein ist gegen deren Ausdehnung, darf man in guter Näherung das gesamte Feld als homogen ansehen. Somit ist nach Gl. (3.8) und (3.18)

$$U = Ed = \frac{Q}{C}$$

Mit Gl. (3.12) und Gl. (3.13) wird

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} \quad \text{und} \quad U = \frac{Qd}{\varepsilon_0 A} \quad (3.19)$$

Aus Gl. (3.18) und Gl. (3.19) ergibt sich

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \quad (3.20)$$

Die Kapazität C eines Plattenkondensators ist umso größer, je größer die Fläche A der Platten und je kleiner deren Abstand d ist.

¹⁾ M. Faraday (1791 bis 1867).

Allgemein hängt die Kapazität eines Kondensators nur von dessen Geometrie ab, solange nicht der Raum zwischen den Platten mit Materie ausgefüllt ist (s. Abschn. 3.1.3.2).

Beispiel 4. Wir wenden den Gaußschen Satz (Gl. (3.17)) zur Berechnung des Feldes eines geladenen langen zylindrischen Stabes (Bild 3.13) mit der Linienladungsdichte Q/l an. Auf einem Zylinder der Länge l im Abstand r vom Stab mit dem dagegen kleinen Radius r_0 steht die Feldstärke \vec{E} überall senkrecht genauso wie die Erregung D . Der Hüllenfluss ist

$$\oint_{A_H} \vec{D} \cdot d\vec{A} = D 2\pi r l = Q$$

Also ist die elektrische Erregung

$$D = \frac{Q}{l 2\pi r}$$

Mit $E = D/\epsilon_0$ ist die Feldstärke

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{l r} \quad (3.21)$$

Die Spannung ist

$$U = \int_{r_0}^r E dr = \int_{r_0}^r \frac{Q}{\epsilon_0 2\pi l} \frac{dr}{r} = \frac{Q}{\epsilon_0 2\pi l} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

Schließlich wird mit Gl. (3.18) die Kapazität eines aus dem Stab und einem Mantel im Abstand r bestehenden Zylinderkondensators

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{\epsilon_0 2\pi l}{\ln(r/r_0)}$$

Immer, wenn aus der geometrischen Form der Ladungsverteilung der Verlauf der Feldlinien im Raum eindeutig hervorgeht, kann man in der in Beispiel 4 gezeigten Weise die Feldgrößen errechnen: Man geht von einer angenommenen Ladungsverteilung aus und berechnet mit dem Gaußschen Satz die elektrische Erregung und elektrische Feldstärke als Funktion der den Raum beschreibenden Koordinaten. Anschließend ergibt sich die Spannung

aus dem Linienintegral $U = \int_{s_0}^s \vec{E} \cdot d\vec{s}$ und die Kapazität zwischen Elektroden im Abstand s aus $C = Q/U(Q)$, wobei sich die angenommene Ladung herauskürzt.

Parallel- und Serienschaltung von Kondensatoren. An allen parallel geschalteten Kondensatoren (Bild 3.14a) liegt offensichtlich dieselbe Spannung U . Die Summe der Teil Ladungen ergibt die gesamte Ladung $Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_N$. Mit Gl. (3.18) wird die

Gesamtkapazität bei Parallelschaltung

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_N$$

Bild 3.14

a) Parallelschaltung,
b) Serienschaltung von
Kondensatoren

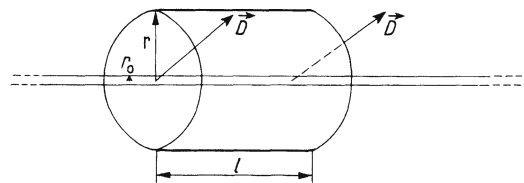
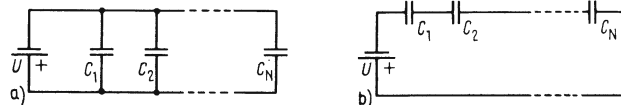


Bild 3.13 Zu Beispiel 4

Bei Serienschaltung (Bild 3.14b) enthalten alle Kondensatoren die gleiche Ladung Q . Sie werden dazu auf die Teilspannungen $U_1 \dots U_N$ aufgeladen. Die Gesamtspannung ist

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_N = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \dots + \frac{Q}{C_N} = \frac{Q}{C}$$

Damit wird der

Kehrwert der Gesamtkapazität bei Serienschaltung

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N}$$

Anwendungen. Kondensatoren sind wichtige Bauelemente der Elektrotechnik. In den festen Kondensatoren befinden sich zwischen den leitenden Schichten als so genannte Dielektrika statt Luft meist feste oder flüssige Isolatoren. Die verstellbaren Kondensatoren sind so genannte Trimmer oder Drehkondensatoren. Ihre Kapazität wird z.B. durch Abstandsänderung oder Herausdrehen von Platten verstellt. Solche Kondensatoren dienen u.a. zum Abgleichen und Abstimmen von Schwingkreisen. Auf die technischen Ausführungen gehen wir in Abschn. 3.1.3.2 nochmals ein. Zylinderkondensatoren sind z.B. die so genannten Koaxialkabel, die in der Hochfrequenztechnik verwendet werden.

Aufgaben zu Abschn. 3.1.2.6 bis 3.1.2.7

1. Zwei aufeinanderliegende Metallplättchen von je 2 cm^2 Fläche befinden sich in einem homogenen elektrischen Feld mit der Feldstärke $E = 50\,000 \text{ V/cm}$. Nachdem sie getrennt wurden, werden sie aus dem Feld entfernt. Wie groß ist a) die Flächenladungsdichte, b) die durch Influenz erzeugte Ladung auf den Platten? c) Welche Spannung liegt an den Platten im Abstand 1 mm ?
2. Welche Kapazitäten kann man durch alle möglichen Kombinationen von 3 Kondensatoren mit gleichen Kapazitäten $C = 10 \text{ nF}$ herstellen?
3. Die Kapazität pro Länge einer aus zwei Leitern mit den gleichen Radien r_0 im Abstand $r \gg r_0$ bestehenden Doppelleitung ist zu berechnen.

3.1.2.8 Energie und Kraftwirkung elektrischer Felder

Energie des elektrischen Feldes. Um einen Kondensator aufzuladen, ist eine bestimmte Arbeit erforderlich. Sie wird benötigt, um zusätzliche Ladungen gegen die Wirkung des Feldes auf den Kondensator zu bringen. Mit Gl. (3.7) und unter Berücksichtigung der Tatsache, dass die Spannung des Kondensators von seiner Ladung abhängt, dass nämlich $U = Q/C$ ist, wird die differentielle Arbeit

$$dW = QEds = QdU$$

Mit $Q = CU$ und durch Integration erhält man die Gesamtarbeit

$$W = \int_{U=0}^U CU dU = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}QU \quad (3.22)$$

Die bei der Aufladung eines Kondensators verrichtete Arbeit ist als Energie des elektrischen Feldes gespeichert.

Diese Energie befindet sich in dem Raum, den das elektrische Feld erfüllt. Ihre Verteilung kann gleichmäßig (homogenes Feld) oder ungleichmäßig (inhomogenes Feld) sein. Um

dies beschreiben zu können, definieren wir die Energie pro Volumen, die so genannte Energiedichte w . Mit Gl. (3.12) und (3.13) sowie $dV = dA ds$ lautet dann die

Definition:

$$\text{Energiedichte} = \frac{\text{Teilenergie } dW \text{ im Teilvolumen } dV}{\text{Teilvolumen } dV} \quad (3.23)$$

$$w = \frac{dW}{dV} = \frac{1}{2} \frac{dQ E ds}{dA ds} = \frac{1}{2} DE = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

Wenn der Raum des elektrischen Feldes mit Materie erfüllt ist, ändert sich die Energiedichte um den Faktor ε_r (s. Abschn. 3.1.3.2) auf

$$w = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r E^2 \quad (3.24)$$

Beispiel 5. Ein Plattenkondensator mit der Kapazität $C = 100 \text{ pF}$ wird auf die Spannung $U = 2000 \text{ V}$ aufgeladen und dann von der Spannungsquelle getrennt. Die Energie des elektrischen Feldes des Kondensators beträgt dann $W = (1/2) Q^2/C$; mit $Q = UC$ ist

$$W = (1/2) C U^2 = 0,5 \cdot 10^{-10} \text{ F} \cdot 4 \cdot 10^6 \text{ V}^2; \quad W = 2 \cdot 10^{-4} \text{ CV} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ J.}$$

Kräfte, die zwei geladene Platten aufeinander ausüben. Wir betrachten zwei Platten eines mit der Ladung Q geladenen Plattenkondensators, die beliebig nahe beieinander liegen, ohne sich jedoch zu berühren. Zieht man die Platten um eine kleine Strecke ds auseinander, so dient die erforderliche mechanische Arbeit $dW = F ds$ der Änderung des elektrischen Energieinhaltes.

Die Energie des elektrischen Feldes ist nach Gl. (3.22) $W = \frac{1}{2} QU$, wobei die Ladung Q in unserem Falle konstant ist, die Spannung jedoch mit zunehmendem Weg steigt (vgl. Spannarbeit, Abschn. 1.3.4.1). Aus $F ds = dW$ erhalten wir für die

Kraft F , die zwei geladene Platten aufeinander ausüben

$$F = \frac{dW}{ds} = \frac{1}{2} \frac{Q dU}{ds} = \frac{1}{2} QE \quad (3.25)$$

Messung der Elementarladung nach Millikan¹⁾. Kraftwirkungen elektrischer Felder auf Ladungen lassen sich mit Hilfe von leichten Körpern als Träger der Ladung Q im homogenen vertikal gerichteten Feld eines Plattenkondensators zeigen.

□ **Versuch 7.** Zwischen die waagrecht Platten eines Kondensators (Bild 3.15) bläst man kleine Flüssigkeitströpfchen oder Rauchteilchen als Träger einiger weniger Elementarladungen. Liegt keine Spannung am Kondensator, so sinken die Tröpfchen, und man kann aus der Sinkgeschwindigkeit ihre Masse m bestimmen (vgl. Abschn. 1.6.3.2). □

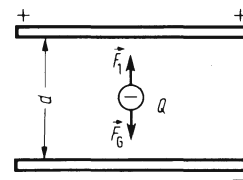


Bild 3.15 Geladener Körper im homogenen elektrischen Feld

¹⁾ Robert Andrews Millikan (1868 bis 1953).

Legt man eine veränderbare Spannung U so an die Platten, dass die obere positiv geladen ist, sinken negativ geladene Tröpfchen langsamer, positiv geladene schneller. Beobachtet man ein beliebiges negatives Tröpfchen, so kann man durch geeignete Wahl der Spannung U dieses zum Schweben bringen. Die vom Feld ausgeübte Kraft ist dann gleich seinem Gewicht

$$Q \frac{U}{d} = mg \quad (3.26)$$

Dieser von A. Millikan 1910 mit großer Präzision durchgeführte Versuch ermöglicht die Bestimmung der Elementarladung. Löst man Gl. (3.26) nach Q auf, so stehen rechts lauter messbare Größen

$$Q = \frac{mgd}{U}$$

Als Ergebnis einer großen Zahl von Messungen erhält man für Q stets ganzzahlige Vielfache der Elementarladung e_0 und damit deren Betrag $1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ (vgl. Abschn. 3.1.1.1).

Aufgaben zu Abschn. 3.1.2.8

1. An einem Plattenkondensator mit der Fläche 100 cm^2 und dem Plattenabstand 1 cm liegt die Spannung 2000 V . Wie groß ist die Energie des elektrischen Feldes im Kondensator, und mit welcher Kraft ziehen sich die Platten an?
2. Welche Energie liefert der Kondensator mit der Kapazität $600 \text{ }\mu\text{F}$ in einem Elektronenblitzgerät, der auf die Spannung 550 V aufgeladen ist?

3.1.3 Materie im elektrischen Feld

Bisher haben wir elektrische Felder nur im leeren Raum betrachtet. Die Verhältnisse ändern sich jedoch stark, wenn wir in ein elektrisches Feld Stoffe bringen. (Der Einfluss der Luft gegenüber den Verhältnissen im Vakuum ist allerdings so klein, dass wir ihn nicht berücksichtigen mussten.)

□ **Versuch 8.** a) Bringt man einen metallischen Leiter so in das Feld eines geladenen Plattenkondensators, dass er beide Platten berührt, verschwindet die Ladung des Kondensators und damit die Feldstärke.

b) Berührt dagegen der Leiter die Platten nicht, so wird in ihm ein Feld induziert, dessen Feldstärke der des äußeren Feldes des Kondensators dem Betrage nach gleich und außerdem entgegengesetzt gerichtet ist. Verbindet man ein Elektrometer mit den Leiterenden, so zeigt es keinen Ausschlag: Im Innern des Leiters verschwindet auch hier das Feld (s. Abschn. 3.1.2.6). □

Das Ergebnis kann wie folgt gedeutet werden: a) Die Elektronen als Träger der elektrischen Ladungen sind in einem Leiter frei beweglich. Sie bewirken hier die augenblickliche Entladung des Kondensators. b) Sie verlagern sich unter dem Einfluss des äußeren Feldes so, dass das hierdurch im Leiter entstandene Feld das äußere Feld aufhebt. Daraus folgt:

Die elektrische Feldstärke im Inneren eines stromlosen Leiters ist immer gleich Null.

□ **Versuch 9.** a) Bringt man in das elektrische Feld eines geladenen und von seiner Spannungsquelle getrennten Plattenkondensators einen Isolator, z.B. eine Glas- oder Kunststoffscheibe, so geht der Ausschlag eines angeschlossenen Elektrometers zurück. Entfernt man den Isolator, so steigt der Elektrometerausschlag wieder auf den ursprünglichen Wert.

b) Führt man dem Kondensator mit Isolator weitere Ladungen zu, so kann man die ursprüngliche Spannung wieder herstellen. □

Die Ladung des Kondensators kann sich in Versuch 9a durch das Einbringen des Isolators nicht geändert haben, die Spannung ist jedoch – wie das Elektrometer anzeigte – gesunken. Da aber $U = Q/C$ ist, muss seine Kapazität mit dem Isolator größer sein als ohne Isolator. Das gleiche Ergebnis zeigt Versuch 9b: Wenn der Kondensator durch eine größere Ladung wieder dieselbe Spannung erreicht, muss seine Kapazität wegen $U = Q/C$ durch das Einbringen des Isolators gestiegen sein.

Die Kapazität eines Kondensators steigt, wenn der Raum zwischen den Platten mit Isoliermaterial statt mit Luft oder Vakuum ausgefüllt wird.

Während im Innern eines Leiters die elektrische Feldstärke verschwindet, greifen elektrische Felder sozusagen durch Isolatoren hindurch. Man nennt deshalb einen Isolator im elektrischen Feld Dielektrikum¹⁾.

Abweichend von Leitern ist die Feldstärke in Isolierstoffen innerhalb elektrischer Felder nicht gleich Null.

3.1.3.1 Kräfte in elektrischen Feldern mit Dielektrikum

Modellvorstellungen. Für das Verständnis der Vorgänge im Dielektrikum genügt unser bisher benutztes Modell vom Aufbau der Materie (s. Abschn. 2.4.4.1) nicht mehr. Es bedarf einer weiteren Verfeinerung. Als Träger der elektrischen Ladungen kennen wir die Elektronen. Sie können in einem Körper frei beweglich oder an die Atome mehr oder weniger fest gebunden sein. (Bei Metallen sind im Mittel ein oder zwei Elektronen pro Atom frei beweglich.) Die Körper sind gewöhnlich elektrisch neutral. Folglich müssen darin den negativ geladenen Elektronen ebenso viele positive Ladungen entsprechen. Sitz dieser positiven Ladungen ist das Innere der Atome.

Die Atome von elektrisch nicht neutralen Körpern können negativ oder positiv geladen sein, je nachdem, ob die Zahl der Elektronen oder die der positiven Ladungen in der Überzahl ist. Das gleiche gilt für die aus mehreren Atomen bestehenden Moleküle.

Elektrisch positiv oder negativ geladene Atome oder Moleküle nennt man positive oder negative Ionen.

Die Ladungen der Atome und Moleküle haben eine bestimmte räumliche Verteilung. Wir können uns vorstellen, dass die Ladungen wie die Wassertröpfchen in einer Wolke verteilt

¹⁾ griech. $\delta i\alpha$ = durch.

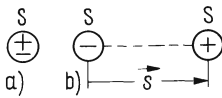


Bild 3.16 Elektrisch neutrale Moleküle
 a) Schwerpunkte S der beiden ungleichartigen Ladungen fallen zusammen
 b) elektrischer Dipol

sind. Eine derartige „Ladungswolke“ wirkt so, als wären die Ladungen an einem bestimmten Punkt konzentriert, dem so genannten Schwerpunkt der Ladungen. Es gibt neutrale Moleküle, bei denen die Schwerpunkte S der positiven und negativen Ladungen zusammenfallen (Bild 3.16a) und solche, bei denen die Schwerpunkte der positiven und negativen Ladungen einen bestimmten Abstand s voneinander haben (Bild 3.16b).

Definition: Ein Gebilde, bestehend aus zwei Ladungen $+Q$ und $-Q$ im Abstand s , nennt man einen elektrischen Dipol. Die Größe

$$\vec{s} Q = \vec{p}$$

nennt man das elektrische Dipolmoment. Der Vektor \vec{s} hat die Richtung von $-Q$ nach $+Q$.

Ein Molekül, bei dem die Schwerpunkte der positiven und negativen Ladungen nicht zusammenfallen, ist ein natürlicher elektrischer Dipol (z.B. Wassermolekül).

Elektrische Verschiebungspolarisation. Die elektrischen Ladungen der Atome und Moleküle sind entsprechend unseren Modellvorstellungen nicht starr miteinander verbunden. Vielmehr wirkt ein äußeres elektrisches Feld sowohl auf die Elektronen wie auch auf die positiven Ladungen des Atoms oder Moleküls derartig ein, dass beide um eine gegenüber den Atomabmessungen kleine Strecke auseinander gerückt werden. Dies tritt sowohl bei Atomen und Molekülen auf, bei denen ohne äußeres Feld die Schwerpunkte der positiven und negativen Ladungen zusammenfallen (Bild 3.17a), als auch bei solchen, wo das nicht der Fall ist (Bild 3.17b). Bei den ersten erzeugt das äußere Feld also Dipolmomente, bei den zweiten vergrößert es nur die von Natur aus vorhandenen. Diese Erscheinung heißt Polarisation.

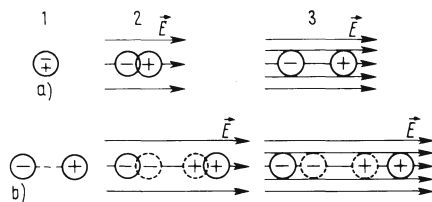


Bild 3.17 Elektrische Verschiebungspolarisation
 a) Molekül mit gemeinsamem Schwerpunkt der Ladungen
 b) Dipol-Molekül
 1 ohne äußeres Feld
 2 in relativ schwachem äußeren Feld
 3 in starkem äußeren Feld

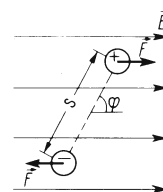


Bild 3.18 Elektrischer Dipol im homogenen elektrischen Feld

Die Polarisation eines Dielektrikums durch ein äußeres Feld, die durch Verschieben von Ladungen zustande kommt, nennt man Verschiebungspolarisation.

Orientierungspolarisation. Befindet sich ein Dipol in einem homogenen elektrischen Feld, so wirken auf seine beiden gleich großen ungleichartigen Ladungen gleich große entgegengesetzt gerichtete Kräfte F (Bild 3.18) und damit das Drehmoment

$$M = 2QE \frac{s}{2} \sin \varphi = pE \sin \varphi$$

Der Dipol dreht sich unter der Einwirkung dieses Momentes so im Feld, dass seine Achse in Richtung der Feldstärke liegt. Dann ist das auf ihn wirkende Drehmoment gleich Null.

Beispiel 6. Das elektrische Dipolmoment eines HCl-Moleküls beträgt etwa $p = 3,4 \cdot 10^{-30}$ Cm. Wie groß ist der Abstand seiner beiden Ladungen und welches Drehmoment wirkt auf diese, wenn die Achse s des Moleküls unter einem Winkel von 30° zur Feldrichtung eines homogenen Feldes mit der Feldstärke $E = 1000$ V/m steht? Das Wasserstoffion des HCl-Moleküls trägt eine positive, das Cl-Ion eine negative Elementarladung. Somit ist

$$s = \frac{p}{Q} = \frac{3,4 \cdot 10^{-30} \text{ Cm}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}} = 2,13 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

Man kann sich also das HCl-Molekül vorstellen wie eine „Hantel“, bestehend aus zwei Elementarladungen im Abstand $s = 2 \cdot 10^{-11}$ m. Das Drehmoment ist

$$M = pE \sin \varphi = 3,4 \cdot 10^{-30} \text{ Cm} \cdot 10^3 \text{ V/m} \cdot 0,5 = 1,7 \cdot 10^{-27} \text{ Nm.}$$

Befindet sich ein elektrischer Dipol in einem inhomogenen Feld, so herrscht am Ort seiner positiven Ladung eine andere Feldstärke als am Ort seiner negativen, und zwar sowohl bezüglich Betrag als auch Richtung. Es tritt eine resultierende Kraft auf, die den Dipol in Richtung auf Orte mit größerer Feldstärke bewegt.

Ohne äußeres elektrisches Feld ist die Lage der Moleküle, die ein natürliches Dipolmoment besitzen, infolge der Wärmebewegung (Abschn. 2.3.1) regellos. Die Ausrichtung durch ein äußeres elektrisches Feld wirkt der regellosen Wärmebewegung entgegen, sie nimmt also mit steigender Temperatur ab.

Die Polarisation eines Dielektrikums durch ein äußeres Feld, die durch die Ausrichtung von Molekülen mit Dipolcharakter zustande kommt, nennt man Orientierungspolarisation.

3.1.3.2 Dielektrizitätszahl

Wir wollen zu den Ergebnissen der Versuche 9a und 9b zurückkehren. Bild 3.19a zeigt die Platten 1 eines geladenen Kondensators (Seitenansicht), getrennt von jeder Spannungsquelle. Der Kondensator ist somit ein abgeschlossenes System. Auf den Platten sitzen die

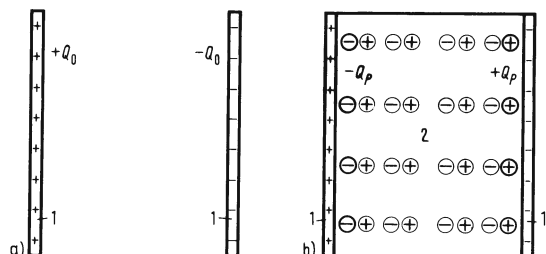


Bild 3.19 Geladener Kondensator

- a) ohne Dielektrikum
b) mit Dielektrikum

Ladungen Q_0 mit der elektrischen Erregung D_0 . Der Index 0 soll zeigen, dass es sich um Größen in einem Feld im Vakuum (oder in Luft) handelt.

$$D_0 = \frac{Q_0}{A}; \quad E_0 = \frac{U_0}{d} \quad (3.27)$$

Das in den Kondensator (Bild 3.19b) eingebrachte Dielektrikum 2 wird durch das Feld des Kondensators polarisiert. Dadurch entsteht im Dielektrikum ein elektrisches Feld. Dieses und das entgegengesetzt gerichtete Feld des Kondensators überlagern sich. Die durch Polarisation des Dielektrikums bedingte Feldstärke \vec{E}_p ist kleiner als die des ungestörten Kondensators \vec{E}_0 . Die Polarisation bewirkt demnach eine verringerte Kondensatorfeldstärke $\vec{E} = \vec{E}_0 - \vec{E}_p$. Die Ladung des Kondensators wird scheinbar kleiner $Q = Q_0 - Q_p$, das Gleiche gilt für die elektrische Erregung:

$$\vec{D} = \vec{D}_0 - \vec{D}_p \quad (3.28)$$

Definition: Die durch die Polarisation des Dielektrikums hervorgerufene elektrische Erregung \vec{D}_p nennt man auch Polarisation \vec{P} .

Die gesamte elektrische Erregung D_0 eines Kondensators ist gleich der Summe aus der wirksamen Ladungsdichte D auf den Platten des Kondensators und der Polarisation P des Dielektrikums

$$\vec{D}_0 = \vec{D} + \vec{P} \quad (3.29)$$

Die Vektoren \vec{D}_0 und \vec{D} nennt man auch Verschiebungsdichte, obwohl nur \vec{P} eine Ladungverschiebung im Isolator beschreibt. Der Begriff Verschiebungsdichte stammt noch aus einer Zeit, in der man elektrische Felder durch Verschieben und Spannen eines „Äthers“ darstellte.

Nach Gl. (3.14) schreiben wir mit der Erregung \vec{D}_0 und der Feldstärke \vec{E}_0 in Luft

$$\vec{D}_0 = \epsilon_0 \vec{E}_0$$

Wie Versuch 9 zeigt, sinkt nach Einbringen des Dielektrikums die Spannung und damit die Feldstärke auf den Wert $\vec{E} = \vec{E}_0 - \Delta\vec{E}$. Diese Feldstärke wird durch die verbliebene wirksame elektrische Erregung $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ hervorgerufen. Daraus wird

$$\vec{D}_0 = \epsilon_0 \vec{E}_0 = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (3.30)$$

Definition: Wir bezeichnen den Quotienten aus der Feldstärke mit Luft oder Vakuum und der Feldstärke mit Materie bei konstanter elektrischer Erregung D_0 als Dielektrizitätszahl¹⁾ oder relative Dielektrizitätskonstante ϵ_r

$$\epsilon_r = \frac{E_0}{E} \quad (3.31)$$

¹⁾ Nach DIN 1324.

Mit Gl. (3.31) wird Gl. (3.30)

$$\begin{aligned}\vec{D}_0 &= \epsilon_0 \vec{E}_0 = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ \vec{P} &= (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \vec{E}\end{aligned}\quad (3.32)$$

Die Polarisierung eines Dielektrikums ist der Feldstärke proportional.¹⁾

Definition: Die Größe

$$\epsilon_r - 1 = \chi \quad (3.33)$$

nennt man die elektrische Suszeptibilität.

Die elektrische Suszeptibilität ist ein Maß für die Polarisierbarkeit eines Stoffes. Nützlich ist noch folgende

Definition: Das Produkt aus Dielektrizitätszahl ϵ_r und elektrischer Feldkonstante ϵ_0 heißt Dielektrizitätskonstante ϵ

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$$

Beispiel 7. Berechnung der Kapazität eines Kondensators mit Dielektrikum. Die Kapazität eines Kondensators mit Luft oder Vakuum ist $C_0 = Q_0/U_0 = \epsilon_0 A/d$. Er ist auf die Spannung U_0 aufgeladen. Durch Einbringen eines Dielektrikums sinkt die Feldstärke auf den Wert $E = E_0/\epsilon_r$, die Spannung auf den Wert $U = Ed$. Damit erhalten wir $C = Q_0/U = \epsilon_0 E_0 A/(Ed)$ und mit $E = E_0/\epsilon_r$ für die Kapazität eines Kondensators mit Dielektrikum $C = \epsilon_r \epsilon_0 A/d = \epsilon_r C_0$. Es gilt also

$$\epsilon_r = \frac{C}{C_0} \quad (3.34)$$

Das Ergebnis von Beispiel 7 (Gl. (3.34)) gibt uns ein Messverfahren für die Dielektrizitätszahl ϵ_r , die über die Messung der Kapazität eines Kondensators mit und ohne Dielektrikum (z.B. durch Spannungs- oder Ladungsmessung) bestimmt werden kann.

Wir haben oben bei der Einführung der Dielektrizitätszahl den Kondensator von der Spannungsquelle getrennt, um ihn als abgeschlossenes System betrachten zu können. Hält man dagegen die Spannung an einem Kondensator konstant, z.B. durch Anschließen an eine Spannungsquelle, so steigen die Ladung und die Erregung bei Einbringen eines Dielektrikums an. Dann ist in Gl. (3.29) die Größe D_0 die Erregung eines bestimmten mit Materie erfüllten Kondensators und D diejenige mit Luft oder Vakuum, also ohne Polarisierung. Die Dielektrizitätszahl wird dann $\epsilon_r = D/D_0$. In der Literatur wird dieser Fall $U = \text{const}$ häufig benutzt. Allerdings sind dort die Bezeichnungen für die elektrischen Erregungen vertauscht. D_0 heißt dort D_m , und D ist dort D_0 . Dann ist

$$D_m/D_0 = \epsilon_r \quad \text{bzw.} \quad C_m/C_0 = \epsilon_r^{2)}$$

Innerhalb eines Plattenkondensators kann durchaus die Dielektrizitätszahl ϵ_r an verschiedenen Orten unterschiedlich sein, ebenso die elektrische Feldstärke E . Die elektrische Erregung D ist jedoch an allen Orten gleich groß, unabhängig davon, ob in dem System nun die Ladung Q und somit die elektrische Erregung oder die Spannung U konstant ist.

¹⁾ Ausgenommen ferroelektrische Stoffe (s. Abschn. 3.1.3.3).

²⁾ International für ϵ_r auch Permittivitätszahl und für $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ auch Permittivität.

Die Dielektrizitätszahl eines Stoffes ist dimensionslos, ihr Wert ist ≥ 1 . Bei Fehlen der Polarisierung im Vakuum ist $\epsilon_r = 1$. Dies gilt mit einem Fehler von $< 1\%$ auch für die praktisch nicht polarisierbare Luft. Tafel 3.20 enthält die Dielektrizitätszahl (gekürzt: DZ) einiger für den Ingenieur wichtiger Stoffe.

Tafel 3.20 Dielektrizitätszahl (DZ) einiger Stoffe

Unpolare Kunststoffe (PE, PS, PTFE)	2...2,5	Polare Kunststoffe (PVC, PA)	2,5...6
Kunstharze, gefüllt	4... 10	Kondensatorkeramiken:	
Porzellane	4...6,6	Frequenta, Calit	5,6...6,5
Glimmer	4,5...8	Kondensa C und F	80
Kronglas	5...9	Titanoxid	≈ 100
Flintglas	7...16	keramische Sondermassen	
Öle	2...3	mit Barium und Titan	$10^3 \dots 10^4$
		Wasser	≈ 80

Der Grad der Ausrichtung der molekularen elektrischen Dipole und damit die Dielektrizitätszahl hängt von der Temperatur des Dielektrikums ab. Die Wärmebewegung der Moleküle (s. Abschn. 2.3.1) wirkt nämlich der ausrichtenden Kraft des Feldes entgegen. Demzufolge sinkt die Dielektrizitätszahl mit steigender Temperatur. Außerdem nimmt die Orientierungspolarisation mit steigender Frequenz des ausrichtenden Feldes ab, weil sich die Dipolmoleküle mit ihrem großen Massenträgheitsmoment nicht genügend schnell drehen. Die Verschiebungspolarisation, bei der ja nur die Elektronenwolken mit ihrer rund 2000 mal so kleinen Trägheit wechselbeschleunigt werden müssen, und mit ihr die DZ zeigen erst bei entsprechend höheren Frequenzen deutliche Abnahme mit steigender Frequenz. Dies ist wichtig für die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen (s. Abschn. 5.2.5).

Beispiel 8. An einem Plattenkondensator mit der Kapazität $C = 10$ nF, Plattenabstand 1 mm, mit Öl als Dielektrikum ($\epsilon_r = 2,5$) liegt die Spannung $U = 200$ V. Die Kraft, mit der sich beide Platten anziehen, errechnet man nach Gl. (3.25) und (3.18) mit der Ladung

$$Q = UC = 2 \cdot 10^2 \text{ V} \cdot 10^{-8} \text{ F} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

$$\text{zu } F = (1/2) QE = 0,5 \cdot 2 \cdot 10^{-6} \text{ C} \cdot 2 \cdot 10^2 \text{ V} / (10^{-3} \text{ m}) = 2 \cdot 10^{-1} \text{ N}$$

Die Fläche des Kondensators ist

$$A = \frac{C d}{\epsilon_r \epsilon_0} = \frac{10^{-8} \text{ F} \cdot 10^{-3} \text{ m Nm}^2}{8,86 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot 2,5} = 0,45 \text{ m}^2$$

Beispiel 9. Zwei senkrecht stehende parallele Metallplatten im Abstand $d = 2$ mm mit der Breite $b = 10$ cm tauchen in eine Flüssigkeit ($\epsilon_r = 3$; $\rho = 0,90 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$). Bei Anlegen einer Spannung U steigt die Flüssigkeit zwischen den Platten um $h = 3$ mm. Wie groß ist der Energiezuwachs des Feldes und die Spannung? Die durch das Einfließen des Dielektrikums in den Kondensator erfolgte Energieerhöhung (geliefert aus der Spannungsquelle) ist gleich der für das Anheben der Flüssigkeit erforderlichen Arbeit. Diese ist

$$\begin{aligned} W_{\text{mech}} &= \frac{1}{2} mgh = \frac{1}{2} db h \rho g h \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot 10^{-1} \text{ m} \cdot 3 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot 0,9 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 3 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ &= 0,8 \cdot 10^{-5} \text{ Nm} \end{aligned}$$

Der Energiezuwachs des Feldes ist

$$W_{\text{el}} = \frac{1}{2} CU^2 - \frac{1}{2} C_0 U^2 = \frac{1}{2} \frac{A \epsilon_r \epsilon_0 U^2}{d} - \frac{A \epsilon_0 U^2}{2d} = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{A}{d} (\epsilon_r - 1) U^2$$

und die Spannung

$$U = \sqrt{\frac{2W_{\text{mech}} d}{\epsilon_0 b h (\epsilon_r - 1)}} = \sqrt{\frac{1,6 \cdot 10^{-5} \text{ Nm Nm}^2 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{8,86 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot 3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot 2}} = 2,45 \text{ kV}$$

Anwendungen. Beim Bau von Kondensatoren spielen Stoffe mit hoher Dielektrizitätszahl eine wichtige Rolle. Durch Aufwickeln von parallel liegenden Streifen aus Aluminiumfolie und Ölpapier erhält man schon recht große Kapazitäten auf kleinem Raum (ca. $0,1 \mu\text{F}/\text{cm}^3$). Um Größenordnungen weiter kommt man mit keramischen Massen sehr hoher DZ als Dielektrikum, ebenso mit sehr kleinen Schichtdicken der Dielektrika, wie sie in den Elektrolytkondensatoren erreicht werden. So baut man Tantal-Kondensatoren – allerdings nur für niedrige Spannungen – mit mehr als $100 \mu\text{F}/\text{cm}^3$.

3.1.3.3 Zusammenhang zwischen Polarisation und nichtelektrischer Energie

Elektrostriktion. Bringt man einen Isolator in ein elektrisches Feld, so kann man je nach Stoffart eine geringfügige Volumenzu- oder -abnahme beobachten. Die Form- und Volumenänderung hängt von der Stärke des Feldes ab. Sie ist eine Folge von Krafteinwirkungen des Feldes auf die geladenen Teilchen im Innern des Stoffes und kann in allen Aggregatzuständen auftreten.

Die Volumenänderung eines beliebigen Dielektrikums durch elektrische Polarisation nennt man Elektrostriktion.

Piezoelektrizität. Kristalle haben einen regelmäßigen Aufbau. Die Ordnung der Elementarzellen setzt sich durch den gesamten Körper im Kristallgitter fort. Bestehen die Gitterbausteine aus positiven und negativen Ionen, so spricht man von einem Ionengitter. Im Allgemeinen haben die Ionen eine solche Lage, dass eine mehr oder weniger unsymmetrische Ladungsverteilung besteht. Im einfachsten Fall liegen Dipolmomente vor. Wird ein Ionenkristall in bestimmten Richtungen elastisch deformiert, so ändern sich die Dipolmomente, oder es entstehen neue. Durch die so herbeigeführte Polarisation treten Oberflächenladungen und damit elektrische Spannungen am Kristall auf.

Die ungleichartige Aufladung gegenüber liegender Oberflächen von Ionenkristallen auf Grund von elastischer Deformation durch nichtelektrische Kräfte heißt Piezoelektrischer Effekt.

Umgekehrt stellt man in einem elektrischen Feld je nach dessen Richtung eine Verlängerung oder Verkürzung piezoelektrisch wirksamer Körper fest. Besonders stark piezoelektrisch wirksam sind Quarz, Turmalin und Seignettesalz (Kalium-Natriumtartrat $\text{KNaC}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4 \text{H}_2\text{O}$) und beim Sintern in starken elektrischen Feldern polarisierte keramische Substanzen großer DZ, z.B. Bariumtitanat.

Pyroelektrizität. Wenn die Verformung eines piezoelektrischen Körpers nicht durch mechanische Kräfte sondern durch Temperaturänderung verursacht wird (Abschn. 2.2), nennt man die dadurch hervorgerufene oder geänderte Polarisation und Oberflächenladung Pyroelektrizität (z.B. an Einkristallen aus Strontium-Bariumniobat).

Bei einigen pyro- oder piezoelektrischen Kristallen tritt eine spontane Parallelstellung der elektrischen Dipolmomente größerer Kristallbereiche auf. In Anlehnung an den Ferromagnetismus (s. Abschn. 3.3.5.3), der formal ähnliche Ursachen hat, nennt man diese

Erscheinung Ferroelektrizität. Ferroelektrische Stoffe haben unterhalb einer bestimmten sog. Curie-Temperatur T_C sehr große Werte der Dielektrizitätszahl. Beispiel: Bariumtitanat $T_C = 118\text{ °C}$, $\epsilon_r(20\dots 80\text{ °C}) = 1200$.

Anwendungen. Piezoelektrische Kristalle sind elektromechanische Wandler. Die bei Zug- oder Druckbelastung oder Torsion des Kristalls entstehenden elektrischen Spannungen zwischen gegenüberliegenden Flächen des Kristalls, die mit leitenden Kontaktschichten belegt sind, sind dem Zug bzw. Druck direkt proportional. Mit derartigen Kristallen kann man Drücke, Kräfte und indirekt auch Beschleunigungen elektrisch messen. Das ist besonders bei schnell veränderlichen Drücken oder Kräften, wie z.B. bei Schwingungen vorteilhaft. Außerdem kann man die Wandler an schwer zugänglichen Stellen anbringen und die elektrischen Messwerte über große Strecken übertragen. Derartige Wandler sind als sog. Druck- oder Kraftaufnehmer in der industriellen Messtechnik weit verbreitet.

Mit Bariumtitanatstäben von ca. 2 cm Länge lassen sich mit entsprechenden Drücken Spannungen von ca. 20 kV erzeugen, die z.B. zum Zünden von Gasgemischen in Verbrennungsmotoren (Bootsmotoren, Rasenmähermotoren usw.) ausgenutzt werden.

Im Kristallmikrofon und -tonabnehmer werden den Schallschwingungen entsprechende Spannungen erzeugt. Wenn man umgekehrt periodisch sich ändernde elektrische Spannungen an einen piezoelektrischen Kristall legt, führt dieser entsprechende mechanische Schwingungen aus. Von Bedeutung sind derartige elektrostriktive Schwingungserzeuger vor allem bei höheren Frequenzen, wo andere Methoden zur Erzeugung mechanischer Schwingungen versagen. Das gilt für Frequenzen zwischen 10 kHz und 16 kHz bei Hochtonlautsprechern, über 16 kHz vor allem zur Erzeugung von Ultraschallschwingungen.

Ein besonders wichtiges piezoelektrisches Material ist Quarz. Man schneidet aus Quarzkristallen in bestimmten Orientierungen (Winkeln) zu ihren Kristallachsen Platten oder Stäbe heraus. Geeignet gehalten und angeregt, führen diese mechanische Biege-, Flächen- oder Dickenschwingungen mit sehr kleiner Dämpfung aus. Die Frequenz dieser Schwingungen ist hochkonstant, nicht zuletzt weil der Temperaturkoeffizient der Frequenz der Quarze bei geeignetem Schnittwinkel bis herab zu $1 \cdot 10^{-8}\text{ K}^{-1}$ beträgt. Derartige Quarze dienen in der Nachrichtentechnik zur Erzeugung frequenzkonstanter elektromagnetischer Schwingungen. Als Frequenznormale in sog. Quarzuhren erlauben sie sehr genaue Zeitmessungen (relativer Langzeitfehler etwa 10^{-7}). Photoferroelektrische Kristalle eignen sich zum Speichern von Bildern. Dies geschieht durch Anlegen eines elektrischen Feldes über durchsichtige Elektroden, durch die hindurch gleichzeitig das zu speichernde Bild mittels langwelliges UV-Lichtes auf den Kristall abgebildet wird.

Die Temperaturabhängigkeit der spontanen elektrischen Polarisierung wird zum Bau sehr empfindlicher Infrarot-Strahlungsempfänger, sog. pyroelektrischer Detektoren, z.B. aus Triglyzinsulfat (TGS), ausgenutzt.

Aufgaben zu Abschn. 3.1.3

1. An zwei Platten im Abstand $d = 3\text{ cm}$ liegt die Spannung $U = 50\text{ kV}$ (Bild 3.21a). Die Luft zwischen den Platten isoliert bis zur Feldstärke $E = 3 \cdot 10^6\text{ V/m}$. a) Wird diese Feldstärke erreicht? b) Wie groß wird die Feldstärke in Luft, wenn man in der Absicht, die Durchschlagsicherheit damit zu erhöhen, eine Glasplatte ($\epsilon_r = 9$) mit der Dicke 1,5 cm zwischen die Platten schiebt?

2. Zwei konzentrische leitende Kugelschalen 1, 2, (Bild 3.21 b) mit dem inneren Radius r_1 und dem äußeren Radius r_3 bilden einen Kugelkondensator. Die zwischen beiden Kugeln liegenden Dielektrika 3 und 4 haben die Dielektrizitätszahl

ϵ_{r1} und ϵ_{r2} . Wie groß ist die Kapazität des Kondensators?

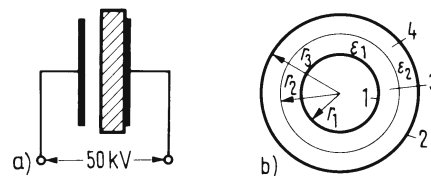


Bild 3.21

a) teilweise mit Dielektrikum ausgefüllter Plattenkondensator

b) Kugelkondensator (Schnitt durch die Kugelmitte)

3.2 Elektrischer Strom

Bei den vertrauten elektrotechnischen Erscheinungen spielen im Allgemeinen die durch elektrische Felder verursachten Bewegungen vieler Ladungsträger, nämlich elektrische Ströme, die überragende Rolle. Doch auch das allgemein bekannte Ohmsche Gesetz in der Form $I \sim U$ beschreibt die wirklichen Vorgänge in elektrischen Strömen nur unvollkommen. Wir erläutern deshalb im folgenden Abschnitt den Mechanismus der Bewegung von Ladungsträgern in Festkörpern, Flüssigkeiten und Gasen und leiten die hierfür gültigen Gesetze ab.

Die Stromarbeit UIt in der Einheit VAs führt zur Erwärmung der Leiterbahn. Zur Einheit des elektrischen Stromes I , dem Ampere, wird die Einheit der Spannung – Volt – so definiert, dass die Einheit der Stromwärme gleich der Energie- und Arbeitseinheit der Mechanik und Wärme, dem Newtonmeter, ist.

3.2.1 Grundlegende Versuche

Versuch 10. Ein geladener Plattenkondensator ist mit einem Elektrometer verbunden. Berührt man mit einem isoliert gehaltenen metallischen Körper (Scheibe oder Kugel) zuerst die eine, dann die andere Platte, so geht der Ausschlag des Elektrometers zurück. Nach wiederholter Berührung ist der Ausschlag Null geworden.

Versuch 11. Bläst man zwischen die Platten des geladenen Kondensators Metallpulver, so geht der Ausschlag des Elektrometers ebenfalls zurück.

Im Versuch 10 fließen Ladungen auf die berührende Scheibe. Bei Berührung mit der zweiten Platte fließen die Ladungen auf diese ab, der Kondensator ist schließlich entladen. Im Versuch 11 übernehmen metallische Staubteilchen Ladungen von einer Platte. Diese Ladungen werden dann direkt oder über eine Reihe von anderen Staubteilchen an die zweite Platte abgegeben. In beiden Fällen werden Ladungen von einer Platte zur anderen bewegt.

Die Bewegung elektrischer Ladungen nennt man elektrischen Strom.

Versuch 12. Verbinden wir die Platten des Kondensators mit einem Draht, so geht der Ausschlag des Elektrometers zurück.

Der Kondensator entlädt sich also über den Draht.

Verbindet ein Leiter die Platten eines geladenen Kondensators, so verschwindet im Leiter die Feldstärke. Das hat folgende Ursache: Da in einem Leiter die Ladungsträger – die Elektronen – frei beweglich sind (sog. freie Elektronen, s. Abschn. 7.4), setzen sie sich unter der Wirkung des elektrischen Feldes in Bewegung. Es entsteht ein elektrischer Strom. Diese Bewegung dauert so lange an, bis die Feldstärke Null geworden, der Kondensator entladen ist. Die Entladung geht also nicht plötzlich vor sich. Die Kapazität eines Kondensators ist meist allerdings so gering, dass die Entladung in Bruchteilen einer Sekunde beendet, die Feldstärke Null geworden ist. Um einen elektrischen Strom über längere Zeit beobachten zu können, brauchen wir eine ergiebigere Elektronenquelle, z.B. eine Batterie, deren Funktion erst in Abschn. 3.2.4 behandelt werden kann, oder das öffentliche Stromversorgungsnetz.

Verwendet man an Stelle der Kondensatorplatten in Versuch 12 die metallischen Pole einer starken Batterie (z.B. Autobatterie), so bleibt die Anzeige des Elektrometers unverändert, es tritt keine mit dem Elektrometer feststellbare Entladung der Pole ein. Die Feldstärke zwischen den Polen bleibt also konstant, folglich fließt dauernd ein elektrischer Strom. In einer bestimmten Zeit t wird durch den Leiter eine bestimmte Ladung transportiert.

Definition: Der Quotient aus der in der Zeit t durch den Querschnitt eines Leiters fließenden Ladung Q und der Zeit t ist der elektrische Strom I .

$$I = \frac{Q}{t} \quad (3.35)$$

Das Wort Strom wird also sowohl für die Erscheinung der Bewegung von Ladungen als auch für die Größe Q/t verwendet.

Ist der Strom zeitlich veränderlich, so ist $\Delta Q/\Delta t$ der Mittelwert des Stromes während des Zeitintervalls Δt . Mit $\Delta t \rightarrow 0$ erhalten wir für den

Momentanwert des elektrischen Stromes

$$i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} = \dot{Q} \quad (3.36)$$

Einheiten. Der elektrische Strom ist eine der sechs Basisgrößen des internationalen Einheitensystems. Wir haben in Abschn. 3.1.1 für die Ladung die Einheit 1 C eingeführt. Mit Gl. (3.35) ist die Einheit des Stromes

$$1 \frac{\text{C}}{\text{s}} = 1 \text{ Ampere} = 1 \text{ A}^1)$$

Die Festlegung dieser Einheit nehmen wir in Abschn. 3.2.1.3 vor.

Stromrichtung. Aus historischen Gründen wurde für die Stromrichtung die Bewegungsrichtung vom positiven zum negativen Pol festgelegt (sog. positive oder auch technische Stromrichtung), also entgegen der tatsächlichen Bewegungsrichtung der negativ geladenen Elektronen.

Stromdichte. Die Ladungsträger bewegen sich in einem stromdurchflossenen Draht im Mittel parallel zu diesem Draht. Wenn sich der Strom nicht zu schnell ändert, ist die mittlere Geschwindigkeit der Ladungsträger an allen Stellen gleich groß. Ist A der Drahtquerschnitt, so gilt die

Definition:

$$\text{Elektrische Stromdichte} = \frac{\text{elektrischer Strom}}{\text{Querschnitt des Leiters}} \quad S = \frac{I}{A} \quad (3.37)$$

3.2.1.1 Wirkungen des elektrischen Stromes

Mit dem Fließen des Stromes sind verschiedene Wirkungen verbunden. Diese sollen im Folgenden aufgezählt werden. Erklärungen folgen in den späteren Abschnitten.

¹⁾ André M. Ampère (1775 bis 1836).

□ **Versuch 13.** Verbindet man die Klemmen (Pole) einer Batterie mit einem dünnen Draht, so erwärmt sich dieser. □

Ein vom Strom durchflossener Leiter erwärmt sich.

Die Erwärmung tritt sowohl bei festen Körpern als auch bei Flüssigkeiten und Gasen auf (s. Abschn. 3.2.6). Beispiele: Spiralen von Heizgeräten, Wendeln von Glühlampen.

□ **Versuch 14.** a) Über einen waagrecht in nordsüdlicher Richtung verlaufenden Leiter ist eine Magnetnadel aufgehängt. Die Nadel weist nach Norden, liegt also parallel zum Draht. Schließen wir den Draht an eine Batterie an, so fließt in ihm ein Strom. Bei Einschalten des Stromes stellt sich die Magnetnadel rechtwinklig zum Leiter.

b) Zwei flexible parallel ausgespannte Leiter nähern sich einander oder entfernen sich voneinander bei Stromdurchgang je nach Stromrichtung. □

Ein stromdurchflossener Leiter lenkt eine Magnetnadel ebenso ab wie ein Dauermagnet (Naturmagnet, Hufeisenmagnet) (s. Abschn. 3.3.1.1).

Beispiele: Elektrische Messgeräte.

Ströme üben magnetische Kräfte aus.

□ **Versuch 15.** Eine Kupfersulfatlösung (CuSO_4) soll zur Stromleitung dienen. Zwei Kohlestifte, die mit einer Batterie verbunden sind, tauchen in die Flüssigkeit ein. Schon nach wenigen Sekunden bildet sich an dem einen Kohlestift ein Niederschlag von metallischem Kupfer, während an dem anderen Sauerstoffblasen aufsteigen. □

In leitfähiger Flüssigkeit verursacht der Strom chemische Vorgänge (s. Abschn. 3.2.3).

3.2.1.2 Messung des elektrischen Stroms

Alle oben aufgezählten Wirkungen des elektrischen Stroms können zu dessen Messung benutzt werden; denn die Ausdehnung auf Grund der Temperaturerhöhung eines Leiters, das auf eine Magnetnadel ausgeübte Drehmoment und die Masse des aus dem Kupfersulfat abgeschiedenen Kupfers hängen vom Strom ab.

Hitzdrahtinstrument (Bild 3.22). Dieses Instrument hat einen stromdurchflossenen Messdraht 1, dessen Längenänderung von einem Spanndraht 2 erfasst wird, der über die Achse 3 eines Zeigers mit der Schraubenfeder 4 verbunden ist.

Drehspulinstrument (Bild 3.23). Hier wirkt auf eine stromdurchflossene Spule 1 im Feld eines Dauermagneten 2 ein Drehmoment. Die Spule wird gedreht, bis das Rückstellmoment von einem Spannbänder oder einer Rückstellfeder 3 gleich groß gewor-

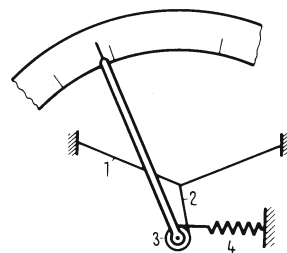


Bild 3.22 Hitzdrahtinstrument

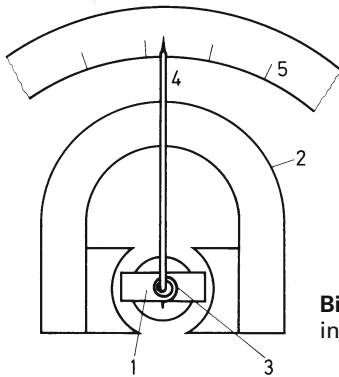


Bild 3.23 Drehspul-instrument

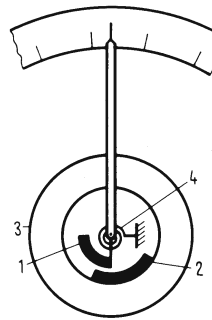


Bild 3.24 Dreheisen-instrument

den ist wie das vom Strom erzeugte Drehmoment (s. Abschn. 3.3.2). Das Drehmoment wird über einen Zeiger 4 auf einer Skala 5 angezeigt. Allerdings wird die Skala gleich in Stromeinheiten statt in Drehmomenteinheiten geeicht. Besonders empfindliche Drehspulinstrumente ($< 10^{-7}$ A/Teilstrich) nennt man Galvanometer. Sie sind heute vielfach durch elektronische Messgeräte verdrängt, haben aber noch große Bedeutung für Messungen in elektrisch störemfindlichen Messkreisen.

Dreheiseninstrument (Bild 3.24). Ein drehbar gelagertes Eisen 1 und ein feststehendes Eisen 2 im Feld einer stromdurchflossenen Spule 3 werden gleichartig magnetisiert (s. Abschn. 3.3.5.3). Sie stoßen sich gegenseitig ab. Dem so erzeugten Drehmoment wirkt das der Spiralfeder 4 entgegen.

Die Stromrichtung ist für die Zeigerbewegung von Dreheiseninstrument und Hitzdrahtinstrument ohne Bedeutung, weshalb beide auch für Messungen von Wechselströmen geeignet sind (s. Abschn. 3.3.6.4).

Wichtige technische Strommesser sind Hitzdraht-, Drehspul- und Dreheiseninstrumente.

3.2.1.3 Zur Einheit des elektrischen Stromes

Alle genannten Messmethoden können zur Festlegung der Einheit des Stromes benützt werden. Vom Internationalen Komitee für Maß und Gewicht wurde 1946 die in Versuch 14b beschriebene Wirkung (s. auch Abschn. 3.3.3.3) ausgewählt, da sie besonders kleine Messfehler aufweist.

Definition: Der Strom I hat den Wert 1 A, wenn zwischen zwei im Abstand $d = 1$ m parallel angeordneten, geradlinigen, unendlich lang gedachten und vom gleichen elektrischen Strom durchflossenen Leitern mit gegen null gehenden Durchmessern der Betrag der Kraft pro Länge $F/l = 2 \cdot 10^{-7}$ N/m ist.

Im Anschluss an diese Definition des Ampere wird die Einheit der elektrischen Ladung $1\text{ C} = 1\text{ As}$ definiert. Damit wird die Einheit der elektrischen Energie $1\text{ VA s} = 1\text{ J} = 1\text{ Nm} = 1\text{ W s}$. Demzufolge misst man im Internationalen Einheitensystem elektrische und mechanische Energien mit der gleichen Einheit.

3.2.2 Elektrische Leitung in Festkörpern

3.2.2.1 Ohmsches Gesetz

Elektrischer Widerstand. In Metallen und einigen Verbindungen der meisten Schwermetalle erfolgt der Ladungstransport, wie in Abschn. 3.2.1 erläutert, durch freie Elektronen. Die hierfür gültige Gesetzmäßigkeit zeigt der folgende

□ **Versuch 16.** Man verbindet die Klemmen einer Batterie mit verschiedenen einstellbaren Spannungen U durch einen Metalldraht. Die gemessenen Ströme I sind den Spannungen proportional, solange sich die Temperatur T nicht ändert. □

Diese Gesetzmäßigkeit wurde von Georg Simon Ohm (1789 bis 1854) entdeckt und heißt nach ihm

Ohmsches Gesetz

$$I \sim U \quad \text{bei} \quad T = \text{const}$$

Damit ist für ein und denselben Leiter der Quotient aus Spannung und Strom konstant.

Definition: Den Quotienten aus Spannung U und Strom I nennt man den elektrischen Widerstand¹⁾ R des Leiters mit der Dimension Spannung/Strom.

$$R = \frac{U}{I} \quad (3.39)$$

Einheit: Die Einheit des elektrischen Widerstandes heißt Ohm (Symbol Ω)

$$1 \Omega = 1 \text{ V/A}$$

Definition: Die Größe $1/R$ nennt man den elektrischen Leitwert G mit der Einheit Siemens²⁾ S oder mho (Umkehrung von Ohm).

$$1 \text{ S} = 1 \text{ mho} = 1 \text{ A/V} = 1 \Omega^{-1}$$

□ **Versuch 17.** Variiert man bei konstanter Spannung U Länge und Querschnitt von an einer Batterie angeschlossenen Drähten, so sind die gemessenen Ströme proportional dem Querschnitt A und umgekehrt proportional der Länge l des Drahtes. □

Somit gilt:

Der elektrische Widerstand eines Leiters mit der Länge l und dem Querschnitt A ist

$$R = \frac{\varrho l}{A} \quad (3.40)$$

Die Proportionalitätskonstante ϱ nennt man spezifischen elektrischen Widerstand. Dieser ist vom Material und von der Temperatur abhängig.

Die reziproke Größe $\kappa = 1/\varrho$ nennt man elektrische Leitfähigkeit oder spezifischen Leitwert.

¹⁾ Im elektrotechnischen Sprachgebrauch nennt man nicht nur die Größe U/I Widerstand, sondern auch den widerstandsbehafteten Leiter selbst. Außerdem wird der Begriff Widerstand in der Mechanik auch für Widerstandskraft (z.B. Luftwiderstand) oder Reibungskraft gebraucht (s. Abschn. 1.3.3.6 und 1.6.3).

²⁾ Werner v. Siemens (1816 bis 1892).

Die Dimension des spezifischen Widerstandes ρ ist Widerstand \times Länge, er wird in der Einheit $\Omega \text{ m}$, oft auch in $\Omega \text{ cm}$ angegeben.

Widerstandsnormale zur Darstellung des Ohm können mit einer relativen Messunsicherheit von weniger als 10^{-6} hergestellt werden. Mit Hilfe des Quanten-Hall-Effektes (Abschn. 7.4.6) lässt sich die Einheit des elektrischen Widerstandes zwei Größenordnungen genauer darstellen.

Da in der Technik spezifische Widerstände häufig an Drahtstücken von 1 m Länge gemessen werden und der Querschnitt in mm^2 angegeben wird, findet man in Tabellen auch $\Omega \text{ mm}^2/\text{m}$ als Einheit. Die spezifischen Widerstände der Stoffe umfassen einen Bereich von 24 Zehnerpotenzen (Tafel 3.25).

Tafel 3.25 Spezifischer elektrischer Widerstand ρ bei 20 °C für einige Leiter und Nichtleiter

in $\mu\Omega\text{m} = \Omega \text{ mm}^2/\text{m}$		in $\Omega \text{ m}$	
Silber	0,015	Kunstharze	$10^9 \dots 10^{15}$
Kupfer	0,018	Glas	$10^{13} \dots 10^{14}$
Aluminium	0,029	Hartporzellan	$10^9 \dots 10^{15}$
Platin	0,098	Glimmer	$10^{13} \dots 10^{15}$
Manganin	0,43	Polystyrol	10^{14}
Konstantan	0,50		
Heizleiterlegierung CrAl	1,37		

Gültigkeit des Ohmschen Gesetzes. Der Widerstand R ist häufig, wie in den obigen Versuchen gezeigt, von der Spannung U und dem Strom I unabhängig. Dies geht aus Gl. (3.39) und (3.40) hervor, jedoch werden die eigentlichen physikalischen Erscheinungen der Elektronenbewegung durch diese Gleichungen noch nicht beschrieben. Denn die Geschwindigkeit der Ladungsträger in einem Leiter hängt von der elektrischen Feldstärke ab.

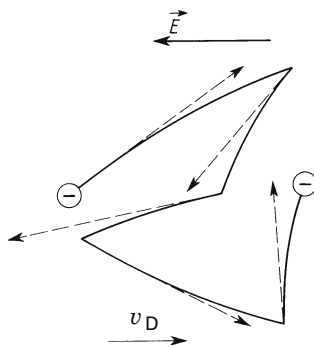


Bild 3.26 Durch die Wirkung des elektrischen Feldes bewegt sich ein Elektron nach jedem Stoß nicht geradlinig weiter (gestrichelte Bahn), sondern es wird gegen die Feldrichtung abgelenkt. Daraus ergibt sich eine Drift in Richtung von v_D .

Die Elektronen mit der Ladung e_0 in einem Leiter werden durch die Kraft des elektrischen Feldes beschleunigt. Der Betrag dieser Beschleunigung ist $a = F/m = e_0 E/m$. Nach kurzer Wegstrecke stoßen die Elektronen jedoch mit den Elektronen der Gitteratome zusammen. Nach jedem Stoß beginnt die Beschleunigung durch das äußere Feld von neuem (Bild 3.26).

Da die mittlere Zeit $\bar{\tau}$ zwischen zwei Stößen und die mittlere freie Weglänge \bar{l} ¹⁾ zwischen zwei Stößen konstant ist, erreichen die Elektronen zwischen den Stößen im Mittel immer die gleiche Endgeschwindigkeit. Die Hälfte dieser mittleren Endgeschwindigkeit ist ihre Durchschnittsgeschwindigkeit oder Driftgeschwindigkeit

$$v_D = \frac{1}{2} a \bar{\tau} = \frac{1}{2} \frac{e_0 E}{m} \bar{\tau}$$

¹⁾ S. Abschn. 2.3.1.3

Die Driftgeschwindigkeit v_D ist für alle Elektronen gleich und wegen der negativen Elektronenladung der Richtung des elektrischen Feldes entgegengerichtet. Ihr Betrag ist der elektrischen Feldstärke des äußeren Feldes proportional.

In einem Leiter mit der Länge l , der an der Spannung U liegt, herrscht die Feldstärke vom Betrag $E = U/l$. In der Leiterlänge mit dem Querschnitt A stehen N Elektronen für den Ladungstransport zur Verfügung. Die Zahl der Elektronen pro Volumeneinheit ist $n = N/V$. Durch die Fläche A treten in der Zeit dt so viele Elektronen, wie sich im Teilvolumen $A v_D dt$ befinden. Dies sind $n A v_D dt$ Elektronen mit der Ladung

$$dQ = e_0 n A v_D dt$$

Der Strom $I = dQ/dt$ ist dann $n e_0 A v_D$ und mit Gl. (3.37) die Stromdichte

$$S = e_0 n v_D \quad (3.41)$$

Schließlich erhalten wir mit Gl. (3.39) und (3.41) die allgemeine Form des Ohmschen Gesetzes, wovon Gl. (3.39) als spezieller Fall aufzufassen ist.

$$\frac{I}{A} = \kappa \frac{U}{l} \quad \text{oder} \quad \vec{S} = \kappa \vec{E} \quad (3.42)$$

Die Stromdichte ist der elektrischen Feldstärke proportional. Sie ist wie diese ein Vektor.

Wir wollen den Inhalt und den Gültigkeitsbereich dieses Gesetzes diskutieren:

Aus Gl. (3.41) und (3.42) folgt, dass die Driftgeschwindigkeit der Feldstärke, also der Kraft pro Ladung, proportional ist

$$v_D = \frac{\kappa}{e_0 n} E = \frac{\kappa}{e_0 n e_0} F \quad (3.43)$$

In Anlehnung an die Definition der Beweglichkeit ungeladener Teilchen mit Gl. (2.58) führen wir die Beweglichkeit von geladenen Teilchen ein:

Definition: Wir nennen den Quotienten aus Driftgeschwindigkeit v_D und elektrischer Feldstärke E

$$\frac{v_D}{E} = b$$

die Beweglichkeit von Ladungsträgern.

Mit der Beweglichkeit b der Elektronen wird aus Gl. (3.43)

$$v_D = bE = \frac{\kappa}{e_0^2 n} F \quad (3.44)$$

$$\text{bzw. } \kappa = b e_0 n \quad (3.45)$$

und mit Gl. (3.41)

$$S = n e_0 b E \quad (3.46)$$

Aus Gl. (3.44) muss man schließen:

Das Ohmsche Gesetz gilt immer, wenn die Driftgeschwindigkeit der Ladungsträger der wirkenden Kraft proportional ist.

Die Elektronen bewegen sich dann nicht ungehindert; sonst würden sie sich nicht mit konstanter Geschwindigkeit, sondern beschleunigt bewegen. Durch die Wechselwirkung der Elektronen mit dem Gitter entsteht eine Widerstandskraft. Die Widerstandskraft ist der Driftgeschwindigkeit proportional. Die Driftgeschwindigkeit v_D wächst solange, bis die Widerstandskraft F_W der Kraft F des Feldes entgegengesetzt gleich ist.

$$-F_W = F = \frac{e_0^2 n}{\kappa} v_D \quad (3.47)$$

Das Ohmsche Gesetz gilt erst, wenn nach Anlegen der elektrischen Spannung an einen Leiter die Widerstandskraft entgegengesetzt gleich der Kraft des elektrischen Feldes geworden ist, die Driftgeschwindigkeit der Elektronen also einen konstanten Wert erreicht hat.

Wenn die Zeitspanne bis zum Erreichen dieses Zustandes mit der Zeitdauer des Stromflusses vergleichbar ist, was z.B. bei Strömen der Fall ist, die in sehr kurzen Zeitabständen unterbrochen werden, gilt das Ohmsche Gesetz nicht.

Das benützte Modell erklärt nicht die sog. Supraleitung (s. Abschn. 7.4.4). Eine genaue Erklärung liefert erst die quantenmechanische Behandlung, die hier nicht gebracht werden kann (s. jedoch Abschn. 7.4.4).

Elektronengeschwindigkeit. Legt man an einen Leiter eine Spannung, so breitet sich darin die Feldstärke mit der für den Leiter gültigen Lichtgeschwindigkeit aus (s. Abschn. 5.2.1.2). Die Driftgeschwindigkeit der Elektronen selbst ist dagegen sehr klein. Die Feldkräfte wirken somit praktisch gleichzeitig auf alle Ladungsträger und setzen sie in Bewegung. Diese kommt also nicht durch gegenseitiges Anstoßen der Elektronen zustande, sondern sie setzt überall sofort ein, sobald sich das Feld aufgebaut hat.

Beispiel 10. Nach Abschn. 3.1.1.2 befinden sich in Metallen $10^{22} \dots 10^{23}$ freie Elektronen pro Kubikzentimeter. Das bedeutet, dass im Durchschnitt pro Atom ein Elektron frei beweglich ist. Fließt ein elektrischer Strom $I = 10$ A in einem Drahtquerschnitt $A = 2,5$ mm², so erhält man bei 10^{23} Elektronen pro Kubikzentimeter mit Gl. (3.41) die Driftgeschwindigkeit

$$v_D = \frac{S}{ne_0} = \frac{10 \text{ Am}^3}{2,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot 10^{29} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}} = 2,5 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Beispiel 10 zeigt, dass die Driftgeschwindigkeit der Elektronen in technischen Stromkreisen in der Größenordnung mm/s liegt.

Aufgaben zu Abschn. 3.2.2.1

1. An einem Draht mit der Länge $l = 1$ m und dem Querschnitt $A = 0,1$ mm² liegt die Spannung $U = 6$ V. Der Strom im Draht beträgt $I = 1,2$ A. Wie groß ist der elektrische Widerstand und der spezifische Widerstand des Leiters? Aus welchem Material könnte der Draht bestehen?

2. a) Ein Kondensator, der auf die Spannung U_0 aufgeladen ist, wird über einen elektrischen Widerstand R entladen. Der elektrische Strom I in Abhängigkeit von der Zeit t ist zu errechnen.
b) Wie groß ist der elektrische Strom I nach der Zeit $t = 0,1$ s, wenn ein Kondensator mit der Kapazität $C = 10$ μF und der Spannung $U = 100$ V über einen Widerstand $R = 10$ kΩ entladen wird?

3.2.2.2 Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes

Das in Abschn. 3.2.2.1 behandelte Ohmsche Gesetz gilt nur bei konstanter Temperatur des Leiters. Wir wollen im Folgenden den Einfluss der Temperatur auf den Widerstand erörtern.

□ **Versuch 18.** Wenn man einen metallischen Leiter mit der Flamme erwärmt und gleichzeitig Strom und Spannung misst, so stellt man fest, dass sich der Widerstand mit steigender Temperatur erhöht. □

Definition: Die relative Änderung $\Delta R/R$ des elektrischen Widerstandes R (oder des spezifischen Widerstandes ϱ) pro Temperaturänderung bezeichnet man als Temperaturkoeffizient α des elektrischen Widerstandes.

$$\alpha = \frac{\Delta R}{R \Delta T} = \frac{\Delta \varrho}{\varrho \Delta T} \quad (3.48)$$

Metalle. Der bei Metallen immer positive Temperaturkoeffizient α ist in nicht zu großen Temperaturbereichen praktisch konstant. Sein Wert liegt bei vielen reinen Metallen bei $1/250 \text{ K}^{-1}$ (vgl. damit den Ausdehnungskoeffizienten $1/273 \text{ K}^{-1}$ der Gase, Abschn. 2.2.3). Bei Legierungen mit höherem spezifischen Widerstand kann er sehr klein sein. Derartige Legierungen (Konstantan $\alpha = 3 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, Manganin $= 10^{-5} \text{ K}^{-1}$) werden z.B. für den Bau sehr konstanter Widerstände verwendet.

Beim Schmelzen steigt der elektrische Widerstand vieler Metalle sprunghaft auf etwa den doppelten Wert. Beim Abkühlen auf sehr tiefe Temperaturen wird er entweder konstant oder er geht bei einer bestimmten Sprungtemperatur plötzlich gegen null: Supraleitung (vgl. Abschn. 7.4.4).

Halbleiter sind bei niedrigen Temperaturen Isolatoren. Mit steigender Temperatur steigt die Leitfähigkeit um viele Größenordnungen. Halbleiter besitzen einen starken negativen Temperaturkoeffizienten des elektrischen Widerstandes (vgl. Abschn. 7.4.3). Halbleitende Schwermetalloxide mit Temperaturkoeffizienten von $(-3 \dots -6) \cdot 10^{-2} \text{ K}^{-1}$ sind unter dem Namen Heißleiter bekannt.

Modellvorstellung. Das Verhalten der elektrischen Leitfähigkeit in Abhängigkeit von der Temperatur lässt sich qualitativ durch das bisher benutzte Modell von der Struktur der Materie beschreiben. In Metallen bewegen sich die freien Elektronen unter dem Einfluss des elektrischen Feldes. Diese gerichtete Bewegung wird durch die ungeordnete Wärmebewegung gestört, und zwar umso mehr, je stärker jene mit steigender Temperatur wird. Die in Gl. (3.47) eingeführte Widerstandskraft steigt, die Beweglichkeit sinkt.

Bei Halbleitern sind bei sehr tiefen Temperaturen keine freien Ladungsträger vorhanden. Die Elektronen sind an die Atome gebunden, diese sitzen fest im Kristallgitter. Die Bindung ist nicht sehr stark, so dass die geringe Energiezufuhr beim Erwärmen genügt, um Ladungsträger zu befreien. Der Stoff wird mit zunehmender Temperatur leitfähiger, weil die Anzahl der freien Ladungsträger steigt (vgl. Abschn. 7.4.3) und zeigt schließlich dann metallisches Verhalten.

Das Wiedemann-Franzsche Gesetz beschreibt den Zusammenhang zwischen Wärmeleitfähigkeit und elektrischer Leitfähigkeit bei Metallen:

Die Wärmeleitfähigkeit verschiedener Metalle ist deren elektrischer Leitfähigkeit angenähert proportional.

Da die elektrische Leitfähigkeit leicht messbar ist, kann man oft schwierige und zeitraubende Experimente zur Bestimmung der thermischen Leitfähigkeit vermeiden.

Anwendungen. Die Temperaturabhängigkeit des Widerstandes dünner Metalldrähte (meist Pt oder Ni) wird zur Temperaturmessung benützt. „Widerstandsthermometer“ sind für einen großen Temperaturbereich ($-220\text{ °C} \dots +750\text{ °C}$) brauchbar. Da sie eine sehr geringe Wärmekapazität haben, gestatten sie rasches Messen bei geringer Wärmeableitung. Die Anzeigeverzögerungen betragen bei Messungen von Oberflächentemperaturen nur wenige Sekunden. Heißleiter werden zur Temperaturmessung und -regelung, sowie zur Begrenzung von Einschaltstromstößen verwendet.

Aufgabe zu Abschn. 3.2.2.2

1. Der Temperaturkoeffizient des elektrischen Widerstandes von Platin beträgt $\alpha = 3,85 \cdot 10^{-3}\text{ K}^{-1}$, der eines Kohlefadens $\alpha = -5,3 \cdot 10^{-4}\text{ K}^{-1}$.

Wie groß ist jeweils der Widerstand bei 0 °C , wenn beide bei 100 °C den elektrischen Widerstand $R = 138,5\ \Omega$ besitzen?

3.2.2.3 Abhängigkeit des elektrischen Widerstandes von der Spannung

Bei manchen geeigneten Halbleitern oder bei Kombinationen von Halbleitern mit Metallen unterscheidet sich der Widerstand bei Vorzeichen-Umkehr der angelegten Spannung um Größenordnungen. Diese Erscheinung erhält man mit Kupferoxidschichten auf Kupfer, bei Selen, bei Germanium- und Siliciumkristallen, z.B. mit Metallspitzen als Stromzuführung. Die Abhängigkeit des Stromes von der Spannung für eine solche sog. Kristalldiode zeigt Bild 3.27. Im Durchlassgebiet 1 steigt der Strom zunächst exponentiell und dann linear mit der Spannung. Im Sperrgebiet 2 ist der Strom sehr klein und annähernd konstant, bis er im Durchbruchgebiet 3 sehr steil in Sperrrichtung ansteigt (vgl. auch Abschn. 7.4.3).

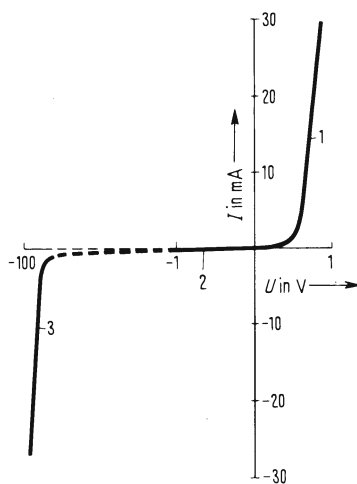


Bild 3.27 Kennlinie einer Kristalldiode

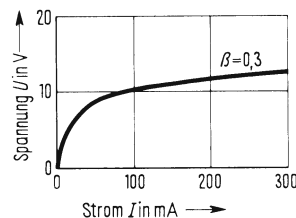


Bild 3.28 Strom-Spannungs-Kennlinie eines VDR-Widerstandes

Unter dem Namen VDR-Widerstände (Voltage Dependent Resistors) gibt es Halbleiterwiderstände, deren Stromspannungscharakteristik in Bild 3.28 dargestellt ist. Für sie gilt die Beziehung $U = \text{const } I^\beta$, wobei der Exponent $\beta < 1$ ist.

Anwendungen. Siliciumdioden und -flächengleichrichter dienen in allen Zweigen der Technik zur Gleichrichtung von Wechselströmen aller Art. Sie haben die Selen- und Kupferoxidgleichrichter weitgehend verdrängt. Als sog. Z-Dioden im Durchbruchgebiet betrieben, dienen sie zur Spannungsstabilisierung. Germaniumdioden werden vorwiegend bei höheren Frequenzen zur Gleichrichtung verwendet. VDR-Widerstände werden ebenfalls zur Konstanthaltung von Spannungen und als Überspannungsschutz benutzt.

3.2.2.4 Abhängigkeit des elektrischen Widerstandes von anderen Größen

Der elektrische Widerstand kann außer von der Temperatur und der Spannung noch von weiteren Größen abhängen. Der Widerstand eines Leiters erhöht sich beispielsweise im Allgemeinen, wenn man ihn in ein magnetisches Feld bringt (Magnetoresistiver Effekt). Die Leitfähigkeit verschiedener Isolatoren und Halbleiter steigt stark, wenn man sie Licht, infraroter oder ultravioletter Strahlung aussetzt: innerer lichtelektrischer Effekt (vgl. Abschn. 7.4.3). Außerdem ändert sich der Widerstand eines Leiters, wenn er mechanisch verformt wird.

Anwendungen. Besonders intensiv ist die Widerstandsänderung in Abhängigkeit von der Stärke des Magnetfeldes bei Indiumantimonid und Wismut. Sehr flach gewickelte Wismutspiralen dienen in der Technik deshalb zur Messung von Magnetfeldern. Der innere lichtelektrische Effekt kann in fotoelektrischen Wandlern bei Lichtmessungen oder strahlungsabhängigen Steuer- und Regelvorrichtungen ausgenutzt werden. Mäanderförmig in Schleifen gelegte und auf einen Träger aufgeklebte Leiter, sog. Dehnungsmessstreifen, gestatten die Messung kleiner Längenänderungen durch die Widerstandsänderung.

3.2.2.5 Innerer Widerstand einer Spannungsquelle

Ein Stromkreis besteht aus einer oder mehreren Spannungsquellen und den Verbrauchern einschließlich Zuleitungen. Technische Spannungs- oder Stromquellen sind überwiegend das öffentliche Netz (s. Abschn. 3.3.6.1) oder Batterien (s. Abschn. 3.2.4). Einen einfachen Stromkreis, bestehend aus einer Batterie und einem Leitersystem, zeigt Bild 3.29. Der Strom mit positiver Stromrichtung fließt von der Plusklemme der Batterie durch den Leiter mit dem Widerstand R_a zur Minus-Klemme. Er ist an allen Stellen des Leitersystems gleich groß und fließt auch in der Stromquelle selbst, und zwar von der negativen zur positiven Klemme. Der Strom hängt somit nicht nur vom Widerstand R_a des äußeren Leiters, sondern auch vom inneren Widerstand R_i der Stromquelle ab

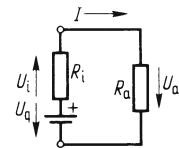


Bild 3.29
Einfacher Stromkreis

Die Spannung U_q ist die sog. Quellenspannung der Stromquelle und U_a die Klemmenspannung, also die für den äußeren Stromkreis verfügbare Spannung. Die verfügbare Spannung ist immer kleiner als die Quellenspannung, sie nähert sich ihr aber umso mehr, je kleiner der innere Widerstand R_i verglichen mit dem äußeren Widerstand R_a

$$I(R_a + R_i) = U_a + U_i = U_q \quad (3.49)$$

$$I = \frac{U_q}{R_a + R_i} \quad (3.50)$$

Die Spannung U_q ist die sog. Quellenspannung der Stromquelle und U_a die Klemmenspannung, also die für den äußeren Stromkreis verfügbare Spannung. Die verfügbare Spannung ist immer kleiner als die Quellenspannung, sie nähert sich ihr aber umso mehr, je kleiner der innere Widerstand R_i verglichen mit dem äußeren Widerstand R_a

ist und je kleiner der Strom I wird. Wird dagegen $R_a \ll R_i$ (Kurzschluss), so ist

$$\text{der Kurzschlussstrom } I_K = \frac{U_q}{R_i}.$$

In den Schaltungen der Elektrotechnik ist es üblich, die Richtungen von Spannungen und Strömen durch sog. Zählpfeile anzugeben. Beim Verbraucher-Zählpfeilsystem – VZS – weist der Spannungspfeil von der positiven zur negativen Klemme der anliegenden Spannung im äußeren (Verbraucher-)Stromkreis, in dem der Strompfeil die festgelegte positive Stromrichtung (s.a. Abschn. 3.2.1) angibt (Bild 3.29).

Beispiel 11. Eine Kraftfahrzeugbatterie, der der Dauerstrom $I = 20$ A entnommen werden darf, hat den Innenwiderstand $R_i = 0,02 \Omega$. Bei der Quellenspannung $U_q = 12,6$ V ergibt das den Kurzschlussstrom $I_K = 12,6 \text{ V} / (2 \cdot 10^{-2} \Omega) = 630$ A.

3.2.2.6 Kirchhoffsche Gesetze

Ein Stromkreis, der aus mehreren Leiterzweigen zusammengeschaltet ist (Netzwerk), lässt sich in einfacher Weise mit den Kirchhoffschen Gesetzen beschreiben.

Erstes Kirchhoffsches¹⁾ Gesetz (Verzweigungsregel). In einem Verzweigungspunkt ist die Summe der zufließenden Ströme gleich der Summe der abfließenden Ströme.

Beispiel 12. In Bild 3.30 sind A und B Verzweigungspunkte. In den Zweigen 1 und 2 mit den Widerständen R_1 (1) und R_2 (2) fließen die Teilströme I_1 und I_2 . Die Summe der Teilströme muss gleich dem Strom im unverzweigten Teil sein.

$$I = I_1 + I_2$$

Im Punkt A fließt der Strom I zu, die Ströme I_1 und I_2 fließen ab. In Punkt B fließen die Ströme I_1 und I_2 zu und der Strom I ab.

Zweites Kirchhoffsches Gesetz (Maschenregel). In jedem geschlossenen Teilkreis (Masche) eines Netzwerkes ist die Summe der Spannungen an den Widerständen gleich der Summe der Klemmenspannungen aller vorhandenen Spannungsquellen.

Beispiel 13. In Bild 3.30 ist die Spannung zwischen den Punkten A und B gleich der Klemmenspannung U_{AB} der Batterie. In beiden Zweigen beträgt die Spannung

$$\begin{aligned} U_{AB} &= R_1 I_1; & U_{AB} &= R_2 I_2 \\ I_1 : I_2 &= U_{AB} / R_1 : U_{AB} / R_2 = R_2 : R_1 \end{aligned} \quad (3.51)$$

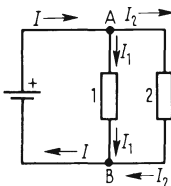


Bild 3.30
Verzweigter Stromkreis

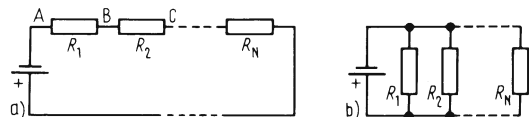


Bild 3.31
a) Serienschaltung
b) Parallelschaltung von Widerständen

¹⁾ Robert Kirchhoff (1824 bis 1887).

Serien- und Parallelschaltung von Widerständen. In Bild 3.31a ist die Summe aller Teilspannungen $U_{AB} + U_{BC} + \dots$, die an den Widerständen R_1, R_2, \dots liegen, gleich der Klemmenspannung. Da der Strom I konstant ist, erhalten wir für den

Gesamtwiderstand R_S bei Serienschaltung

$$R_S = R_1 + R_2 + \dots + R_N \quad (3.52)$$

Im Stromkreis 3.31b ist der Gesamtstrom

$$I = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \dots + \frac{U}{R_N} = \frac{U}{R_p} \quad \text{Damit erhält man den}$$

Gesamtwiderstand R_p bei Parallelschaltung aus

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N} \quad (3.53)$$

Wheatstonesche Messbrücke. Eine wichtige Anwendung der Kirchhoffschen Gesetze ist die Messbrücke zur Bestimmung von Widerständen. Die wichtigste Brückenordnung ist die nach Wheatstone (1802 bis 1875) (Bild 3.32).

Ein kalibrierter Präzisionswiderstand 1 wird mit einem kontinuierlich verschiebbaren Abgriff 2 (Schleifer) so eingestellt, dass das Galvanometer 3 stromlos wird. Die Spannung U_{CD} ist dann gleich null.

Wenn der Widerstand R_1 unbekannt und R_2 ein (sehr genauer) bekannter Widerstand ist, wird wegen $R_1/R_2 = R_3/R_4$

$$R_1 = R_2 R_3 / R_4$$

Das Verhältnis $R_3 : R_4$ ist am Schleifer ablesbar bzw. entspricht bei einem homogenen Draht mit konstantem Querschnitt dem durch den Abgriff markierten Längenverhältnis $l_3 : l_4$.

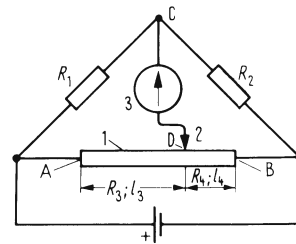


Bild 3.32 Wheatstonesche Messbrücke

Aufgaben zu Abschn. 3.2.2.5 und 3.2.2.6

- Wir messen an der Spannung 220 Volt mit einem Amperemeter den Strom $I = 3,79$ A, der durch einen Verbraucher fließt, dessen Widerstand $R = 55 \Omega$ bekannt ist. Wie groß ist der Innenwiderstand des Strommessers?
- 12 Widerstände mit je $R = 1 \Omega$ sind so angeordnet, dass sie den Kanten eines Würfels entsprechen. An den Eckpunkten sind sie leitend verbunden. An zwei räumlich diagonal gegenüberliegenden Eckpunkten wird die Spannung $U = 10$ V zugeführt. Welche Spannung liegt dann zwischen zwei anderen einander räumlich diagonal gegenüberliegenden Eckpunkten?

- Die Widerstände R_1 und R_2 in Bild 3.33 bilden einen Spannungsteiler (Potentiometerschaltung) in Bezug auf die Batteriespannung U .
a) Wie groß ist die Spannung am Verbraucher mit dem Widerstand R_V ? b) Zahlenbeispiel $U = 10$ V; $R_1 = 90 \Omega$; $R_2 = 11 \Omega$; $R_V = 100 \Omega$.

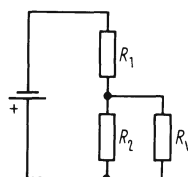


Bild 3.33
Spannungsteiler

3.2.2.7 Elektrische Arbeit und Leistung in Stromkreisen

In einem Leiter mit der Länge s , angeschlossen an eine Stromquelle mit der Spannung U herrscht die Feldstärke $E = U/s$. Die Kraft auf eine Ladung Q ist $F = QE = QU/s$. Wird die Ladung längs des Weges s verschoben, so ist die Arbeit

$$W = Fs = QU \quad (3.45)$$

Fließt während der Zeit t der Strom I , so wird die Ladung $Q = It$ bewegt. Damit ist die dazu erforderliche

$$\text{Arbeit } W = UI t \quad (3.55)$$

Dann ist die Leistung $P = W/t$ des Stromes

$$P = UI \quad (3.56)$$

Einheiten: Mit der Einheit der Spannung (s. Abschn. 3.1.2.2)

$$1 \text{ V} = 1 \frac{\text{Nm}}{\text{As}}$$

ist die Einheit der elektrischen Leistung

$$1 \text{ VA} = 1 \frac{\text{Nm}}{\text{s}} = 1 \text{ W} \quad (3.57)$$

Über die Einheitengleichung (3.57) wird also die Kohärenz der mechanischen und elektrischen Einheiten im internationalen Einheitensystem (SI) hergestellt. Die elektrische Arbeit $W = UI t$ wird im Leiter bei konstanter Driftgeschwindigkeit der Ladungsträger verrichtet. Die Arbeit des elektrischen Stromes ist also Reibungsarbeit und dient so ausschließlich zur Erzeugung von Wärme. Man bezeichnet sie auch als Stromwärme oder Joulesche Wärme.

Beispiel 14. In einem Draht mit dem Widerstand R fließt bei der angelegten Spannung U der Strom I . Mit $U = RI$ ist die Leistung des Stromes bzw. die Arbeit

$$P = I^2 R \quad \text{bzw.} \quad W = I^2 R t$$

$$\text{oder} \quad P = \frac{U^2}{R} \quad \text{bzw.} \quad P = \frac{U^2}{R} t$$

Die lineare Ausdehnung des Drahtes eines Hitzdrahtinstrumentes (s. Abschn. 3.2.1.2) ist der im Draht erzeugten Wärmeleistung und damit der elektrischen Leistung proportional. Die Anzeige des Instrumentes ist also dem Quadrat des Stromes proportional. Daher hat es eine sog. quadratische Skala.

Anwendungen. Elektrische Heiz- und Kochgeräte sowie die Anlagen der industriellen Elektrowärmetechnik beruhen auf der Erzeugung Joulescher Wärme. Die Wolframwendeln der Glühlampen werden durch Stromwärme auf die Temperatur 2700 K gebracht und geben Lichtenergie ab. In Stromkreisen bedingt die Joulesche Wärme meist unerwünschte Energieverluste.

Aufgaben zu Abschn. 3.2.2.7

1. 1 l Wasser mit der Temperatur $\vartheta = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ soll auf einer elektrischen Kochplatte (Leistung $P = 2000 \text{ W}$) zum Sieden gebracht werden. Dabei gehen 30% der Wärme an die Umgebung verloren. Nach welcher Zeit erreicht das Wasser die Temperatur $100 \text{ }^\circ\text{C}$? Was kostet dieser Vorgang beim Preis $0,15 \text{ €}$ pro Kilowattstunde?

2. Eine Autobatterie wird mit einem 5 m langen Kupferkabel mit dem Leiterquerschnitt $1,5 \text{ mm}^2$ an ein Ladegerät mit der Klemmenspannung 15 V angeschlossen. Der Ladestrom ist 12 A . Wie groß ist der Spannungsabfall und der Leistungsverlust in der Zuleitung?

3.2.3 Elektrische Leitung in Flüssigkeiten

Die elektrische Leitung in Flüssigkeiten wird in den Lehrbüchern der Chemie, Physikalischen Chemie und Elektrochemie eingehend behandelt. Wir beschränken uns im Folgenden auf einige wesentliche Erscheinungen.

Metalle sind auch in flüssiger Phase gute Leiter. Geschmolzene Salze leiten ebenfalls gut. Die meisten anderen Flüssigkeiten sind im Vergleich dazu sehr schlechte Leiter. Destilliertes Wasser hat die spezifische Leitfähigkeit $\kappa = (0,3 \dots 1) \cdot 10^{-12} \Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$. Das ist ein Wert, den gut isolierende Kunststoffe oder Glassorten aufweisen.

□ **Versuch 19.** In ein mit destilliertem Wasser gefülltes Glasgefäß (Bild 3.34) tauchen zwei Platinbleche, sog. Elektroden, ein. Die eine der Elektroden, verbunden mit der negativen Klemme einer Batterie, nennen wir Kathode. Die andere, über einen Strommesser an der positiven Klemme liegend, heißt Anode. Ist der Strommesser empfindlich genug, so zeigt er einen sehr kleinen Strom an. Setzt man dem Wasser wenige Tropfen einer Säure, Lauge oder eine geringe Menge eines wasserlöslichen Salzes zu, so steigt der Strom stark an, bei ausreichender Menge sogar um viele Größenordnungen. Dabei beobachtet man das Aufsteigen von Gasblasen an den Elektroden und/oder Metallniederschläge an der Kathode. □

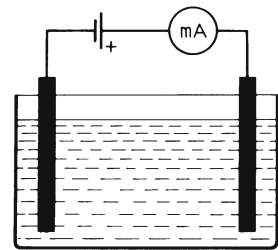


Bild 3.34 Messung der Leitfähigkeit einer Flüssigkeit

Die Leitfähigkeit des Wassers hängt also von den darin gelösten Stoffen ab. Die spezifische Leitfähigkeit der Flüssigkeit erreicht bei einem Anteil von etwa 30 % Schwefelsäure im Wasser den Maximalwert $\kappa = 0,7 \Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$. Die Leitfähigkeit der Metalle wird jedoch bei weitem nicht erreicht.

Außerdem zersetzt jeder durch Lösungen oder Schmelzen fließende Strom die betreffende Lösung oder Schmelze an den Elektroden.

Definition: Die Zersetzung einer Lösung oder Schmelze durch elektrischen Strom nennt man Elektrolyse. Die leitfähigen Lösungen oder Schmelzen eines Salzes, einer Säure oder Lauge heißen Elektrolyte.

3.2.3.1 Dissoziation

In einem Elektrolyten sind keine frei beweglichen Elektronen vorhanden. Die Moleküle oder Kristalle der Säuren, Laugen oder Salze zerfallen beim Lösen und Schmelzen jedoch in elektrisch geladene Atome oder Atomgruppen, also in Ionen (s. Abschn. 3.1.3.1). Das kann man sich – vereinfacht – wie folgt erklären: Zwischen den ungleichartig geladenen Ionen

wirkt nach dem Coulombschen Gesetz die Anziehungskraft $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$. Wenn

die Dielektrizitätszahl des Lösungsmittels, z.B. von Wasser, sehr hoch ist ($\epsilon_r = 81,6$), wird diese Kraft sehr klein, sodass sich die Ionen auf Grund ihrer thermischen Energie voneinander trennen können. In Benzol z.B. tritt dagegen wegen der kleinen Dielektrizitätszahl

($\epsilon_r = 2,3$) keine Trennung der Ionen auf. Beim Schmelzen wird bei konstanter Anziehungskraft die thermische Energie soweit erhöht, dass sich die Ionen trennen können.

Definition: Das Zerfallen der Moleküle oder Kristalle in Ionen nennt man Dissoziation.

Die Dissoziation der Moleküle ist Voraussetzung für das Zustandekommen eines Stromes beim Anlegen der Spannung und somit für die Elektrolyse. Man spricht deshalb auch von elektrolytischer Dissoziation, obwohl sie von der Elektrolyse unabhängig ist. Ein Kristall des Kochsalzes z.B. zerfällt in Natriumionen Na^+ mit einer positiven Elementarladung und Chlorionen Cl^- mit einer negativen Elementarladung. Fließt ein Strom, so wandern die Natriumionen zur Kathode, die Chlorionen zur Anode. Die durch Strom in Lösungen oder Schmelzen von Säuren, Laugen und Salzen zur Anode und Kathode bewegten Ionen zeigt folgende Zusammenstellung:

	zur Kathode	zur Anode
Säuren	Wasserstoffion	Säurerestion
Laugen	Metallion	Hydroxylion (OH^-)
Salze	Metallion	Säurerestion

Anwendungen. Das gleichmäßige Überziehen von Körpern mit dünnen metallischen Schichten auf elektrolytischem Wege (Galvanisieren, benannt nach L. Galvani, 1737 bis 1798) wird vor allem bei Silber, Kupfer, Nickel, Gold, Zink und Chrom angewandt. Das elektrolytische Abtragen von rauen metallischen Flächen beim sog. elektrolytischen Polieren bringt besonders glatte Oberflächen. Metallionen gehen dabei von dem als Anode geschalteten Körper in Lösung. Hochglänzende Oberflächen erzielt man z.B. beim elektrolytischen Polieren von Aluminium. In der gleichen Weise erreicht man das Abtragen von Bohrgrat an unzugänglichen Stellen eines Werkstückes. Die Beseitigung von Zunder geschieht ebenfalls elektrolytisch bei Temperaturen über 100°C mit Stromdichten von mehr als 1 A/cm^2 . Anodisches Oxidieren heißt die Erzeugung von Oxidschichten auf den als Anode dienenden Körpern durch den dort abgeschiedenen Sauerstoff. Eloxiert nennt man das so mit einer sehr harten Oxidschicht überzogene Aluminium. Auch die Erzeugung sehr reiner Metalle, z.B. von Elektrolytkupfer, geschieht vielfach elektrolytisch. Elektrolytisch gewonnen werden u.a. das Aluminium (aus der Schmelze) und einige Nichtmetalle, auch organische Verbindungen.

3.2.3.2 Faradaysches Gesetz

Wir wollen die bei der Elektrolyse auftretenden Erscheinungen quantitativ untersuchen:

□ **Versuch 20.** In ein mit Silbernitratlösung gefülltes Gefäß tauchen zwei Platinelektroden, deren Masse durch Wägung bestimmt wurde. Fließt in dem Elektrolyten ein Strom, so schlägt sich auf der Kathode Silber nieder. Wenn man den Versuch quantitativ durchführt, so unterbricht man von Zeit zu Zeit den konstanten Strom und bestimmt durch Wägung die Masse des niedergeschlagenen Silbers. Dabei stellt man fest, dass diese der transportierten Ladung $Q = It$ proportional ist. Der Strom 1 A scheidet in der Sekunde $1,118\text{ mg}$ Silber ab. □

Faradaysches Gesetz: Die elektrolytisch abgeschiedene Masse ist der transportierten Ladung proportional

$$m = \overset{\cdot}{A}Q = \overset{\cdot}{A}It \quad (3.58)$$

Die Proportionalitätskonstante $\overset{\cdot}{A}$ nennt man das elektrochemische Äquivalent.

In Versuch 20 wurde die Ladung von den Ionen des Silbernitrats transportiert. Wandern N Ionen mit der Masse m_M , so wird die Masse $m = N m_M$ abgeschieden. Es gibt Ionen, die eine Elementarladung, und solche, die mehrere Elementarladungen transportieren.

Definition: Die Anzahl z der Elementarladungen eines Ions nennt man Wertigkeit.

Damit ist die transportierte Ladung

$$Q = N z e_0$$

und mit Gl. (3.58) wird das

elektrochemische Äquivalent

$$\dot{A} = \frac{m}{Q} = \frac{N m_M}{N z e_0} = \frac{m_M}{z e_0} \quad (3.59)$$

Dabei ist $m_M = m/N$ die Masse eines Ions.

Das elektrochemische Äquivalent von Silber ist mit Gl. (3.58) $\dot{A} = m/Q = 1,118 \cdot 10^{-6}$ kg/(As); das ist $1,035 \cdot 10^{-8}$ kmol/(As)¹⁾ und der Kehrwert $9,648 \cdot 10^7$ As/kmol. Mit der Wertigkeit $z = 1$ errechnen wir mit Gl. (3.59) die Zahl der Moleküle pro Kilomol, die Avogadro-Konstante $N_A = (9,642 \text{ As/kmol})/(z e_0) = 6,022 \cdot 10^{26} \text{ kmol}^{-1}$, die z.B. auf diese Weise bestimmt werden kann.

Man kann den in Abschn. 2.2.3 eingeführten Begriff Stoffmenge = Zahl gleicher Teilchen, mit dem Formelzeichen ν , auch auf gleich geladene Ionen anwenden.

Von 1 kmol, also N_A gleichgeladenen Ionen mit der Wertigkeit z werden $N_A z$ Elementarladungen transportiert, von der Menge ν also $N_A \nu z$ Elementarladungen. Das Produkt νz nennt man oft auch Äquivalentmenge. Die gesamte transportierte Ladung ist demnach

$$Q = z \nu N_A e_0$$

Definition:

$$F = \frac{Q}{z \nu} = N_A e_0 = 9,648 \cdot 10^7 \frac{\text{As}}{\text{kmol}} \quad (3.60)$$

heißt Faradaykonstante. Sie gibt die pro Äquivalentmenge $z \nu$ transportierte Ladung an und ist, weil N_A und e_0 von der Stoffart unabhängig sind, eine unabhängige Naturkonstante.

Da sich Massen sehr genau bestimmen lassen, eignet sich die Elektrolyse hervorragend zur genauen Messung von elektrischen Ladungen und Strömen. Das internationale Ampere wurde früher mit Hilfe der Silberabscheidung definiert.

Aufgabe zu Abschn. 3.2.3

1. Ein Gegenstand mit der Oberfläche $A = 20 \text{ cm}^2$ Zeit t ist bei dem Strom $I = 5 \text{ A}$ die Kupferschicht $2 \cdot 10^{-5} \text{ m}$ dick? soll galvanisch verkupfert werden. Nach welcher

¹⁾ Wegen der Umwandlung in das molare elektrochemische Äquivalent s. Abschn. 2.2.3.2.

3.2.4 Galvanische Elemente

3.2.4.1 Vorgänge an den Elektroden

Die meisten Salze lösen sich leicht in Wasser; dabei gehen sowohl die Metallionen als auch die Ionen des Säurerestes getrennt in Lösung. Metalle dagegen lösen sich nur äußerst gering in Wasser; denn hierbei kann das Metall nur als positiv geladenes Ion in Lösung gehen, die Elektronen müssen im metallischen Körper zurückbleiben. Auf diese Weise lädt sich der Elektrolyt positiv gegen das Metall auf, bis die Spannung in der Grenzschicht Metall-Lösung so groß ist, dass die thermische Bewegungsenergie der Metallionen nicht mehr ausreicht, gegen sie anzulaufen. Die Löslichkeit ist bei verschiedenen Metallen unterschiedlich. Dementsprechend verschieden sind die zwischen Metall und Elektrolyt auftretenden Spannungen.

□ **Versuch 21.** Taucht man eine Silberelektrode und eine Eisenelektrode in verdünnte Schwefelsäure, so misst man zwischen den beiden Elektroden die Quellenspannung $U_q = 1,24$ V. Die gemessene Spannung setzt sich aus der Differenz der einzelnen Spannungen der Elektroden gegen den Elektrolyten und aus Berührungsspannungen (s. Abschn. 3.2.5.1) im äußeren Stromkreis zusammen. Verbindet man die beiden Elektroden mit einem Draht, so fließt darin ein Strom. □

Tauchen zwei verschiedene Metalle in eine elektrolytische Lösung, so tritt zwischen ihnen eine Spannung auf, und man nennt die Anordnung ein galvanisches Element.

3.2.4.2 Voltasche Spannungsreihe

Die Spannung zwischen dem Elektrolyten und einer Elektrode ist beim galvanischen Element nicht messbar, denn jede Verbindung eines Messinstrumentes mit dem Elektrolyten stellt wieder eine Elektrode dar. Zur Festlegung vergleichbarer Zahlenwerte für die Potentiale der galvanischen Elemente wurde vereinbart, deren Spannung jeweils in einer wässrigen Lösung unter Benutzung einer sog. Normal-Wasserstoffelektrode zu messen, deren Potential willkürlich gleich null gesetzt wird. Man erhält dann die Normalspannung für die betreffende Metallelektrode, wenn der Elektrolyt normale¹⁾ Konzentration hat. Eine Normal-Wasserstoffelektrode besteht aus Platinblech, das mit Wasserstoff von Atmosphärendruck bedeckt ist und das in eine Säurelösung eintaucht, deren Wasserstoffionenkonzentration, das heißt die Zahl der Wasserstoffionen pro Volumen, gleich der von normaler¹⁾ Salzsäure bei 25 °C ist. Ordnet man die Normalspannungen nach Beträgen und Vorzeichen (Tafel 3.35), so erhält man die Voltasche Spannungsreihe (A. Volta, 1745 bis 1827).

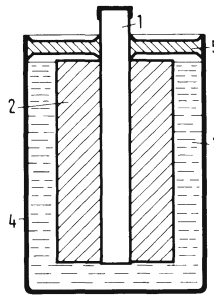
Kennzeichnend für ein galvanisches Element ist die Spannung zwischen den Elektroden, die Quellenspannung U_q der Zelle (s. Abschn. 3.2.2.5).

Anwendungen. Galvanische Elemente, deren Quellenspannungen von der Temperatur praktisch vernachlässigbar oder in berechenbarer Weise abhängen, dienen als Spannungsnormale, z.B. das Weston-element mit 1,01830 Volt bei 20 °C. Als sog. Trockenbatterie ist das Leclanché-Element weit ver-

¹⁾ Normale Konzentration hat die Lösung von 1 Äquivalentmasse = M_r kg/z des gelösten Stoffes in 1 m³ Lösung.

Tafel 3.35 Spannungsreihe der Elemente

Element	Spannung in Volt	Element	Spannung in Volt
Li	-3,02	Pb	-0,126
K	-2,92	H ₂	0
Mg	-2,35	Cu	+0,34
Zn	-0,76	Te	+0,72
Fe	-0,44	Ag	+0,81
Cd	-0,40	Hg	+0,86
Ni	-0,25	Au	+1,5



- 1 Ableiter
 2 Braunstein MnO₂ mit Ruß
 = positive Elektrode
 3 Salmiaklösung mit Stärkekleister
 4 negative Zinkelektrode
 5 Vergussmasse

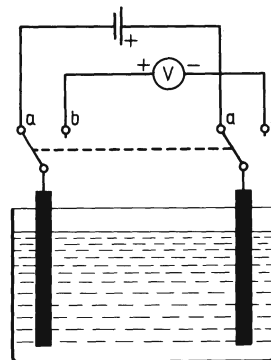
Bild 3.36 Trockenelement

breitet (Bild 3.36). Seine Quellenspannung beträgt 1,5...1,6 (unter Umständen bis 1,9) Volt. In einem solchen Element wird elektrische Energie aus der chemischen Bindungsenergie gewonnen. Bei der Entladung wird der „Brennstoff“ Zinkbecher oxidiert. Verbesserte technische Versionen verwenden unterschiedliche Elektrolytmaterialien wie Zinkchlorid, Magnesiumchlorid oder Kalilauge. Mit Lithium als Anodenmaterial werden Zellen hoher Energiedichte und Lebensdauer hergestellt, die in unterschiedlichen Kombinationen Spannungen zwischen 1,5 V und 3,5 V ergeben. Mit Quecksilberoxid oder Silberoxid als positive Elektrodenmaterialien erreicht man bei sog. Knopfzellen besonders hohe Energiedichten. In der Zn-Luft-Zelle wird der Sauerstoff aus der Atmosphäre zur Oxidation genützt.

Eine andere Vorrichtung, bei der Brennstoff und Oxidationsmittel im Gegensatz dazu außerhalb des Elementes gespeichert und von außen zugeführt werden, nennt man Brennstoffzelle. Bei dieser Stromquelle wird durch Direktumwandlung elektrische Energie aus chemischer Energie gewonnen. Im einfachsten Fall wird Wasserstoff mit Hilfe von Sauerstoff in porösen Elektroden zu Wasser oxidiert. Die Elektroden müssen großflächig sein und Elektronen gut leiten [48]. Die Quellenspannung errechnet sich hierfür aus dem Heizwert (Wärme ΔQ pro Menge v oder Masse m , die bei vollständiger Verbrennung frei wird) $2,4 \cdot 10^5$ kWs/kmol, der Wertigkeit z und der Faradaykonstante F zu $U_p = Q/vzF = 1,24$ V. Der tatsächlich gemessene Wert ist nur wenig niedriger. Die verschiedenen Brennstoffzellen unterscheiden sich durch die verwendeten Materialien und die Betriebstemperaturen. Die alkalischen Zellen mit einer Temperatur zwischen 0 °C und 80 °C benötigen reinen Wasserstoff und Sauerstoff. Mit einer Polymerelektrolytmembran ist im Temperaturbereich bis 150 °C ein Betrieb mit Luft möglich, womit vor allem ein mobiler Einsatz erleichtert wird. Hochtemperatur-Brennstoffzellen haben Betriebstemperaturen bis 1000 °C. Sie sind vor allem für stationäre Anwendungen interessant. In Entwicklung sind insgesamt Zellen mit geringer Leistung (wenige Watt) ebenso wie solche von 1000 kW. Die Vorteile von Brennstoffzellen liegen in hohen Wirkungsgraden (bis über 50 %) bei vernachlässigbarer Schadstoffemission.

3.2.4.3 Elektrolytische Polarisation

□ **Versuch 22.** In ein mit einem Elektrolyten gefülltes Gefäß (Bild 3.37) tauchen zwei Elektroden aus demselben Material ein. In der Stellung a des doppelpoligen Umschalters verbinden wir die Zelle mit einer Stromquelle; in der Zelle fließt ein Strom. Bringt man nach kurzer Zeit den Schalter in Stellung b, so zeigt der nun mit den Elektroden verbundene empfindliche Spannungsmesser eine Spannung an. Diese Spannung hat ein gegenüber der Batteriespannung umgekehrtes Vorzeichen. □

**Bild 3.37** Nachweis der elektrolytischen Polarisation

Fließt in einer elektrolytischen Zelle mit Elektroden aus demselben Material ein Strom, so lagern sich die an die Elektroden gelangten Ionen dort ab, oder sie reagieren mit dem Elektrodenmaterial. In beiden Fällen werden die Elektroden einander ungleich, sie werden polarisiert, es entsteht ein galvanisches Element. Polarisation tritt auch auf, wenn die Elektroden aus verschiedenen Materialien bestehen, so z.B. bei galvanischen Elementen.

Die durch den Strom in Elektrolyten an den Elektroden hervorgerufenen Veränderungen nennt man elektrolytische Polarisation.

Meist entsteht die Polarisation durch Anlagern von Wasserstoff (H_2) auf der positiven Elektrode. Durch Einhüllen dieser Elektrode in ein oxidierendes Medium wird die elektrolytische Polarisation vermieden. Im Trockenelement (Bild 3.36) wirkt der Braunstein als Depolarisator.

3.2.4.4 Sekundärelemente, Akkumulatoren

In den galvanischen Elementen wird chemische Energie in elektrische umgewandelt. Dieser Vorgang ist bei den oben erwähnten Elementen nur in geringem Maße umkehrbar. Elemente, die nach der Entladung unbrauchbar geworden sind, nennt man Primärelemente. Ist der Vorgang jedoch reversibel, so spricht man von Sekundärelementen oder Akkumulatoren.

Anwendungen. Weit verbreitet ist vor allem wegen des geringen inneren Widerstandes der Blei-Akkumulator mit verdünnter Schwefelsäure als Elektrolyt. Im geladenen Zustand besteht seine positive Elektrode aus Bleidioxid, die negative aus Blei. Die Quellenspannung beträgt 2,1 Volt pro Zelle. Bei der Entladung bildet sich auf beiden Elektroden Bleisulfat. Dabei sinkt die Säuredichte. Bei der Ladung läuft der Prozess umgekehrt ab. Die chemische Reaktionsgleichung lautet:

$PbO_2 + Pb + 2H_2SO_4 \rightarrow 2PbSO_4 + 2H_2O$. Die speicherbare spezifische Energie liegt bei 30 Wh/kg. Der Wirkungsgrad der Energiespeicherung beträgt etwa 75%.

Mit Kalilauge als Elektrolyt und mit positiver Nickelelektrode und negativer Cadmium- oder Eisen-elektrode werden Akkumulatoren hoher Lebensdauer gebaut. Ihre Quellenspannung beträgt ca. 1,35 V pro Zelle.

Frei von den Schadstoffen Cadmium, Quecksilber und Blei, bei doppelter Kapazität gegenüber Ni-Cd-Zellen, sind die wiederaufladbaren Nickel-Hydrid-Batterien. Dabei ist der Wasserstoff in Form von Hydriden in den Elektroden gespeichert.

In Natrium-Nickelchlorid-Batterien befindet sich in geladenem Zustand Natrium als negative, Nickelchlorid als positive Elektrode. Bei der Entladung reagiert Na mit dem NiCl so, dass NaCl und Ni entsteht. Beim Laden verläuft der Prozess umgekehrt. Diese Batterie hat die Zellenspannung 2,95 V, ist umweltfreundlich, energiereich und aus ziemlich billigem Material.

Mit einer Zink-Brom-Batterie hofft man, künftig über ein preiswertes Akkumulatorsystem für die Sonnenenergienutzung im häuslichen Bereich zu verfügen.

Aufgaben zu Abschn. 3.2.4

1. a) Wie hoch ist die Quellenspannung eines sog. Daniell-Elementes, das aus einer Kupfer- und einer Zink-Elektrode in normaler Kupfersulfatlösung besteht?

b) Welche Klemmenspannung misst man bei 0,1 W Leistungsentnahme, wenn der innere Widerstand des Elementes 2Ω beträgt?

2. Die sog. „Kapazität“ (nicht zu verwechseln mit der Kapazität C eines Kondensators) eines

Akkumulators wird in Amperestunden angegeben. Für eine Autobatterie beträgt sie z.B. 55 Ah. Wie lange kann man mit dieser Batterie bei einem Wirkungsgrad der Energieabgabe von 80% die Standbeleuchtung (Leistungsbedarf 20 W) eines Kraftfahrzeugs mit einer 12 V-Anlage betreiben?

Auf diese Weise lässt sich jedoch lediglich eine grobe Abschätzung der Entladezeit vornehmen. Mit der Spannung sinkt auch der Strom während

der Entladung. Für die Beurteilung der nutzbaren Kapazität aller Arten von Batterie werden die Spannungs-Zeit- oder Strom-Zeit-Kurven bei der Entladung experimentell ermittelt. Die Kurven hängen außerdem noch stark von der Temperatur ab. Bild 3.38 zeigt eine Norm-Entladungskurve für eine (Zink-)Trockenbatterie 9 V beim Lastwiderstand 900Ω und 4 Stunden Einschaltdauer pro Tag, 5 Tage pro Woche. Welche Energie kann dieser Batterie entnommen werden, wenn sie bei der Spannung $4,5 \text{ V}$ als entladen gilt?

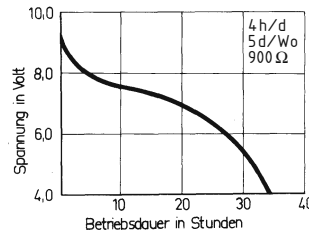


Bild 3.38 Normentladekurve einer Flachzellenbatterie 9 V

3.2.5 Thermoelektrische Erscheinungen

3.2.5.1 Thermoelektrische Spannung

Aus einem Körper treten im Vakuum bei Zimmertemperatur einige wenige Elektronen oder Ionen aus. Die Elektronen im Gitter sind nämlich in dauernder Wärmebewegung. Einige können dadurch die Oberfläche verlassen. Dabei muss gegen die Bindungskräfte eine Arbeit, die Ablösearbeit oder Austrittsarbeit, verrichtet werden. Sie muss durch die thermische Energie der Teilchen aufgebracht werden. Berühren sich verschiedene Metalle oder Metalllegierungen, so gehen Elektronen aus dem Metall niedrigerer Austrittsarbeit in das Metall höherer Austrittsarbeit über. Das erste lädt sich positiv gegenüber dem zweiten Metall auf, es entsteht eine Berührungsspannung. Verbinden wir die beiden Metalle zu einem geschlossenen Stromkreis (Bild 3.39 a) mit zwei Berührungsstellen 1 und 2, so fließt dennoch kein Strom. Denn die beiden Berührungsspannungen sind gleich groß und einander entgegengesetzt gerichtet, sie heben sich also auf. Die Berührungsspannungen hängen aber von der Temperatur ab (s. oben).

Wenn also beide Berührungsstellen verschiedene Temperaturen haben (Bild 3.39b), so fließt in dem Stromkreis ein Strom, weil die Berührungsspannung der wärmeren Stelle größer ist als diejenige der kälteren Stelle: Wir haben ein Thermoelement. Der Strom hängt ab von den Widerständen im Stromkreis und der Differenz der Berührungsspannungen, der sog. Thermospannung.

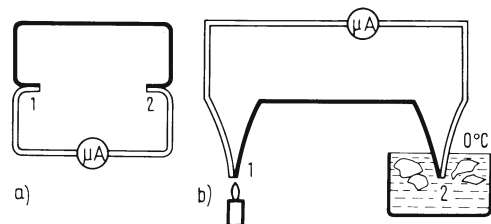


Bild 3.39 Thermoelement
a) Berührungsstellen 1 und 2 auf derselben Temperatur, kein Strom
b) bei ungleichen Temperaturen fließt Strom auf Grund der Thermospannung

Haben die Berührungsstellen (meist Löt- oder Schweißstellen) zweier verschiedener Materialien verschiedene Temperaturen mit der Differenz ΔT , so entsteht zwischen ihnen eine elektrische Spannung, die Thermospannung $U = \alpha_{1,2} \Delta T$.

Dieser Effekt heißt Thermoelektrischer oder nach seinem Entdecker Seebeckeffekt¹⁾. Die Thermospannung eines Thermoelementes wächst in gewissen Temperaturintervallen linear mit der Temperaturdifferenz ΔT der Berührungsstellen.

¹⁾ Thomas J. Seebeck (1770 bis 1830).

Den Quotienten $\alpha_{1,2} = U/\Delta T$ aus Thermospannung und Temperaturdifferenz nennt man Thermokraft oder Seebeckkoeffizient der Leiterkombination 1,2.

Zur Messung der Thermospannung bei einer bestimmten Leiterkombination hält man die Temperatur der einen Berührungsstelle, etwa durch Eintauchen in eine Eis-Wasser-Mischung (Bild 3.39 b), konstant.

Anwendungen. Zur Messung von Temperaturen zwischen -200 °C und mehr als $+2000\text{ °C}$ werden Thermoelemente mit den verschiedensten Metallkombinationen verwendet. Technisch bedeutsame Beispiele zeigt Tafel 3.40.

Tafel 3.40 Daten einiger Thermoelemente

Thermoelement	Thermokraft in $\mu\text{V/K}$ (zugehöriger Temperaturbereich in $^{\circ}\text{C}$)	ungefähre obere Grenze der Anwendungstemperatur in $^{\circ}\text{C}$
Kupfer/Konstantan	42,5 (0...100)	+400
Eisen/Konstantan	53,7 (0...20)	+700
Nickel/Chromnickel	41,3 (0...1000)	+1000
Platin/Platin-Rhodium	9,6 (0...1000)	+1300
Iridium/Iridium-Rhenium	17 (0...2000)	+2000

Für Temperaturen über 2000 °C gibt es Thermoelemente aus Iridium, Wolfram und Rhenium. Besonders hohe Thermokräfte liefern Halbleiterthermoelemente: Bleitellurid-Zinkantimonid-Elemente mit Thermokräften von $180\text{ }\mu\text{V/K}$ sind für Messungen bis 600 °C geeignet. Diese Elemente werden auch als Spannungsquellen für Satelliten verwendet (Wirkungsgrad ca. 7%).

3.2.5.2 Peltier-Effekt

Dieser nach J. Peltier (1785 bis 1845) benannte Effekt stellt die Umkehrung des thermoelektrischen Effektes dar. Fließt nämlich durch die Berührungsstelle zweier Leiter ein Strom, so tritt je nach Richtung des Stromes eine Erwärmung oder Abkühlung der Berührungsstelle ein. Die komplizierte theoretische Begründung überschreitet den Rahmen dieser Darstellung. Fließt der Strom in derselben Richtung durch das Peltier-Element wie bei dessen Benutzung als Thermoelement, so bewirkt er eine Abkühlung der Berührungsstelle. Dem überlagert sich allerdings die Joulesche Wärme.

Die von einer Verbindungsstelle zur anderen transportierte Wärmeenergie Q ist der hindurchgehenden Ladung $I t$ proportional.

$$Q = \Pi I t$$

Dabei ist Π der Peltierkoeffizient, eine Materialkonstante von ca. $4 \cdot 10^{-4}\text{ J/As}$ bis $4 \cdot 10^{-3}\text{ J/As}$.

Anwendungen. Kombinationen aus Peltierelementen, sog. Peltier-Batterien, aus Wismuttellurid, werden vor allem zum Abkühlen kleiner Objekte um bis zu 50 Kelvin verwendet. Die Kälteleistung kann stufenlos verstellt werden. Hierbei wirken sie als Wärmepumpen (s. Abschn. 2.7.3). Die wartungsfreien Peltierbatterien haben eine hohe Lebensdauer und benötigen kein Kühlmittel, allerdings ist ihre Leistungszahl (s. Abschn. 2.7.3) beim Betrieb als Wärmepumpe nur etwa 2.

Der Wirkungsgrad für die Energieumwandlung eines Thermoelementes ist umso größer, je kleiner die Stromverluste ($\sim \rho = 1/\kappa$) und je geringer die Wärmeleitungsverluste ($\sim \lambda$) sind. Die erste Bedingung

erfordert eine hohe elektrische Leitfähigkeit κ , die zweite eine geringe Wärmeleitfähigkeit λ . Deswegen definiert man als Maß für die Leistungsfähigkeit eines Thermoelements als thermoelektrischer Wandler die sog. thermoelektrische Effektivität $z = \alpha_{1,2}^2 \kappa / \lambda$. Leider sind Metalle wegen des Wiedemann-Franz'schen Gesetzes ($\lambda \sim \kappa$) nicht besonders geeignet. Deswegen verwendet man z.B. P- und N-dotiertes¹⁾ Wismuttellurid, ein gesintertes Material im Übergangsbereich Metalle–Halbleiter (Elektronenkonzentration um 10^{18} cm^{-3}), das bei max. $120 \text{ }^\circ\text{C}$ die optimale thermoelektrische Effektivität $z = 3,3 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ aufweist.

3.2.6 Elektrische Leitung im Vakuum und in Gasen

Wir haben zunächst die elektrische Leitung in Festkörpern und Flüssigkeiten betrachtet. Der Transport von Ladungen ist jedoch auch in Gasen und selbst im Vakuum möglich.

3.2.6.1 Elektrische Leitung im Vakuum

Glühemission. Ideales Vakuum ist ein vollständiger Isolator. Auch in einem Vakuum von etwa $10^{-4} \dots 10^{-6} \text{ hPa}$ mit den darin enthaltenen Luftmolekülen fließt bei Anlegen einer Spannung an zwei Elektroden (Kathode und Anode) noch kein Strom. Erst wenn es gelingt, Ladungsträger in den Raum zu bringen, kann ein Ladungstransport eingeleitet werden, also Strom fließen.

□ **Versuch 23.** In einem evakuierten Glaskolben (Bild 3.41) befinden sich ein Wolframglühfaden 1 als Kathode und ein Blech 2 als Anode. Durch eingeschmolzene Zuleitungen sind die Elektroden mit der Heizbatterie 3 und der veränderlichen Spannungsquelle 4 verbunden. Der veränderliche Widerstand 5 dient zur Verstellung des Heizstromes und damit der Temperatur des Heizfadens. Wir erhalten – zunächst mit geringem Heizstrom – folgende Versuchsergebnisse:

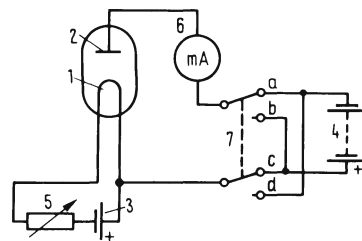


Bild 3.41 Glühemission (Versuch 23)

- Bei hoher negativer Anodenspannung (Schalter 7 in Stellung a) zeigt der Strommesser 6 keinen Ausschlag.
- Bei geringer negativer Anodenspannung beobachtet man im Strommesser 6 einen kleinen Ausschlag.
- Wenn man die Anodenspannung gleich null macht, vergrößert sich der Ausschlag.
- Mit steigender positiver Anodenspannung (Schalter 7 in Stellung b) erhöht sich der Anodenstrom.
- Nach Erreichen einer bestimmten positiven Anodenspannung steigt der Strom bei weiterer Anodenspannungserhöhung nicht weiter an.
- Wenn man bei hoher konstanter positiver Anodenspannung die Temperatur des Heizfadens erhöht, so steigt der Strom nahezu exponentiell mit der Temperatur an. □

Um einer nennenswerten Zahl von Elektronen das Austreten aus einer Elektrode zu ermöglichen, muss man ihre Energie über die der Austrittsarbeit entsprechende

¹⁾ Zu P- und N-Dotierung s. Abschn. 7.4.3.2.

Schwellenenergie (s. Abschn. 2.4.5.4 Boltzmannfaktor) erhöhen. Das geschieht in Versuch 23 durch das Aufheizen des Glühfadens.

Den Austritt von Elektronen auf Grund ihrer thermischen Energie aus einer geheizten Kathode nennt man Glühemission.

Wir wollen nun die Ergebnisse des Versuches 23 deuten:

- a) Wenn die geheizte Kathode gegenüber der Anode stark positiv geladen ist, fließt kein Strom. Denn aus der Anode treten bei Zimmertemperatur nur vereinzelte Elektronen aus, und die aus der geheizten Kathode austretenden Elektronen können nicht gegen das starke Feld bis zur Anode gelangen. Sie umgeben als Elektronenwolke die Kathode und bilden so eine Raumladung, die weitere aus der Kathode austretende Elektronen zurücktreibt.
- b) Die Elektronen treten nicht mit der Geschwindigkeit null aus dem Glühdraht aus. Wir können annehmen, dass die Elektronen in einer ähnlichen thermischen Energieverteilung vorliegen wie die Atome eines idealen Gases (s. Abschn. 2.3.1.3). Alle Elektronen, die eine genügend große thermische Energie haben, um das Potential des elektrischen Feldes zwischen Anode und Kathode zu überwinden, gelangen („gegen das Feld anlaufend“) zur Anode. Man nennt deshalb diesen bei geringer negativer Anodenspannung fließenden Strom den Anlaufstrom.
- c) Bei Anodenspannung null können die aus der Raumladung in Richtung Anode fliegenden Elektronen diese erreichen.
- d) Ist die Anodenspannung positiv, so werden die Elektronen zur Anode hin beschleunigt. Es erreichen um so mehr Elektronen die Anode, je höher die Anodenspannung ist.
- e) Wenn die Anodenspannung hoch genug ist, um die Raumladung um die Kathode abzusaugen, d.h. alle aus der Kathode ausgetretenen Elektronen zur Anode gelangen zu lassen, erhöht sich bei weiterer Anodenspannungssteigerung nur die kinetische Energie, nicht aber die Zahl der Elektronen. Der Anodenstrom hat seinen Sättigungswert erreicht.
- f) Je höher die Temperatur der Kathode ist, umso mehr Elektronen können austreten. Die Emissionsstromdichte S einer Glühkathode mit der Austrittsarbeit W_A hängt von der Temperatur ab. Es gilt die Richardson-Gleichung (O. Richardson, 1879 bis 1959):

$$S = A_R T^2 e^{-\frac{W_A}{kT}} \quad \text{Richardson-Gleichung} \quad (3.61)$$

Dabei ist A_R eine empirisch feststellbare Materialkonstante. Ihr Wert liegt für Wolfram bei $(0,6 \dots 1) \cdot 10^6 \text{ A}/(\text{m}^2 \text{ K}^2)$, für Oxidkathoden bei $10^2 \text{ A}/(\text{m}^2 \text{ K}^2)$. kT ist etwa die thermische Energie der Elektronen. Die Austrittsarbeit W_A beträgt bei den meisten Metallen zwischen 2 eV und 5 eV (zur elektrischen Energieeinheit 1 eV s. S. 286), bei Wolfram 4,53 eV, bei

Tafel 3.42 Typische Eigenschaften einiger Glühkathoden

Material	Arbeits- temperatur in K	Austritts- arbeit in eV	Richardson- konstante A_R in $\text{A}/(\text{cm}^2 \text{ K}^2)$	Strom- dichte in A/cm^2	Lebens- dauer in h
Thoriertes Wolfram	2600	4,53	60	0,8	4000
Thoriertes Wolfram	3000	4,53	60	16	20
Barium-Strontium-Oxid	1100	1,0	0,01	0,3	5000

Bariumoxid 1 eV, bei Strontiumoxid 1,3 eV. $e^{-W_A/(kT)}$ ist der in Abschn. 2.4.5.4 näher erläuterte Boltzmannfaktor.

Feldemission. Die für das Ablösen der Elektronen aus der Kathode erforderliche Energie kann auch dem elektrischen Feld entnommen werden. Um die erforderlichen hohen Feldstärken von ca. 10^9 V/m zu erreichen, wird die Kathode zu einer feinen Spitze ausgezogen. Bei einem Radius dieser Spitze von 10^{-7} m wird schon mit einer Spannung von 10^2 V zwischen Kathode und Anode eine für Feldemission ausreichende Feldstärke an der Kathodenoberfläche erreicht.

Fotoemission. Trifft sichtbares oder ultraviolettes Licht oder Röntgenstrahlung auf eine Oberfläche mit genügend niedriger Austrittsarbeit, so werden ebenfalls Elektronen ausgelöst. Dieser sog. (äußere) fotoelektrische Effekt wird in Abschn. 5.3 beschrieben.

Sekundärelektronenemission. Auf eine Oberfläche auftreffende Elektronen oder Ionen (Primärteilchen) sind auf Grund ihrer Bewegungsenergie in der Lage, andere Elektronen aus der Oberfläche zu befreien. Mit wachsender Energie der Primärteilchen nimmt die Zahl der ausgelösten Sekundärelektronen zunächst zu, erreicht einen Maximalwert und nimmt dann wieder ab. Denn das Auslösen der Sekundärelektronen geschieht aus immer tieferen Schichten, und die Energie der dort ausgelösten Sekundärelektronen reicht dann nicht mehr aus, um bis zur Oberfläche zu gelangen, da sie auf dem Weg dorthin durch Stöße mit anderen Elektronen Energie verlieren.

Definition: Das Verhältnis aus der Zahl der sekundäremittierten Elektronen und der Zahl der Primärelektronen nennt man Sekundäremissionsfaktor oder -ausbeute.

Dieser hängt nicht nur von der Energie der Primärelektronen, sondern in hohem Maße auch von der Austrittsarbeit und Oberflächenbeschaffenheit des betreffenden Materials ab. Maximalwerte für reine Metalle liegen um 1, für Isolatoren und Halbleiter um 2...10, für zusammengesetzte Schichten wie Caesiumantimonid um 3...15. Von Elektronen getroffene Oberflächen emittieren auch nach Beendigung des Elektronenbeschusses noch eine geringe und abnehmende Zahl von Elektronen. Diese verzögerte Emission von Elektronen heißt Exoelektronenemission oder Nachemission. Sie ermöglicht den Bau luft- oder gewebeäquivalenter Dosimeter (Abschn. 6.2.5.1).

Anwendungen. Die Glühkathode ist der heikelste Teil aller Arten von Elektronenquellen. Bei Kathoden in Elektronenmikroskopen treten die Elektronen direkt aus der Spitze eines (thorierten) Wolframfadens aus (direkt geheizte Kathode). Bei Fernsehbiröhren (s. Abschn. 3.3.3.2) sitzt die Emissionsschicht auf einem den Glühfaden umgebenden, isolierten Nickelröhrchen (indirekt geheizte Kathode). Die Schicht besteht meist aus mehreren Erdalkalioxiden wie Kalzium-, Strontium und Bariumoxid. Ihre Qualität hängt wesentlich von komplizierten Aktivierungs- und Formierprozessen ab. Derartige indirekt geheizte Oxidkathoden weisen eine sehr geringe Austrittsarbeit auf. Daher liegen die erzielbaren Ströme weit über denjenigen direkt geheizter Kathoden. Ihr Heizleistungsbedarf ist jedoch nicht unerheblich.

Die Feldemission wird selten, und dann meist mit der Photoemission kombiniert angewandt. Die Fotokathode ist ein wichtiger lichtelektrischer Wandler. In Fotozellen, -multipliern, Fernsehaufnahmerröhren u.a. findet sie Anwendung. Die Emission von Elektronen durch Ionenbeschuss, meist in Kombination mit Photoemission, wird bei den sog. Kaltkathodenröhren ausgenützt. In Sekundärelektronen-Vervielfachern oder Multipliern dient eine Folge geeignet angeordneter sekundäremittierender Elektroden (sog. Dynoden) zur vielfachen Multiplikation und damit Verstärkung sehr kleiner Ströme.

Vor allem als Fotosekundärelektronen-Vervielfacher oder Photomultiplier (Bild 3.43) zur Verstärkung des von einer Fotokathode ausgehenden Stromes sind sie wegen der hohen erzielbaren rauscharmen Stromverstärkung von $10^5 \dots 10^8$ von Bedeutung. Innerhalb von Vakuumapparaturen (wie z.B. Beschleunigeranlagen) benutzt man auch sog. Elektronenvervielfacherkanäle. Diese bestehen aus dünnen offenen Bleiglasröhrchen, deren Innenwand gleichmäßig mit einer hochohmigen Schicht eines sekundäremittierenden Materials beschichtet ist, die gleichzeitig als kontinuierlicher Spannungsteiler wirkt. Sie eignen sich zum Nachweis von Elektronen und Ionen, aber auch für Röntgen- und UV-Strahlen, die im trichterförmigen Eingang Fotoelektronen auslösen.

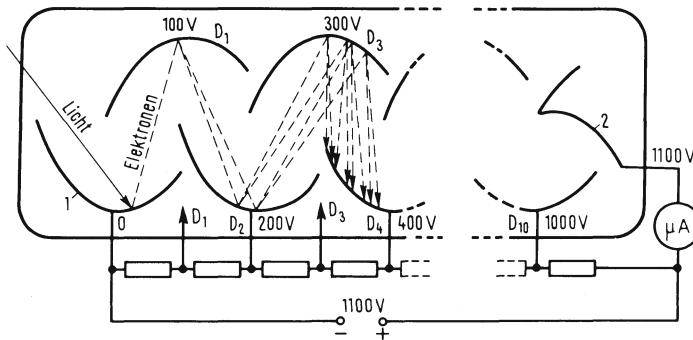


Bild 3.43 Fotosekundärelektronen-Vervielfacher (Photomultiplier)
1 Photokathode
2 Anode
 $D_1 \dots D_{10}$ Dynoden

Freie Ladungsträger im elektrischen Feld. Auf die Ladung Q wirkt ein elektrisches Feld mit der Kraft $F = QE$. In einem Leiter erreicht ein Ladungsträger, bedingt durch die Reibung, nur eine bestimmte konstante Geschwindigkeit. Diese ist der Feldstärke proportional. Im Vakuum werden Elektronen und Ionen dagegen nicht durch Reibung gebremst. Wie ein Körper beim reibungslosen freien Fall in Vakuum werden sie vielmehr dauernd beschleunigt und gewinnen dabei die kinetische Energie $W_{\text{kin}} = mv^2/2$. Diese ist gleich der vom Feld an den Ladungsträgern verrichteten Arbeit. Mit Gl. (3.54) ist diese pro Elektron $W = e_0 U$. Daher ist die

Kinetische Energie eines Elektrons nach Durchlaufen der Spannung U unabhängig vom Weg, nur abhängig von der Spannung U :

$$W_{\text{kin}} = \frac{m_e}{2} v_2^2 = e_0 U \quad (3.62)$$

Beispiel 15. Ein Elektron, dessen Geschwindigkeit beim Austritt aus der Kathode gleich null angenommen wird, prallt auf die Anode mit der Geschwindigkeit $v = \sqrt{2e_0 U/m_e}$. Die Spannung Kathode–Anode ist $U = 100 \text{ V}$, die Masse des Elektrons $m_e = 9,10 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$. Dann ist die Aufprallgeschwindigkeit $v = \sqrt{0,35 \cdot 10^{14}} \text{ m/s} = 5,9 \cdot 10^6 \text{ m/s}$. Beim Aufprall wird die kinetische Energie des Elektrons in Wärme umgesetzt (s. aber auch Abschn. 6.1.2.2, Röntgenspektren).

Man beachte, dass beim Erreichen höherer Geschwindigkeiten ($v > 0,1 c_0 = 3 \cdot 10^7 \text{ m/s}$) nach Durchlaufen entsprechender Spannungen ($U > 10^4 \text{ V}$) die relativistische Zunahme der Masse des Elektrons (s. Abschn. 8) berücksichtigt werden muss.

Elektrische Energieeinheit. Die Energie des Elektrons nach Durchlaufen der Spannung $U = 1 \text{ V}$ beträgt $1,602 \cdot 10^{-19} \text{ Js}$. Die so gewonnene elektrische Energieeinheit

$$1 \text{ Elektronvolt} = 1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ Js}$$

wird als Einheit für Energie und Arbeit bei geladenen Teilchen häufig verwendet. So wird z.B. die Austrittsarbeit meist in Elektronvolt angegeben.

Versieht man die Anode 2 in Bild 3.41 mit einem Loch, so gelangen die Elektronen durch das Loch hindurch in den feldfreien Raum hinter der Anode. Dort fliegen sie im Vakuum mit konstanter Geschwindigkeit v_0 weiter.

Tritt dieser Elektronenstrahl in ein senkrecht zur Strahlrichtung verlaufendes, homogenes, elektrisches Feld E mit der Länge l (vgl. unten Kathodenstrahlröhre und Anwendungen), so wird er in Feldrichtung beschleunigt (Bild 3.44).

Seine Geschwindigkeits- und Wegkomponenten sind dann

$$v_x = v_0 = \sqrt{\frac{2e_0 U_0}{m_e}} \quad s_x = v_0 t \quad v_y = at \quad s_y = \frac{a}{2} t^2$$

mit

$$a = \frac{F}{m_e} = \frac{e_0 E}{m_e} = \frac{e_0 U}{m_e d}$$

Die Flugbahn im Feld hat die Form einer Parabel (vgl. horizontaler Wurf). Die Richtung von \vec{v} ergibt sich aus

$$\tan \varphi = \frac{v_y}{v_x}$$

Nach Durchlaufen der Strecke l im elektrischen Feld ist mit $t = l/v_0$

$$v_y = \frac{e_0 U l}{m_e d v_0}; \quad s_y = \frac{e_0 U l^2}{2 m_e d v_0^2} = \frac{U l^2}{4 d U_0}, \quad \text{da} \quad \frac{e_0}{m_e v_0^2} = \frac{1}{2 U_0}$$

$$\tan \varphi = \frac{e_0 U l}{m_e d v_0^2} = \frac{U l}{2 d U_0}$$

Trifft der Strahl in der Entfernung r hinter den Platten auf einen Schirm, so ist er dort um die Strecke b aus der Null-Lage ausgelenkt

$$b = s_y = r \tan \varphi = \left(\frac{l}{2} + r \right) \frac{U l}{2 d U_0} = \left(\frac{l}{2} + r \right) \tan \varphi$$

Die Ablenkung b ist der Ablenkspannung U direkt proportional. Darauf beruht die unten beschriebene wichtige Anwendung als Elektronenstrahlröhre.

Elektronenröhren. Das in Bild 3.41 dargestellte evakuierte Rohr mit zwei Elektroden stellt die einfachste Form einer Elektronenröhre, die Diode, dar. Nur in einer Richtung stromdurchlässig, ist ihr Hauptanwendungsgebiet die Gleichrichtung von Wechselströmen. Vakuumdioden sind heute weitgehend durch Halbleiterdioden (s. Abschn. 3.2.2.3 und 7.3.3.3) verdrängt.

In allen anderen Elektronenröhren wird der Strom zwischen Kathode und Anode durch eine oder mehrere zusätzliche Elektroden gesteuert. Diese Steuerung des Anodenstromes kann auch z.B. durch Verändern der Anodenspannung oder des Heizstromes geschehen.

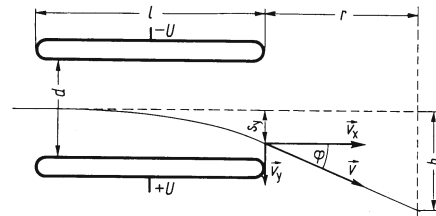


Bild 3.44 Ablenkung eines Elektronenstrahls im elektrischen Querfeld

Die einfachste Form der Steuerung durch eine dritte Elektrode, ein sog. Steuergitter, führt zur Dreielektrodenröhre oder Triode. Das Steuergitter hat einen sehr kleinen Abstand von der die Kathode umgehenden Raumladung. Somit kann man schon mit kleinen Gitterspannungen ein starkes elektrisches Feld erzeugen, welches das von der Anodenspannung herrührende Feld je nach Polarität der Gitterspannung deutlich schwächt oder verstärkt. Auf diese Weise kann der Anodenstrom gesteuert werden. Durch den Einbau weiterer Gitter ist die Röhrencharakteristik beeinflussbar. Ein positives Schirmgitter (bei der Tetrode) vermindert die Rückwirkung der Anodenspannung auf den Anodenstrom. Ein weiteres, auf Kathodenpotential liegendes Bremsgitter (bei der Pentode) dient zum Abfangen der an der Anode ausgelösten Sekundärelektronen. Zusätzlich können weitere Steuergitter eingebaut sein. Elektronenröhren als Schalter und Verstärker, wie auch zur Modulation, Mischung und Schwingungserzeugung sind heute meist durch Halbleiterbauelemente ersetzt. Die Funktion der verschiedenen Elektroden ist jedoch ganz ähnlich in sog. Elektronenkanonen, die zur Erzeugung steuerbarer Elektronenstrahlen z.B. in Fernsehbildröhren verwendet werden.

Elektronenstrahlröhre (Bild 3.45). Ein von der Kathode ausgehender Elektronenstrahl („Kathodenstrahl“) wird durch eine Anodenspannung von mehreren Kilovolt beschleunigt. Er tritt durch die Anode 1 hindurch, dann durchläuft er zwei rechtwinklig zueinander stehende Plattenpaare 2 und trifft auf den ebenen Boden (Bildschirm) des Glaskolbens 3. Dieser ist innen mit einem Leuchtstoff belegt, der dort, wo er von Elektronen getroffen wird, aufleuchtet (s. Abschn. 7.5). Mit Hilfe der durch die Plattenpaare erzeugten elektrischen Querfelder kann der Strahl abgelenkt werden. Die Intensität des Elektronenstrahls und damit die Helligkeit des Leuchtflecks wird mit dem Gitter 4 – hier Wehneltzylinder genannt – verändert. Ähnlich arbeitet die Fernsehbildröhre, jedoch ist die mit Leuchtstoff belegte Fläche meist wesentlich größer; die Ablenkung geschieht meist nicht durch elektrische Felder, sondern durch Magnetfelder (s. Abschn. 3.3.2).

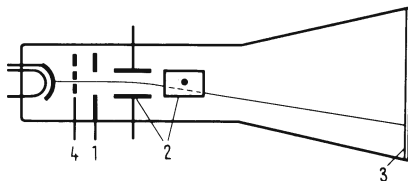


Bild 3.45 Elektronenstrahlröhre

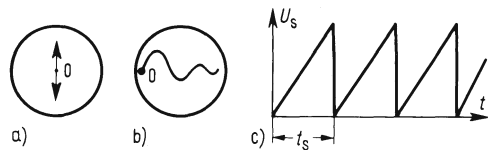


Bild 3.46 Zur Messung mit dem Oszilloskop

Anwendungen. Die von K. F. Braun (1850 bis 1918) erstmals durchgeführte Darstellung und Messung veränderlicher Spannungen mit der Elektronenstrahlröhre hat dieser den Namen Braunsche Röhre eingetragen. Im Oszilloskop findet die Braunsche Röhre für derartige Messungen ihre hauptsächlichste Anwendung. Hierzu wird die zu messende veränderliche Spannung – ggf. nach entsprechender Verstärkung – an die das vertikale Feld erzeugenden (Mess-)Platten gelegt. Je nach dem zeitlichen Verlauf der Spannung wird dann der Leuchtpunkt in der Senkrechten aus seiner Ruhestellung 0 abgelenkt (Bild 3.46a). Lässt man ihn gleichzeitig (jetzt vom linken Rand des Schirmes aus) mit konstanter Geschwindigkeit in horizontaler Richtung waagrecht über den Bildschirm laufen, so beschreibt er die Zeitfunktion der Mess-Spannung (Bild 3.46b). Um die horizontale Ablenkung des Elektronenstrahls zu erreichen, legt man an die das horizontale Feld erzeugenden (Zeit-)Platten eine sog. Sägezahnspannung (Bild 3.46c). Durch die linear ansteigende Spannung U_s wird der Strahl während der Zeit t_s so abgelenkt, dass der Leuchtpunkt mit konstanter Geschwindigkeit in horizontaler Richtung über den Bildschirm läuft, um dann durch das plötzliche Sinken der Spannung U_s schnell wieder zum Ausgangspunkt 0 zurückzuspringen. Durch geeignete Wahl der Sägezahnfrequenz $1/t_s$ werden periodische Mess-Spannungen phasengleich wiederholt aufgezeichnet. Die sich deckenden Aufzeichnungen ergeben ein stehendes Bild. Im Prinzip ähnlich, jedoch mit magnetischer Ablenkung der Elektronenbahnen, funktionieren Fernsehbildröhren (s.o.).

Elektronenstrahlen werden in Wissenschaft und Technik vielfach angewendet. Deshalb sollen hier noch einige wichtige Anwendungsbereiche erwähnt werden. Da die Wechselwirkung zwischen Elektronen und der Materie, auf die sie auftreffen, besonders groß ist, werden Elektronen häufig als Sonden zur Untersuchung von Stoffen benützt, z.B. in der Elektronenmikroskopie, Röntgenspektroskopie und bei

der Elektronenbeugung. In Elektronenmikroskopen wird die Möglichkeit ausgenutzt, durch Elektronenstrahlen mit Hilfe elektrischer und magnetischer Linsen Abbildungen zu erzeugen. In Röntgenröhren treffen Elektronen hoher Geschwindigkeit auf die Anode und lösen dort Röntgenstrahlen aus (s. Abschn. 6.1.2.2). Elektronenstrahlen hoher Energie werden auch als Werkzeug zur Bearbeitung von Materialien eingesetzt. Bohren, Trennen und Schweißen auch schwer schmelzbarer Stoffe ist ebenso möglich wie Oberflächenhärten und -umschmelzen.

Aufgaben zu Abschn. 3.2.6.1

1. Wie hoch ist der Sättigungsstrom eines thorierten Wolframfadens mit der Temperatur $T = 2000 \text{ K}$? Die Oberfläche des Glühfadens beträgt $A = 10^{-3} \text{ cm}^2$, die Austrittsarbeit für thoriertes Wolfram $W_A = 2,62 \text{ eV}$, die Konstante $A_R = 3 \cdot 10^4 \text{ A}/(\text{m}^2 \text{ K}^2)$.

2. Die vertikalen Ablenkplatten einer Braunschen Röhre haben 1 cm Abstand und sind 5 cm lang. Die Anodenspannung beträgt 1 kV. Der Abstand von den Platten zum Schirm mit 7 cm Durchmesser ist 15 cm.

Wie groß ist a) die Eintrittsgeschwindigkeit der

Elektronen, b) die Plattenspannung für eine Ablenkung des Strahls über den ganzen Schirm und c) die Ablenkspannung pro Auslenkstrecke?

3. Eine Kathodenstrahlröhre mit der Anodenspannung $U_A = 500 \text{ V}$ hat zwei Plattenpaare von je $l = 3 \text{ cm}$ Länge und $d = 1 \text{ cm}$ Abstand. Der Abstand der Zeitplatten vom Bildschirm ist 10 cm, derjenige der Messplatten 14 cm.

Wie groß ist für die horizontale und vertikale Strahlablenkung die Ablenkempfindlichkeit, d.h. die Auslenkung des Leuchtflecks bei der Ablenkspannung $U = 1 \text{ V}$?

3.2.6.2 Elektrische Leitung in Gasen

Versuch 24. Ein aus zwei Platten in Luft bestehender Kondensator wird aufgeladen. Wiederholte Kontrollen der Ladung mit einem Elektrometer zeigen, dass diese über viele Stunden unverändert bleibt. Setzt man den Kondensator der Strahlung einer Ultraviolett-Lampe aus, so entlädt er sich.

Alle Gase sind normalerweise Nichtleiter. Um sie leitend zu machen, müssen in ihnen oder an den sie begrenzenden Flächen Ladungsträger gebildet werden. Das können Elektronen und Ionen sein. Elektronen können auf die gleiche Weise wie im Hochvakuum in den Gasraum gebracht werden (s. Abschn. 3.2.6.1). Ionen müssen entweder von außen in das Gas gebracht oder durch Ionisierung der Moleküle des Gases gewonnen werden. Man muss den neutralen Molekülen also entweder ein Elektron oder mehrere Elektronen nehmen oder anlagern. Die Ionisierung kann durch Strahlung (s. Versuch 24) oder durch Elektronenstoß geschehen. In beiden Fällen muss die sog. Ionisierungsarbeit verrichtet werden. Sind dabei Elektronen freigeworden, so gewinnen sie im elektrischen Feld zwischen den Elektroden Bewegungsenergie. Sie stoßen im Gasraum mit Atomen oder Molekülen zusammen. Liegt die kinetische Energie der Elektronen unter einer bestimmten Grenze, so können sie die erforderliche Ionisierungsarbeit noch nicht verrichten, der Stoß erfolgt elastisch. Wegen der viel größeren Molekülmassen verlieren die Elektronen dabei praktisch keine Energie (s. Abschn. 1.3.4.5). Erreicht oder überschreitet die Bewegungsenergie eines Elektrons jedoch einen bestimmten Betrag, so erfolgen die Stöße unelastisch, und es wird Energie auf das Molekül oder Atom übertragen. (Die Umstände dieser Energieübertragung durch Stoß werden in Abschn. 6.1.1.2 erläutert). Der vom Elektron auf das Molekül übertragene Energiebetrag kann ausreichen, dieses zu ionisieren, d.h. ein Elektron abzuspalten. Das stoßende Elektron bleibt dabei frei. Nach dem Stoß sind zwei Elektronen und ein Ion vorhanden.

Die Ionisation eines Atoms oder Moleküls durch ein stoßendes Teilchen, z.B. ein Elektron, nennt man Stoßionisation.

Die Zahl der Ionisationsvorgänge hängt von der Energie des Primärteilchens, dem Gasdruck und der Gasart ab. Für stoßende Elektronen ergibt sich (ohne Herleitung) die sog. differentielle Ionisation $s = \frac{I_1}{I_e p l}$, mit dem Ionenstrom I_1 , dem Gasdruck p , dem Elektronenstrom I_e und der Bahnlänge l . Sie ist bei Elektronenenergien um 100 eV maximal. Für die Erzeugung von Heliumionen durch Elektronenstoß beträgt $s_{\max} = 0,7$ m/N.

Während die in einem Elektrolyten erzeugten Ionen beständig sind, suchen sich die Ionen eines Gases durch Einfangen freier Elektronen oder Anlagern an ungleichartig geladene Ionen zu neutralisieren. Diesen Vorgang nennt man Rekombination.

Unselbständige Entladung

Fließt im Gas ein Strom mit Hilfe von Ladungsträgern, die durch äußere Einwirkung entstanden sind, so spricht man von unselbständiger Entladung.

Das kann auf folgende Weise geschehen: Ionisierung der vorhandenen Moleküle durch Bestrahlung mit UV-Licht, Röntgen- oder Kernstrahlen; Einbringen von Fremdionen, wie sie z.B. in Flammgasen enthalten sind; Elektronenaustritt aus Kathoden.

□ **Versuch 25.** Ein Glasgefäß mit Glühkathode und Anode ist mit einer Vakuumpumpe verbunden (Bild 3.47a). Es sei zunächst völlig evakuiert. Bei Anlegen der Heiz- und Anodenspannung fließt von der Kathode zur Anode ein Elektronenstrom. Die Abhängigkeit des Stromes von der Anodenspannung zeigt Kurve 1 im Bild 3.47b. Es ist die für evakuierte Elektronenröhren typische Charakteristik mit Sättigungsstrom I_S , wenn alle von der Kathode erzeugten Elektronen zur Anode gelangen. Hat man jedoch ein Gas, z.B. Argon, bis zu einem Druck von wenigen Hektopascal in das Gefäß eingelassen, so erhält man als Strom-Spannungscharakteristik die Kurve 2. Der Strom steigt annähernd linear bis etwa zu demselben Sättigungswert wie für das Vakuum an (ausgezogener Teil der Kurve 2). □

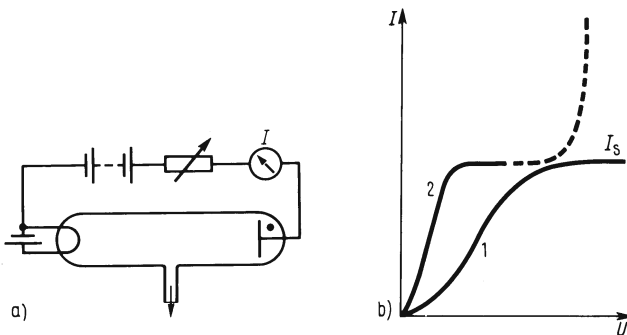


Bild 3.47 Gasentladung
a) Schaltplan
b) Entladung in Vakuum (1)
und in Gasen (2)

Es sind also auch jetzt nicht mehr Ladungsträger vorhanden, als Elektronen vom Glühfaden emittiert werden. Kurve 2 ist jedoch anfangs steiler als Kurve 1. Das bedeutet, dass sich die beim Austritt der Elektronen um die Kathode aufbauende Raumladung jetzt weniger stark auswirkt, weil einzelne besonders energiereiche Elektronen durch Stoß positive Ionen bilden. Diese bewegen sich wegen ihrer viel größeren Masse langsamer und können die Ladungen von Elektronen kompensieren. Den Sättigungsstrom beeinflussen sie nicht spürbar, da sie in der Mehrzahl vor Erreichen der Kathode mit Elektronen rekombinieren.

Selbständige Entladung

Erhöht man in Versuch 25 die Spannung nach Erreichen des Sättigungsstromes weiter, so steigt der Strom wieder steil an (gestrichelter Teil der Kurve 2 in Bild 3.47b). Eine große Zahl von Elektronen erhält durch die höhere Spannung nämlich eine zur Stoßionisation ausreichende kinetische Energie. Wenn die bei den Stößen erzeugten Elektronen oder Ionen der Elektron-Ionen-Paare im Feld ebenfalls ausreichende Geschwindigkeiten erreichen, können sie ihrerseits weitere Atome oder Moleküle durch Stoß ionisieren. Der Strom wächst dadurch lawinenartig an. Selbst wenn man den Heizstrom der Kathode unterbricht, bleibt der Entladungsstrom selbständig bestehen.

Eine Entladung ist selbständig, wenn die Ladungsträger genügend kinetische Energie gewinnen, um durch Erzeugung neuer Ladungsträger dauernd Ersatz für die rekombinierten und die zu den Elektroden gelangten zu schaffen.

Die Charakteristik 2 einer Gasentladung $I = f(U)$ in Bild 3.47b hängt von der Art des Gases und dessen Dichte, von der Art und Anzahl der erzeugten Ladungsträger sowie der Form des Entladungsraumes ab. Häufig setzt der Stromanstieg durch Stoßionisation schon vor Erreichen des Sättigungsstromes ein. Das ist vor allem bei ergiebigen Kathoden der Fall.

Bei Erhöhung des Stromes in einer Gasentladung nimmt der innere Widerstand des Gases ab, es kommen immer mehr Ladungsträger hinzu.

Das Anwachsen des Stromes ist praktisch nur durch den Widerstand der Zuleitungen und den Innenwiderstand der Stromquelle begrenzt. Gasentladungen müssen deshalb mit einem den Strom begrenzenden Vorwiderstand betrieben werden. Ein völlig oder doch weitgehend ionisiertes Gas nennt man Plasma. Bei genügend hoher Temperatur, wie sie in Fixsternen auftreten, sind Gase auch ohne das Vorhandensein eines elektrischen Feldes völlig ionisiert, da die kinetische Energie der Wärmebewegung zum Ionisieren ausreicht. Eine sehr kleine Anzahl von Ionen ist in allen Gasen vorhanden. Deshalb ist deren Leitfähigkeit nicht gleich null. Sie ist aber sehr viel geringer als bei allen festen Körpern oder flüssigen Stoffen. Selbst die kleinste Anzahl von Ladungsträgern genügt jedoch, um bei Anlegen genügend hoher Spannungen durch Stoßionisation eine selbständige Entladung auftreten zu lassen.

In jedem Gas ist bei genügend hohen Spannungen das Einsetzen und die Aufrechterhaltung einer selbständigen Entladung möglich.

Merkmale der verschiedenen Entladungsformen

Die meisten Entladungsvorgänge gehen unter mehr oder minder auffälligen Leuchterscheinungen vor sich, deren Entstehung in Abschn. 6.1.1.1 und 6.1.1.2 beschrieben ist. Eine Ausnahme machen die unselbständigen Entladungen mit sehr kleinen Stromdichten, die sog. dunklen oder stillen Entladungen. Es ist nicht leicht, die verschiedenen Formen von Gasentladungen systematisch zu ordnen. Jede der Einflussgrößen wie Gasart, Kathodenart, Druck oder Leuchterscheinung kann zur Charakterisierung dienen.

Glimmentladung. Mit der Vorrichtung in Bild 3.47a unternemen wir einen weiteren Versuch.

□ **Versuch 26.** Erhöht man die Spannung im Entladungsrohr mit der geheizten Glühkathode über den Sättigungsbereich hinaus, so beginnt das Gebiet um die Kathode zu leuchten. Bei steigender Spannung tritt zusätzlich an der Anode ein Leuchten auf, das sich immer mehr über den Gasraum ausbreitet. □

Es brennt eine sog. Glimmentladung. Das vor der Anode befindliche leuchtende Gas nennt man positive Säule. Da es identisch ist mit dem Bereich des Gases, in dem Stoßionisation auftritt, spricht man auch von Plasma. Zur näheren Untersuchung der Leuchterscheinungen einer Glimmentladung ändern wir jetzt den Druck über mehrere Zehnerpotenzen bei konstant gehaltener Spannung:

□ **Versuch 27.** In einem Glasrohr (Bild 3.48a), das mit einer Pumpe evakuiert werden kann, befinden sich zwei ringförmige Elektroden. Diese sind mit einer Spannungsquelle von einigen Tausend Volt verbunden. Wir pumpen zunächst bis zu einem Druck von einigen hPa aus. Wiederum tritt eine Glimmentladung auf. Das leuchtende Plasma 1 beginnt nicht unmittelbar an der Anode. Zwischen Anode und Kathode befindet sich eine zweite Leuchterscheinung, das beiderseits von Dunkelräumen begrenzte violette Glimmlicht 2. Die Kathode selbst ist von der rosa leuchtenden Glimmhaut 3 bedeckt. Die Leuchterscheinungen hängen stark vom Gasdruck ab. Mit sinkendem Druck (ca. 0,1 hPa) dehnt sich das Glimmlicht immer mehr aus, während die positive Säule immer kleiner wird und schließlich verschwindet. Bei weiterer Druckminderung (ca. 0,01 hPa) verblasst das Glimmlicht (Bild 3.48 b). Gleichzeitig beginnt die Glaswand hinter der Anode zu leuchten 4. Hinter der Kathode beobachtet man einen leuchtenden Kegel 5. □

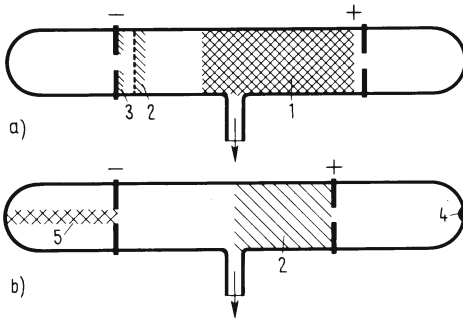


Bild 3.48 Glimmentladung in Luft

a) bei einem Druck von ca. 1 hPa

b) bei einem Druck von 10^{-2} hPa

1 positive Säule (Plasma)

2 Glimmlicht

3 Glimmhaut auf der Oberfläche der Kathode

4 Glasfluoreszenz durch Kathodenstrahlen

5 Lichtanregung durch Kanalstrahlbündel

Größe und Gestalt der positiven Säule 1 hängen vor allem vom Gasdruck ab. Die Leuchtfarbe ist charakteristisch für die Art des Gases. Außer sichtbarem Licht strahlt die positive Säule vor allem auch ultraviolettes Licht aus. Das Leuchten 4 der Glaswand (Fluoreszenz) hinter der Anode wird durch Elektronen hervorgerufen, die durch die Anode hindurch wegen des geringen Gasdrucks ungehindert bis zur Glaswand gelangen. Durch das Loch in der Kathode fliegen positive Ionen, die wegen ihrer größeren Masse die wenigen Gasmoleküle zu schwachem Leuchten 5 bringen.

Man nennt dieses Ionenbündel Kanalstrahlen.

Anwendungen. In Leuchtstofflampen brennen Quecksilber-Niederdruckentladungen (einige 10^{-3} hPa), bei denen die ultraviolette Strahlung durch Leuchtstoffe an der inneren Rohrwandung in sichtbares Licht umgewandelt wird (vgl. auch Abschn. 7.5.3). Als Zünd- und Stoßgas dient ein Ar-Kr-Gemisch

(einige hPa). Die Lichtausbeute moderner Leuchtstofflampen ($d = 26$ mm) liegt bei 95 lm/W¹⁾. Natriumdampf-Niederdruckentladungen dienen als gelbe Beleuchtungsquelle für Straßen. Die Temperatur der Entladungsstrecke beträgt 260 °C. Durch Wärmeisolation und eine Filterschicht, die das Na-Licht ungehindert durchlässt, die IR-Strahlung auf das Rohr zurückreflektiert, kommt man mit dieser Lichtquelle auf Ausbeuten von 200 lm/W. Edelgasgefüllte Leuchtröhren dienen vor allem Reklamezwecken. Quecksilberniederdrucklampen erzeugen kurzwellige ultraviolette Strahlung z.B. zur Entkeimung. Glimmlampen werden vor allem als Signallampen mit geringem Stromverbrauch verwendet.

Bogen- und Funkenentladung. Erhöht man den Strom in einem Entladungsrohr, in dem eine Glimmentladung brennt, so geht die Entladung in eine Bogenentladung über. In der Bogenentladung erzeugt die Kathode einen wesentlichen Teil der Ladungsträger: Bei der Bogenentladung kann die Kathode durch den Strom der Entladung selbst so stark erhitzt werden, dass sie sehr viele Elektronen emittiert. Der Bogen zieht sich am Ansatzpunkt der Kathode auf einen kleinen Fleck zusammen. Die Stromdichte kann hier bis zu 10^7 A/cm² betragen. Die Leuchtdichte in der positiven Säule ist dementsprechend groß. Die Bogenentladung kann bei den verschiedensten Drücken brennen. Auch die Mannigfaltigkeit von Bogenentladungen ist außerordentlich groß. Der elektrische Funke ist ebenfalls eine – oft verästelte – Bogenentladung kurzer Zeitdauer. Blitze sind kompliziertere Gasentladungen. Sie lassen sich mit den hier gewonnenen Erkenntnissen nicht beschreiben.

Anwendungen. Bogenentladungen in den verschiedensten Gasen werden vor allem für Beleuchtungszwecke ausgenutzt. Die Leuchterscheinungen der Entladungen sind bei den verschiedenen Gasen sehr unterschiedlich. Der in Luft von Atmosphärendruck brennende Kohlelichtbogen erzeugt intensives bläulich-weißes Licht bei Elektrodentemperaturen über 4000 K. Das Licht entsteht allerdings zum größten Teil nicht in der Gasentladung (in der Temperaturen bis 8000 K auftreten), sondern an der hocherhitzten positiven Elektrode. Der Kohlelichtbogen findet Verwendung u.a. als Lichtquelle zur Bildprojektion. Quecksilberhochdrucklampen erzeugen eine starke UV-Strahlung mit Wellenlängen vor allem um 365 nm. Sie dienen als medizinische und kosmetische Strahlungsquellen ebenso wie als Analysenlampen (Fluoreszenzanregung). Wegen ihrer hohen Lichtausbeute sind sie mit und ohne Verwendung von Leuchtstoffen verbreitete Lichtquellen. Durch Zusätze von Metallhalogeniden (von Na, Tl, In) erhält man ein wesentlich besseres Farbspektrum bei Hg-Lampen. Die Lichtausbeuten liegen bei 90 lm/W. Hochdruck-Natriumdampflampen erreichen bei mäßiger Farbwiedergabe 120 lm/W. Natriumdampflampen mit noch größerer Ausbeute findet man als Straßenbeleuchtung. Wegen ihres gelben Lichtes sind sie für allgemeine Beleuchtungszwecke unbrauchbar. Durch Zusätze von anderen Gasen (Xe; Hg) ist man mit Erfolg bestrebt, die Leuchtfarbe zu verbessern. Groß ist auch die Bedeutung von Xenon-Hoch- und Höchstdrucklampen für Beleuchtungszwecke.

Die in einem Plasma enthaltenen Ionen können durch eine (bei positiven Ionen negativ geladene) Saugelektrode extrahiert (sog. Gasentladungsenquellen) und anschließend abgelenkt und beschleunigt werden. Wie Elektronen (s. Abschn. 3.2.6.1) können Ionen u.a. auch als Sonden (Sekundärionen-massenspektroskopie) und zur Abbildung (Ionenmikroskop) benützt werden.

Ein weiteres wichtiges Anwendungsgebiet der Gasentladungen ist die Erzeugung der spezifischen Spektren (s. Abschn. 6.1.1 und Spektraltafel). Gasgefüllte Elektronenröhren, sog. Stromtore oder Thyratrons, werden zum Schalten und Steuern elektrischer Ströme benützt. Die Gasentladung wird mit der Gitterspannung gezündet. Man kann mit Stromtoren sehr große Ströme von einigen Hundert Ampere einschalten (sog. Ignitrons).

Außerdem seien noch Zählrohre und Spitzenzähler zum Zählen ionisierender Quanten und Teilchen erwähnt, die in einem Gas durch Stoßionisation Entladungsvorgänge auslösen (s. Abschn. 6.2.2.2).

Elektrische Funkenentladungen zwischen den Elektroden der Zündkerzen zünden die Kraftstoffgemische in den Verbrennungsmotoren.

¹⁾ Zu der Größe lm (Lumen) s. Abschn. 5.2.5.6.

Da die Durchschlagweite in Luft oder anderen Gasen bei bekanntem Druck und bestimmten Elektrodenformen der Spannung ungefähr proportional ist, verwendet man „Kugelfunkenstrecken“ zur Messung hoher Spannungen. Die Durchschlagsstrecke wird durch die UV-Strahlung einer Hg-Lampe in immer gleicher Weise vorionisiert. Den Druck in einem Vakuum kann man über den Strom einer Entladungsstrecke messen. Weitere Anwendungen s. Abschn. 3.3.8.5.

Aufgaben zu Abschn. 3.2.6.2

1. Nach Paschen¹⁾ ist die Spannung, bei der die Entladung zwischen zwei Elektroden zündet, proportional dem Abstand d und dem Gasdruck p , also $U \sim pd$. Bei welcher Spannung springt der Funke zwischen den im Abstand von 0,7 mm stehenden Elektroden einer Zündkerze über, wenn der Kolben im Zündzeitpunkt das Gemisch im Verhältnis 1 : 8 verdichtet? (Durchschlagsfestigkeit bei 1013 hPa $E_{\max} = 3.2 \text{ kV/mm}$.)

2. Eine der charakteristischen Größen einer Gasentladung ist die Spannungsänderung pro Länge der Entladungsstrecke, der sog. Gradient.

Wie groß sind der Gradient in V/cm und der Vorwiderstand?

a) bei einer Leuchtstofflampe (Leistung $P = 40 \text{ W}$; Brennstrom $I = 0,35 \text{ A}$; Länge $l = 1 \text{ m}$ ungefähr gleich dem Elektrodenabstand),

b) bei einem medizinisch angewendeten UV-Brenner (Leistung $P = 100 \text{ W}$; Brennerstrom $I = 1,25 \text{ A}$, Elektrodenabstand $l = 25 \text{ mm}$)?

Beide werden am 220 V-Netz betrieben. Die Werte der Gradienten sind typisch für Hg-Niederdruck- und Hochdruckentladungen.

3.3 Das magnetische Feld

3.3.1 Grundlegende Erscheinungen

Obwohl es sich um völlig getrennte Erscheinungen handelt, sind elektrische Felder und Gravitationsfelder formal gleich. Die Kraftwirkung der Felder wird durch die Feldstärken $E = F/Q$ und $G = F/m$ beschrieben. Das Magnetfeld dagegen ist keine getrennte Erscheinung, sondern eng mit dem elektrischen Feld verknüpft. Es entsteht, sobald sich elektrische Ladungen bewegen, oder ein elektrisches Feld sich ändert. Es ist also nicht, wie ein weiteres unabhängiges Feld, etwa als Folge magnetischer Ladungen zu beschreiben – an derartigen Versuchen hat es nicht gemangelt –, sondern nur im Zusammenhang mit den elektrischen Vorgängen, die es hervorrufen. Wir führen in diesem Abschnitt die magnetische Induktion $B = F/(Qv)$ zur Beschreibung der Kraftwirkung eines Magnetfeldes ein, das durch die Ladung Q hervorgerufen wird, die sich mit der Geschwindigkeit v bewegt. Da diese Größe die Kraftwirkung des Feldes angibt, sollte man sie eigentlich magnetische Feldstärke nennen, so wie dies in der amerikanischen Literatur auch geschieht. Um jedoch dem Leser den Konflikt mit der DIN-Norm zu ersparen, vermeiden wir den Namen magnetische Feldstärke. Die Kraft eines Magnetfeldes auf bewegte Ladungen heißt Lorentzkraft²⁾. Sie ist die Basis für die Anwendungen magnetischer Felder in der Elektrotechnik.

So, wie Änderungen eines elektrischen Feldes ein magnetisches Feld hervorrufen, wird umgekehrt ein elektrisches Feld eingeführt – induziert –, wenn eine Magnetfeldänderung einen Leiter durchsetzt. Unabhängig von der Existenz realer Ladungen wird dieser wechselseitige Zusammenhang zwischen elektrischem und magnetischem Feld durch die Maxwell'schen Gleichungen³⁾ beschrieben. Mit ihnen lassen sich auch die elektromagnetischen Wellen verstehen, die in Abschn. 5.2.5.4 eingeführt werden.

¹⁾ Friedrich Paschen (1869 bis 1947).

²⁾ s. auch Abschn. 8.2.3.

³⁾ Abschn. 3.3.6.

Da alle Stoffe aus Atomen bestehen, in denen Elektronen um den Kern kreisen und einen Eigendrehimpuls haben, besitzen sie auch atomare Magnetfelder. Diese können sich gemäß den für die Atome geltenden Regeln ganz oder teilweise aufheben (diamagnetische oder paramagnetische Stoffe) oder aber zu makroskopischen magnetischen Bereichen verstärken. Nur die letztgenannten, die sog. ferromagnetischen Stoffe, lassen sich durch äußere Felder stark magnetisieren und haben deshalb enorme technische Bedeutung.

Die Elektrotechnik ist in weiten Bereichen eine Anwendung der Lorentzkraft und der elektromagnetischen Induktion. Einen Überblick über diese Anwendungen geben wir im letzten Teil des Abschnittes 3.3.

Die magnetischen Erscheinungen wurden an den Kraftwirkungen des Magneteisensteins entdeckt. Mit Hilfe sog. permanenter Magnete aus Magneteisenstein oder Stahl (ihre Entstehung kann erst in Abschn. 3.3.5.3 behandelt werden), kann man folgende grundlegende Beobachtungen machen.

1. Unmagnetische Stücke aus Eisen, Nickel oder Kobalt und aus verschiedenen Legierungen werden vom Magneten angezogen.
2. Die Kraftwirkung ist besonders stark an den Enden eines Magneten, den sog. Polen.
3. Ein um eine vertikale Achse drehbar gelagerter Magnet stellt sich auf der Erde so ein, dass die Verbindungslinie seiner Pole ungefähr in geografischer Nord-Süd-Richtung liegt. Dabei weist immer derselbe Pol nach Norden. Man bezeichnet deshalb diesen als Nordpol (auch +-Pol), den entgegengesetzten als Südpol (auch --Pol) des Magneten.
4. Nähert man die gleichartigen Pole zweier Magneten einander an, so stoßen sich diese Magneten ab, nähert man die ungleichartigen Pole zweier Magneten einander, so ziehen sie sich an.

Die Kräfte eines Magneten sind wie die elektrischer Ladungen auch über Entfernungen hinweg und im leeren Raum wirksam. Man nennt den Bereich dieser Kraftwirkung magnetisches Kraftfeld oder kurz Magnetfeld. Mit Eisenfeilspänen lässt sich das magnetische Kraftfeld sichtbar machen. Die Eisenteilchen lagern sich nämlich zu Ketten aneinander (Bild 3.49) und bilden damit die magnetischen Feldlinien ab.

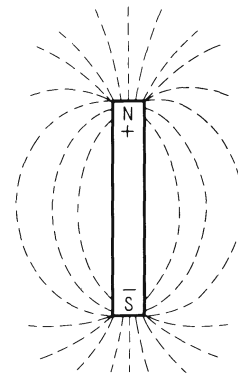


Bild 3.49 Magnetfeld eines Stabmagneten

3.3.1.1 Magnetfeld elektrischer Ströme

In der Umgebung stromdurchflossener Leiter treten immer magnetische Kraftwirkungen auf. Diese magnetische Wirkung des elektrischen Stromes (s. Abschn. 3.2.1) ist im Gegensatz zu den anderen Wirkungen (chemische nur in Elektrolyten, Wärmewirkung nicht im Vakuum) grundsätzlich mit jedem elektrischen Strom verbunden.

□ **Versuch 28.** Eine ebene, glatte, in der Mitte durchbohrte nichtleitende Scheibe ist mit Eisenfeilspänen bestreut. Durch die Bohrung ragt senkrecht zur Ebene ein gerader Leitungsdraht. Nach Einschalten eines Stromes von mehreren Ampere ordnen sich die Eisenfeilspäne in konzentrischen Kreisen an (Bild 3.50a). Bei einem kreisförmigen Leiter haben die Kraftlinien die in Bild 3.50b gezeigte Form. Eine Reihe von kreisförmigen Stromwin-

dungen hintereinander ergibt eine Spule. In einer durch entsprechende Bohrungen einer Scheibe gewickelten Spule erzeugt der Strom ein Magnetfeld, dessen Feldlinienverlauf wieder aus der Anordnung der Eisenfeilspäne hervorgeht (Bild 3.50c): Innerhalb der Spule liegen die Späne parallel in gleichmäßigen Abständen, das Magnetfeld ist dort also homogen. Außerhalb der Spule verlaufen die Kraftlinien wie beim Stabmagneten (Bild 3.49), und man bezeichnet auch die Enden der Spule als deren magnetische Pole. □

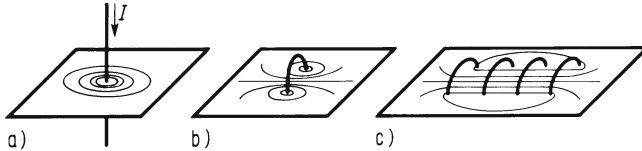


Bild 3.50 Magnetfeld
a) eines stromdurchflossenen
geraden Leiters
b) einer Leiterschleife
c) einer Spule

Die magnetischen Feldlinien eines geraden stromdurchflossenen Drahtes sind konzentrische Kreise, deren Ebenen senkrecht zum Draht liegen und deren Mittelpunkte in der Drahtachse liegen. Ein Kreisstrom wirkt wie ein kleiner Stabmagnet oder magnetischer Dipol, der senkrecht zur Kreisebene steht. Das Magnetfeld einer langgestreckten, zylindrischen stromdurchflossenen Spule entspricht dem eines Stabmagneten.

Als Richtung der Feldlinien wird die Richtung vom positiven (Nord-) zum negativen (Süd-)Pol – außerhalb des Magneten oder der Spule – festgelegt.

Während die Kraftlinien des elektrischen Feldes gedachte Verbindungslinien zwischen getrennten elektrischen Ladungen darstellen, sind die Kraftlinien des magnetischen Feldes stets in sich geschlossene Linien.

3.3.1.2 Magnetfeld der Erde

Ein sehr großer Magnet ist die Erde (Bild 3.51). Die Ursachen des Erdmagnetismus sind allerdings nicht mit denjenigen der oben erwähnten Permanentmagnete identisch. Magnetnadeln stellen sich auf der Erdoberfläche so ein, dass ihr Nordpol oder + -Pol ungefähr zum geographischen Nordpol weist. Demnach ist der dort befindliche magnetische Pol der Erde ein negativer oder Südpol. Die Magnetnadel richtet sich immer so aus, dass ihre N-S-Achse in Richtung der Kraftlinien liegt. Sie liegt also am Äquator parallel zur Erdoberfläche und ist sonst zur Oberfläche geneigt und zwar umso stärker, je näher sie den Polen ist. Dieser Neigungswinkel zur Erdoberfläche heißt Inklinationswinkel.

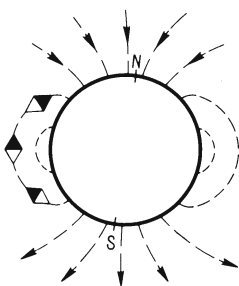


Bild 3.51 Magnetfeld der Erde

Die magnetischen Pole der Erde fallen nicht genau mit den geografischen Polen (Achse der Erdrotation) zusammen. Außerdem ist ihre Lage nicht konstant. Daher weisen Magnetnadeln von den meisten Punkten der Erde aus nicht zum geografischen Pol (Missweisung beim Magnetkompass). Der Winkel zwischen der geografischen Nord-Süd-Richtung und der Richtung der Magnetnadel heißt Deklination. (Zur Stärke des Erdmagnetfeldes s. Abschn. 3.3.2.1).

3.3.2 Größen des magnetischen Feldes

Wie das Gravitationsfeld und das elektrische Feld ist auch das Magnetfeld durch seine Kraftwirkung feststellbar. Die für das Magnetfeld charakteristischen Größen werden deshalb an Versuchen hergeleitet, die diese Kraftwirkung zeigen.

3.3.2.1 Magnetische Induktion $B^1)$

□ **Versuch 29a.** Ein Leiterstab 1 hängt beweglich zwischen dem Nordpol und dem Südpol eines hufeisenförmigen Permanentmagneten (Bild 3.52a). Stromrichtung im Leiterstab und Richtung des Magnetfeldes sind senkrecht zueinander. Nach Einschalten des Stromes bewegt sich der Stab nach rechts, wenn das vordere Ende des Stabes mit dem $-$ -Pol der Spannungsquelle verbunden ist, oder nach links, wenn es mit dem $+$ -Pol verbunden ist. □

Auf den Leiter 1 wirkt eine Kraft senkrecht zur Stromrichtung und zur Richtung des äußeren Magnetfeldes (Bild 3.53).

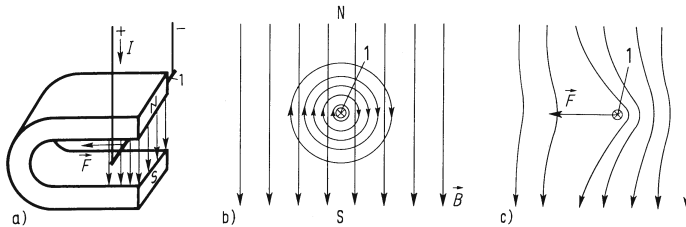


Bild 3.52

- a) Beweglicher stromführender Leiterstab im Magnetfeld
 b) beide Magnetfelder getrennt gezeichnet
 c) Überlagerung der Magnetfelder und Kraftwirkung auf den Leiter

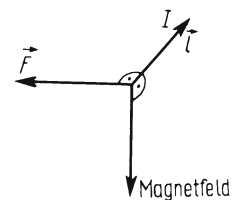


Bild 3.53 Kraft des Magnetfeldes auf einen stromführenden Leiter

□ **Versuch 29b.** Lässt man durch den Leiterstab in Versuch 29a einen stärkeren Strom fließen, so wird seine Auslenkung größer, also ist auch die auslenkende Kraft größer. □

Genaue Messungen ergeben: Die Kraft auf einen Leiterstab, der senkrecht zum Magnetfeld steht, ist dem Strom I proportional

$$F \sim I$$

Aus dieser Tatsache und, da beim Strom null keine auslenkende Kraft auftritt, kann man schließen, dass die Kraft mit der Drift-Geschwindigkeit der freien Ladungsträger im Leiterstab zusammenhängt. Dies lässt sich auch sehr eindrucksvoll durch die Ablenkung eines Elektronenstrahls im Magnetfeld in einem sog. Fadenstrahlrohr (s. Abschn. 3.3.3.2) zeigen. Deshalb berechnen wir den Zusammenhang zwischen Kraft \vec{F} und Geschwindigkeit \vec{v} der Elektronen. Es gilt $I = Q/t = Ne_0/t$ (vgl. Abschn. 3.2.2.1). Mit der Leiterlänge l ist $t = l/v$.

¹⁾ Um Verwechslungen zwischen der Größe magnetische Induktion und der Erscheinung elektromagnetische Induktion (s. Abschn. 3.3.4) zu vermeiden, schreiben wir neben den Begriff für die Größe magnetische Induktion immer das zugehörige Symbol B .

Also erhält man

$$I = \frac{Q}{l} v; \quad (3.63)$$

d.h. die Kraft F ist der Geschwindigkeit der Ladungsträger proportional. Nach Abschn. 3.1 ist die Ursache von Kräften, die auf Ladungsträger wirken, eine elektrische Feldstärke. Daher führen wir auch hier wieder eine elektrische Feldstärke \vec{E} ein, und zwar so, dass $\vec{F} = Q\vec{E}$ ist. Mit Gl. (3.63) ergibt sich dann

$$\vec{F} = \frac{I l}{v} \vec{E} \quad (3.64)$$

Da l konstant ist und da nach Versuch 29b $F \sim I$ ist, so muss auch E/v konstant sein. Dieser Quotient E/v beschreibt offensichtlich den Beitrag des magnetischen Feldes zur Kraftwirkung, und wir definieren ihn deshalb als diejenige Größe des Magnetfeldes, die die Kraftwirkung hervorruft oder „induziert“.

Definition: Man nennt den Quotienten

$$\frac{E}{v} = \frac{F}{Qv} = B \quad (3.65)$$

die magnetische Induktion. \vec{B} ist ein Vektor. Seine Richtung ist im materiefreien Feld diejenige des Magnetfeldes, senkrecht zur Kraft- und senkrecht zur Stromrichtung.

Einheit: Gl. (3.65) ergibt für die Einheit der magnetischen Induktion B

$$1 \frac{\text{Vs}}{\text{m}} = 1 \text{Tesla}^1 = 1 \text{T}$$

Die magnetische Induktion des Erdmagnetfeldes beträgt nur etwa $(3 \dots 6) \cdot 10^{-5} \text{ T}$.

Der Name magnetische Induktion B ist historisch bedingt und beruht auf dem in Abschn. 3.3.4 beschriebenen Zusammenhang. Sinnvoll wäre es, diese Größe \vec{B} „magnetische Feldstärke“ zu nennen, da sie wie die elektrische Feldstärke \vec{E} die Kraftwirkung des Feldes beschreibt. Im internationalen, besonders dem amerikanischen Schrifttum, wird auch bereits so verfahren. Leider ist dies in der deutschen technischen Literatur noch nicht überall üblich. Deshalb wollen auch wir hier noch nicht so verfahren.

Mit der neuen Größe \vec{B} und der Geschwindigkeit \vec{v} der Ladungsträger ergibt sich für die Kraft auf einen Ladungsträger mit der Ladung Q

$$F_L = Q v B$$

und unter Berücksichtigung der Richtungen

$$\vec{F}_L = Q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (3.66)$$

Auf einen bewegten Ladungsträger im magnetischen Feld wirkt eine zu seiner Geschwindigkeit und zur Richtung des Magnetfeldes senkrechte Kraft, s. Bild 3.54. Ihr Betrag ist proportional der Ladung und der Geschwindigkeit des Ladungsträgers, sowie der magnetischen Induktion \vec{B} .

Nach dem Physiker H. A. Lorentz (1853 bis 1928) nennt man sie Lorentzkraft \vec{F}_L .

¹⁾ Nicola Tesla (1856 bis 1943).

Bei genauer Betrachtung erweist sich die Lorentzkraft erstaunlicherweise als relativistischer Effekt (s. Abschn. 8.2.3). Sie ist damit eine der wenigen relativistischen Erscheinungen, die eine bedeutende Rolle in der technischen Praxis spielen.

Unter Berücksichtigung der Tatsache, dass die Geschwindigkeit der Elektronen entgegengesetzt zur technischen Stromrichtung ist, die Ladung aber negativ, ergeben sich die in Bild 3.54 dargestellten Richtungen.

Der Versuch 29a gibt auch Aufschluss über die Richtung der magnetischen Feldlinien im Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters. Die zum Leiter konzentrischen Feldlinien sind im Uhrzeigersinn gerichtet, wenn die Richtung des Leiters die der technischen Stromrichtung ist (Bild 3.52b). Nur dann nämlich wird der Leiterstab infolge der Überlagerung der Magnetfelder des Leiters und des äußeren Feldes in der in Bild 3.52c gezeichneten Weise abgelenkt.

Man kann experimentell nachweisen, dass durch ein Magnetfeld in einem bewegten Leiter mit der Länge l tatsächlich eine elektrische Feldstärke erzeugt wird. Hierzu dient der

□ **Versuch 29c.** Wir trennen den Leiterstab 1 (Bild 3.52) von der Stromquelle und verbinden ihn mit einem empfindlichen Spannungsmesser. Wenn wir nun den Leiterstab von Hand aus dem Magnetfeld herausbewegen, so messen wir an seinen Enden eine Spannung von einigen Millivolt. □

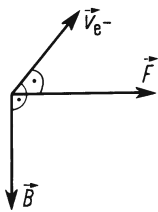


Bild 3.54 Kraft des Magnetfeldes auf ein Elektron mit der Geschwindigkeit \vec{v}

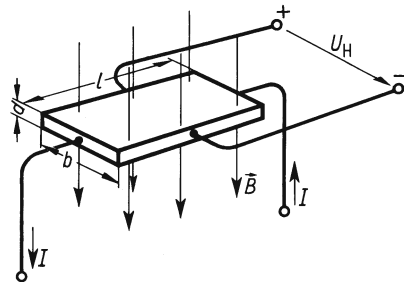


Bild 3.55 Hall-Spannung an einer Leiterplatte im Magnetfeld

Die gemessene Spannung U ist eine Folge der erzeugten Feldstärke $E = U/l$.

Nun ist die Bewegung des Leiterstabes und damit der freien Ladungsträger im Leiterstab von Hand keine elegante Methode zum Nachweis dieser elektrischen Feldstärke. Eine einfache und brauchbare Methode ist jedoch leicht durchführbar:

□ **Versuch 29d. Hall-Effekt.** Bringt man einen stromdurchflossenen ausgedehnten Leiter, z.B. eine Platte mit der Länge l und der Breite b und der Dicke d , in ein zur Plattenebene senkrecht Magnetfeld (Bild 3.55), so misst man an genau gegenüberliegenden Punkten senkrecht zur Strom- und zur Feldrichtung die sog. Hall-Spannung¹⁾ U_H . □

Auf die Elektronen, die ohne Magnetfeld im Mittel gerade Bahnen durchlaufen, wirkt die Lorentzkraft. Dadurch werden sie senkrecht zur Feld- und Stromrichtung abgelenkt, und es tritt eine erhöhte Elektronenkonzentration auf einer Seite des Leiters auf. Die Folge ist eine Querspannung, die Hall-Spannung $U_H = E b$. Mit Gl. (3.69) und (3.63) erhält man

¹⁾ Edwin H. Hall (1855 bis 1938); zum Quanten-Hall-Effekt s. Abschn. 7.4.6.

$$U_H = \frac{lb}{Q} IB$$

Mit der Raumladungsdichte $\rho = Q/V = Q/(lbd)$ erhalten wir $U_H = \frac{1}{\rho d} IB$ oder schließlich die

Hall-Spannung

$$U_H = A_H \frac{IB}{d} \quad (3.67)$$

Dabei ist $A_H = 1/\rho$ der sog. Hall-Koeffizient.

Gibt man dem Strom geeignete konstante Werte, so hat man ein einfaches Messverfahren für die magnetische Induktion B nach Betrag und Richtung, das direkt von der Definitionsgleichung ausgeht. Es wird in der modernen Technik vorwiegend benützt. Der Hall-Koeffizient liegt für die meisten Substanzen in der Größenordnung $\pm 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{As})$. Bei Wismut, Germanium und Indiumantimonid ist der Hall-Koeffizient viel größer

(Bi: $A_H = 5 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3/(\text{As})$, dotiertes Ge: $A_H > 10^{-3} \text{ m}^3/(\text{As})$, InSb: $7 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/(\text{As})$).

Leiterplättchen mit den notwendigen 4 Anschlüssen, wegen Gl. (3.67) möglichst dünn und aus Material mit einem hohen Wert des Hall-Koeffizienten, nennt man Hall-Sonden.

Anwendungen. Außer der schon genannten Messung der magnetischen Induktion B lässt sich mit Hilfe der Hall-Spannung die Beweglichkeit (s. Abschn. 3.2.2.1) und Polarität der Ladungsträger oder ihre Dichte bestimmen (vgl. Abschn. 7). Sog. Hall-Generatoren dienen z.B. zum analogen Multiplizieren von zwei Größen, die dem Strom I bzw. der magnetischen Induktion B proportional sind.

3.3.2.2 Magnetische Erregung

Mit der Hall-Sonde kann man auch sehr einfach die Ursache des magnetischen Feldes, die sog. magnetische Erregung¹⁾, untersuchen. Die magnetischen Wirkungen von Dauermagneten sind denen stromdurchflossener Leiter gleich. Da die Daten elektrischer Stromkreise leichter bestimmbar sind als die von Dauermagneten, ist es zweckmäßig, die Größe magnetische Erregung und ihre Einheit aus den Größen und Einheiten der elektrischen Stromkreise abzuleiten, die das Magnetfeld erzeugen.

□ **Versuch 30.** Wir benützen einige lange frei gewickelte Spulen, zwischen deren Windungen wir eine Hallsonde senkrecht zu dem im Inneren der Spulen mit verschiedenen Querschnitten homogenen Magnetfeld einschieben können (Bild 3.56).

Sodann variieren wir folgende Parameter:

- den Strom I in den Spulen,
- die Länge der Spulen, indem wir diese auseinanderziehen, und damit die Zahl der Windungen pro Länge,
- den Querschnitt der Spulen.

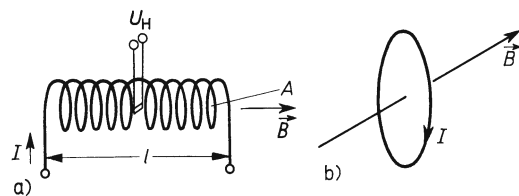


Bild 3.56 zu Versuch 30

¹⁾ Früher auch magnetische Feldstärke, vgl. S. 298.

Dabei können wir uns durch Verschieben der Hall-Sonde innerhalb der Spule davon überzeugen, dass die magnetische Induktion über den ganzen Querschnitt praktisch konstant ist. □ Die Variation der Parameter in Versuch 30 ergibt, dass die magnetische Induktion B (Wirkung des Magnetfeldes) in einer Spule dem Strom und der Zahl der Windungen pro Länge proportional ist. Sie ist vom Spulenquerschnitt unabhängig:

$$B \sim I \frac{N}{l}$$

Definition:

$$\frac{NI}{l} = H \quad (3.68)$$

nennt man den Betrag der magnetischen Erregung im Innern einer langgestreckten Spule der Windungszahl N und der Länge l , in welcher der Strom I fließt.

Damit erhalten wir für die magnetische Erregung die Einheit 1 A/m.

Die Richtung der magnetischen Erregung \vec{H} ist vereinbarungsgemäß die gleiche, wie die der magnetischen Induktion \vec{B} (vgl. Abschn. 3.3.2.1).

Die positive Richtung der magnetischen Feldlinien ist die vom positiven zum negativen Pol, außerhalb der Spule oder des Magneten¹⁾ (s. Abschn. 3.3.1.1).

Der Versuch 30 ergibt außerdem, dass der in Bild 3.56b gezeichnete rechtswendige Zusammenhang zwischen der Richtung von \vec{B} und I besteht, wobei für I formal die Richtung der Stromdichte \vec{S} angenommen wird.

Der Zusammenhang zwischen elektrischem Strom und magnetischer Erregung wurde von Oersted²⁾ 1820 gefunden. Er entdeckte das Magnetfeld um einen stromführenden Leiter. Maxwell³⁾ hat den allgemeinen Zusammenhang zwischen elektrischem Strom und Magnetfeld formuliert. Er verallgemeinerte das für homogene Felder langer Spulen aus Gl. (3.68) folgende Ergebnis

$$Hl = NI \quad (3.69)$$

zu der Aussage: Das Linienintegral der magnetischen Erregung längs einer geschlossenen Kurve ist gleich der Summe aller Ströme, die vom Integrationsweg umfasst werden.

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = I_1 + I_2 + I_K + I_N \quad \text{Durchflutungsgesetz} \quad (3.70)$$

Speziell für einen geradlinigen Leiter, in dem der Strom I fließt, ergibt sich dann mit dem kreisförmigen Integrationsweg um den Leiter herum im Abstand des Radius r :

$$H = \frac{I}{2\pi r} \quad (3.71)$$

Zur Berechnung des Magnetfeldes eines beliebig verlegten Leiters (Bild 3.57) in einem Punkt P außerhalb des Leiters kann man nach dem Erregungsanteil ΔH fragen, der von dem vom

¹⁾ In Abschn. 3.3.5.3 wird gezeigt, dass auch das Feld von Dauermagneten mit Hilfe der Größen \vec{B} und \vec{H} beschrieben werden kann.

²⁾ Hans C. Oersted (1777 bis 1851).

³⁾ James Maxwell (1831 bis 1879).

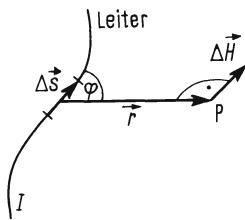


Bild 3.57 Zum Gesetz von Biot-Savart

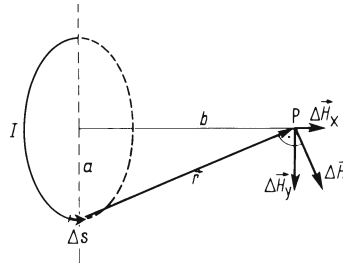


Bild 3.58 Zur Berechnung der magnetischen Erregung eines stromdurchflossenen Draht-ringes

Strom I durchflossenen Leiterstück $\Delta\vec{s}$ herrührt. Diesen Erregungsanteil $\Delta\vec{H}$ kann man mit Hilfe des Biot-Savartschen¹⁾ Gesetzes berechnen:

Sein Beitrag ist

$$\Delta H = \frac{1}{4\pi} \frac{I \Delta s}{r^2} \sin\varphi$$

Der Vektor $\Delta\vec{H}$ steht senkrecht auf der Ebene, die durch den Verbindungsvektor \vec{r} und das Leiterstück $\Delta\vec{s}$ aufgespannt wird (hier identisch mit der Zeichenebene) und bildet mit der Stromrichtung und dem Vektor \vec{r} ein Rechtssystem (Bild 3.57). φ ist der Winkel zwischen \vec{r} und $\Delta\vec{s}$. Wir wenden das Biot-Savartsche Gesetz an, um das Magnetfeld eines kreisförmigen Draht-ringes (Bild 3.58) mit dem Radius a auf dessen Achse zu berechnen. Dieser Draht-ring steht senkrecht zur Zeichenebene. Auf der Achse des Draht-ringes liegt im Abstand b vom Mittelpunkt der Punkt P. Für diesen Punkt P steht der Verbindungsvektor \vec{r} jeweils senkrecht auf den Teilstücken $\Delta\vec{s}$. Somit ist $\Delta H = I/(4\pi) \cdot s/(a^2 + b^2)$. Summiert man alle $\Delta\vec{H}$, so heben sich die Komponenten $\Delta\vec{H}_y$ senkrecht zur Achse auf. Die Komponente in Richtung der Achse $\Delta\vec{H}_x$ erhält man durch Multiplikation von ΔH mit dem Sinus des Winkels, der vom

Verbindungsvektor \vec{r} und dem Lot eingeschlossen wird, gleich $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, zu

$$H = \frac{I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + b^2)^{3/2}}$$

Im Zentrum des Draht-ringes ist mit $b = 0$

$$H = \frac{I}{2a}$$

3.3.2.3 Zusammenhang zwischen magnetischer Induktion B und magnetischer Erregung H

Man kann ein Magnetfeld in jedem Punkt durch die dort herrschende magnetische Erregung \vec{H} oder durch die dort auftretende magnetische Induktion \vec{B} beschreiben. Der Zusammenhang zwischen beiden unabhängig voneinander definierten Feldgrößen kann durch ein Experiment gefunden werden.

Misst man an demselben Punkt im Innern der Spule die magnetische Induktion B – z.B. mit einer geeichten Hallsonde – und errechnet die magnetische Erregung H aus dem Strom I , der Länge l der Spule und ihrer Windungszahl N , so stellt man strenge Proportionalität zwischen beiden fest:

¹⁾ Herleitung s. Abschn. 3.3.6, Beispiel 19. Jean Biot (1774 bis 1862), Felix Savart (1791 bis 1841).

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}^{1)} \quad (3.72)$$

Die magnetische Induktion B ist der magnetischen Erregung proportional. Die Proportionalitätskonstante heißt magnetische Feldkonstante oder Induktionskonstante²⁾. Es ergibt sich

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \quad (3.73)$$

Wie im elektrischen Feld die elektrische Erregung \vec{D} der elektrischen Feldstärke \vec{E} , so ist also im magnetischen Feld die magnetische Induktion \vec{B} der magnetischen Erregung \vec{H} proportional.

Die Einheit des elektrischen Stromes ist mit Hilfe der Kraft zwischen zwei stromführenden Leitern im Abstand $s = 1 \text{ m}$ definiert (s. Abschn. 3.2.1.3). Damit ist wegen $\frac{F}{l} = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{s}$ auch die Induktionskonstante durch Definition festgelegt.

Wegen des in Gl. (3.75) wiedergegebenen Zusammenhangs zwischen dem magnetischen Fluss Φ und der Induktion B wird diese auch magnetische Flussdichte genannt. Für den Betrag von B gilt

$$B = \frac{d\Phi}{dA}$$

Beispiel 16. Wir wenden das Durchflutungsgesetz Gl. (3.70) zur Berechnung des Magnetfeldes innerhalb und außerhalb eines massiven Stabes (Bild 3.59a) an, in dem die homogene Stromdichte $S = I/A = I/R^2 \pi$ herrscht (mit $R = \text{Radius des Stabes}$). Integriert man über einen geschlossenen Kreis mit dem Radius r , so wird $\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = S r^2 \pi$ Mit dem Integrationsweg $2\pi r$ wird

$$H = \frac{1}{2} r S = \frac{1}{2\pi} \frac{I}{R^2} r \quad \text{und mit Gl. (3.72)} \quad B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{R^2} r$$

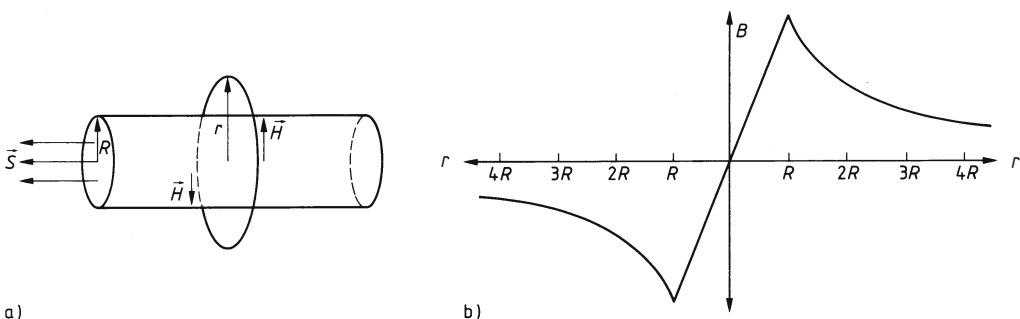


Bild 3.59 Zur Berechnung des Magnetfeldes innerhalb und außerhalb eines stromdurchflossenen Stabes

1) Diese Formel gilt nur im materiefreien Raum. Wenn der Raum des Magnetfeldes von Materie erfüllt ist, gilt $B = \mu_r \mu_0 H$. Einzelheiten, insbesondere über die Richtung von \vec{B} und \vec{H} , siehe Abschn. 3.3.5.1.

2) Verschiedentlich auch absolute Permeabilität.

Die magnetische Induktion oder Feldstärke steigt also im Inneren des Stabes linear von 0 auf $\frac{\mu_0 I}{2\pi R}$ an (Bild 3.59b). Außerhalb ist sie – wie schon aus Gl. (3.71) hervorgeht –

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (3.74)$$

\vec{H} hat für gleiche Werte von r überall den gleichen Betrag und ist stets tangential gerichtet, wie $d\vec{s}$.

3.3.2.4 Magnetische Spannung

Analog zur elektrischen Spannung zwischen zwei Punkten A und B definieren wir folgendermaßen die magnetische Spannung oder Potentialdifferenz:

Definition: Die magnetische Spannung ist gleich dem Linienintegral über die Erregung \vec{H} längs eines Weges s vom Punkt A zum Punkt B oder gleich der Differenz der magnetischen Potentiale.

$$U_{\text{magnAB}} = \int_A^B \vec{H} \cdot d\vec{s} = \varphi_{\text{magn}}(A) - \varphi_{\text{magn}}(B)$$

Man beachte, dass diese magnetische Spannung nicht wie die elektrische Spannung als Arbeit pro Ladung definiert ist. Ihre Bedeutung liegt darin, dass man mit ihrer Hilfe komplizierte magnetische Kreise einfach berechnen kann (s. Aufgabe 2 zu Abschn. 3.3.5).

Beispiel 17. Die magnetische Erregung ist im Innern einer Spule der Länge l praktisch konstant. Nur an den Spulenden fällt sie in einem kleinen Bereich von der Größenordnung des Spulendurchmessers etwa auf die Hälfte des Betrages H_i im Spulennern ab. Vernachlässigt man diese Abnahme und berücksichtigt, dass \vec{H} und l im Inneren dieselbe Richtung haben, so erhält man für die magnetische Spannung U_{magn} zwischen den Spulenden (Punkte A und B):

$$U_{\text{magn}} = \int_A^B \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_A^B H ds \approx H_i l \approx NI \quad (\text{vgl. auch Gl. (3.68)})$$

3.3.2.5 Magnetischer Fluss

Magnetische Feldlinien dienen der anschaulichen Darstellung von Magnetfeldern. Wo die Kraftlinien besonders dicht liegen, ist verabredungsgemäß die Induktion B und nach Gl. (3.72) auch die magnetische Erregung besonders groß. Die Wirkung eines Magnetfeldes hängt davon ab, wie groß die magnetische Induktion B an den einzelnen Stellen des Feldes ist. Bild 3.60 zeigt das Magnetfeld einer Spule. Man kann zwei Gebiete gegeneinander abgrenzen, in denen die Feldlinien entgegengesetzte Richtungen haben, ein inneres Gebiet 1 und ein äußeres Gebiet 2, den gesamten Außenraum. Da alle Feldlinien in sich geschlossen sind, gibt es im Gebiet 1 ebenso viele Feldlinien wie im Gebiet 2. Jede Fläche A , die den gesamten Innenraum 1 oder Außenraum 2 schneidet, wird von dem gesamten Magnetfeld durchsetzt. In Bild 3.60 sind die Spuren zweier solcher Flächen A_1 (oder A_3) im Innenraum 1 und einer Fläche A_2 im Außenraum 2 eingezeichnet. Auf der kleinen Fläche A_1 (oder A_3) herrscht eine konstante magnetische Induktion B_1 , auf der großen Fläche A_2 eine nicht konstante geringere magnetische Induktion B_2 .

Integriert man jedoch die Normalkomponente B_N der magnetischen Induktion \vec{B} jeweils über die betreffende Fläche, so erhält man in allen drei Fällen denselben Wert:

$$\int_{A_1} B_N dA = \int_{A_2} B_N dA = \int_{A_3} B_N dA$$

Diese Größe nennt man den magnetischen Fluss Φ .

Definition: Man nennt das Integral der Normalkomponente B_N der magnetischen Induktion \vec{B} über eine Fläche A den die Fläche A durchsetzenden magnetischen Fluss Φ .

$$\Phi = \int_A B_N \, dA = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}; \quad (3.75)$$

hierbei hat $d\vec{A}$ die Richtung der Flächennormale \vec{n} .

Die Einheit des magnetischen Flusses ist

$$1 \text{ Weber} = 1 \text{ Wb} = 1 \text{ Vs}$$

Wegen Gl. (3.75) ist $B = d\Phi/dA$;daher nennt man B auch magnetische Flussdichte.

Bezeichnet man die Flächennormale mit \vec{n} , so ergibt sich $B_N = B \cos \varphi$ ($\vec{B}; \vec{n}$). Die Bedeutung des Flusses Φ soll folgendes Beispiel anschaulich machen:

Beispiel 18. Die magnetische Erregung des im Innern der Spule (Bild 3.60) homogenen Feldes betrage $H = 2500 \text{ A/m}$. Dann ist dort die magnetische Induktion $B = \mu_0 H = 3,14 \cdot 10^{-3} \text{ Vs/m}^2$. Der magnetische Fluss Φ , der die Fläche $A_1 = 2 \text{ cm}^2$, die senkrecht zur Feldrichtung liegt, durchsetzt, ist sodann

$$\Phi = BA_1 = 3,14 \cdot 10^{-3} \text{ Vs/m}^2 \cdot 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 6,28 \cdot 10^{-7} \text{ Vs}$$

Der gleiche Fluss durchsetzt die um den Winkel φ zum Feld geneigte Fläche $A_3 = A_1/\cos \varphi$

$$\Phi = BA_3 \cos \varphi = BA_1$$

Beide Flächen schneiden den gesamten Innenraum 1. Deshalb erhalten wir in beiden Fällen den gesamten magnetischen Fluss der Spule. Integriert man nur über eine Teilfläche, so erhält man natürlich nur den die Teilfläche durchsetzenden Teilfluss.

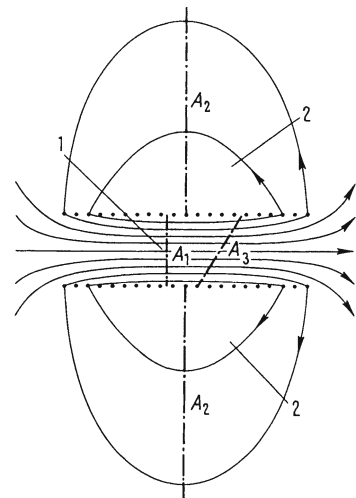


Bild 3.60 Magnetfeld einer Zylinderspule (nach Berkeley Physics Course, Bd. 2, New York 1965)

3.3.2.6 Magnetisches Moment

□ **Versuch 31** (Bild 3.61). Man bringt in das Innere einer Spule 1 eine bewegliche kleine Spule 2 so ein, dass die Längsachsen beider Spulen in Ruhestellung parallel sind. Nach Einschalten von Strömen in beiden Spulen wird die Probespule 2 mit einer Torsionsfeder 3 entgegen dem Drehmoment, das durch das Magnetfeld der Spule 1 ausgeübt wird, bis zur Senkrechthaltung gegenüber der Achse der Spule 1 gedreht. Die Torsionsfeder dient zur Messung des Drehmomentes. Die magnetische Induktion B_1 der Spule 1 beträgt im Inneren $\mu_0 N_1 I_1 / l_1$. Die Probe-

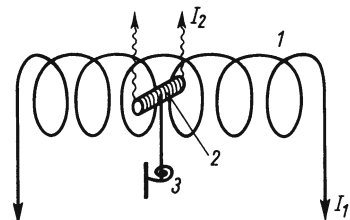


Bild 3.61 Messung des magnetischen Momentes einer stromdurchflossenen Spule

spule 2 hat mit der Induktion $B_2 = \mu_0 N_2 I_2 / l_2$ und dem Querschnitt A_2 den magnetischen Fluss $\Phi_2 = B_2 A_2$. Es zeigt sich, dass das Drehmoment M der Induktion B_1 der Spule 1, dem Fluss Φ_2 und der Länge l_2 der Spule 2 und außerdem dem Sinus des Winkels φ zwischen beiden Spulenachsen proportional ist. Als Proportionalitätsfaktor ergibt sich $1/\mu_0$, also

$$M = B_1 \frac{\Phi_2 l_2}{\mu_0} \sin \varphi \quad \square$$

Definition: Wir nennen die Größe

$$j_A = \frac{\Phi l}{\mu_0} \quad (3.76)$$

einer stromdurchflossenen Spule deren (Amperesch) magnetisches Moment¹⁾. Seine Richtung ist die vom negativen zum positiven Pol der Magnetspule. Die Einheit des Amperesch magnetischen Momentes ist 1 Am^2 .

Jeder magnetische Körper hat ein magnetisches Moment. Es ist aus dem Drehmoment M , das ein äußeres Magnetfeld auf ihn ausübt, bestimmbar.

Die wichtigste Bestimmungsgröße eines Magneten ist sein magnetisches Moment \vec{j}_A . Für das Drehmoment \vec{M} ergibt sich

$$\vec{M} = \vec{j}_A \times \vec{B} \quad (3.77)$$

Neben der trägen Masse, der schweren Masse (Gravitationsladung) und der elektrischen Ladung ist das magnetische Moment eine weitere wichtige Eigenschaft eines Körpers. Das gilt insbesondere für die kleinsten Bausteine der Materie im Atom. Den magnetischen Körper selbst nennt man magnetischen Dipol (s. auch Abschn. 3.3.1.1).

Beispiel 19. Eine ebene rechteckige Stromschleife liegt so in einem Magnetfeld, dass sich die Seiten b in Richtung des Feldes, die Seiten a senkrecht dazu befinden. Dann wirken auf die Seiten a die entgegengesetzt gleichen Kräfte Iba , die das Drehmoment $M = 2Ibab/2 = IBA$ erzeugen. Dies gilt für Stromschleifen beliebiger Form, also auch für den Ringstrom, den ein um den Atomkern kreisendes Elektron darstellt. Vergleicht man dies mit Gl. (3.77), so ist $j_A = IA$ das magnetische Moment eines solchen Kreisstromes. Dem mit der Geschwindigkeit $v = \omega r$ auf einer Bahn mit dem Radius r umlaufenden Elektron entspricht der Ringstrom $I = e_0 \omega / 2\pi$ mit dem magnetischen Moment $j_A = e_0 \omega r^2 / 2$.

Aufgaben zu Abschn. 3.3.2

1. Die magnetische Erregung des Erdmagnetfeldes beträgt auf der Oberfläche der Erde ca. 15 A/m . Wie groß muss der Strom in einer Spule mit 10 Windungen pro cm Länge sein, damit im Innern der Spule die gleiche magnetische Erregung herrscht?
2. Nach dem Bohrschen Atommodell umkreisen die Elektronen den positiven Atomkern. Wie groß ist die magnetische Erregung am Ort des

Kerns und die magnetische Induktion B , wenn ein Elektron diesen im Abstand 10^{-10} m in der Sekunde 10^{16} mal umkreist?

3. In einer Spule mit der Länge 50 cm und dem Durchmesser 10 cm, die 600 Windungen hat, fließt der Strom 10 A. Wie groß sind a) die magnetische Erregung, b) die magnetische Induktion B im Innern der Spule, c) der magnetische Fluss, d) das magnetische Moment der Spule?

¹⁾ Das sog. Coulombsche magnetische Moment j_c wird entsprechend mit der magnetischen Erregung definiert: $j_c = M/(H \sin \varphi)$. Es beträgt für die Spule $j_c = \Phi l$. Unglücklicherweise wird meist schlechthin vom magnetischen Moment gesprochen. Bei Verwendung von Zahlenwerten muss deshalb auf die zugrundeliegende Definition geachtet werden.

3.3.3 Kraftwirkung magnetischer Felder

Das magnetische Feld eines Permanentmagneten oder eines elektrischen Stromes übt sowohl auf andere Permanentmagnete als auch auf andere stromdurchflossene Leiter eine Kraft aus. Diese Kraftwirkung wurde in den Abschnitten 3.3.2.1 und 3.3.2.2 zur Einführung der magnetischen Feldgrößen herangezogen. In den folgenden Abschnitten sollen die in der Praxis bedeutsamen Fälle aufgeführt und erläutert werden. Die Kraft eines Magneten auf einen Körper aus Weicheisen wird in einem unbezifferten Abschnitt am Ende von Abschn. 3.3.4.3 eingeführt.

3.3.3.1 Kraftwirkung auf stromführende Leiter

In Versuch 29a wirkt auf den beweglich senkrecht zum Magnetfeld aufgehängten Leiterstab 1 (Bild 3.52) eine Kraft senkrecht zur Stromrichtung und zum Magnetfeld, so dass dieser im Magnetfeld bewegt wird (Bild 3.52 und 3.53). Wir fassen die Ergebnisse des Versuches 29 a und b nochmals zusammen:

Auf einen stromführenden Leiter in einem dazu senkrechten äußeren Magnetfeld wirkt eine Kraft senkrecht zur Stromrichtung und zum Magnetfeld. Sie ist der Geschwindigkeit der Ladungsträger im Leiter und der magnetischen Induktion B des äußeren Magnetfeldes proportional. Mit Gl. (3.64) und (3.65) erhalten wir den Zusammenhang zwischen der Lorentzkraft F_L und dem Strom I im Leiter mit der vektoriellen Länge \vec{l} , der man die Richtung der Stromdichte \vec{S} zuordnet:

$$\vec{F}_L = I(\vec{l} \times \vec{B}) \quad (3.78)$$

3.3.3.2 Kraftwirkung auf bewegte Ladungsträger

Ein Magnetfeld übt eine Kraft auf einen Leiter nur dann aus, wenn in diesem ein Strom fließt, wenn sich also Ladungsträger im Leiter bewegen. Dabei ist der Leiter nicht wesentlich. Auch auf bewegte Ladungsträger in Gasen oder im Vakuum wirkt die Kraft eines äußeren Magnetfeldes.

□ **Versuch 32. Fadenstrahlrohr.** In einem Glasgefäß (Bild 3.62) befindet sich ein Gas geringer Dichte. Zwei nicht eingezeichnete Spulen erzeugen ein annähernd homogenes magnetisches Feld senkrecht zur Zeichenebene. Die von einer Glühkathode 1 austretenden Elektronen werden zur Anode 2 hin beschleunigt. Ein Teil von ihnen fliegt durch ein Loch der Anode 2.

Ihre Bahn wird durch das Leuchten, zu dem sie die Gasmoleküle durch Stöße anregen, sichtbar. Ohne äußeres Magnetfeld fliegen die Elektronen nach Verlassen der Anode

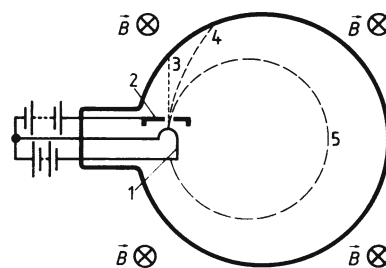


Bild 3.62 Magnetische Ablenkung eines Elektronenstrahls im Fadenstrahlrohr. Das Magnetfeld ist senkrecht zur Zeichenebene von vorn nach hinten gerichtet.

geradlinig (3) weiter. Nach Einschalten des Stromes in den Spulen beobachtet man aber eine deutlich abgelenkte Bahn 4, die mit wachsendem Strom in den Spulen immer stärker gekrümmt ist, bis sie z.B. zu einem geschlossenen Kreis 5 wird. □

Auf die Elektronen im magnetischen Feld wirkt demnach eine Kraft senkrecht zum Feld und zur Bewegungsrichtung der Elektronen. Die dadurch hervorgerufene Auslenkung des Elektronenstrahls entspricht der des Stabes im Versuch 29a; ja, der Stab bewegt sich dort überhaupt nur, weil auf die Elektronen, die sich in ihm bewegen, diese Kraft wirkt. Bezüglich der Richtung der Kraft muss man berücksichtigen, dass die Bewegungsrichtung der Elektronen der konventionellen Stromrichtung entgegengesetzt ist.

Wirkt auf einen Körper eine Kraft senkrecht zur Bewegungsrichtung, so ändert sich nur die Richtung, nicht der Betrag seiner Geschwindigkeit; der Körper erfährt also eine reine Radialbeschleunigung. Ist die Kraft dem Betrag nach konstant, so beschreibt er eine Kreisbahn. In Versuch 32 erzeugt das homogene magnetische Feld eine derartige Kraft auf die Elektronen, daher bewegen sie sich auf einer Kreisbahn. Mit wachsendem Spulenstrom, d.h. mit steigender magnetischer Induktion B des Magnetfeldes, wird der Radius der Bahn immer kleiner, weil die Kraft auf die Elektronen wächst. Da ein konstantes Magnetfeld also nur die Richtung, nicht den Betrag der Geschwindigkeit eines Ladungsträgers ändert, bleibt die kinetische Energie des Ladungsträgers konstant: Das magnetische Feld leistet keine Arbeit.

Der Elektronenstrahl entspricht einem Strom $I = Q/t$. Mit Gl. (3.41) schreiben wir

$$I = \frac{Q}{t} = n e_0 A v$$

Dabei ist $n = N/V$ die Zahl der Elektronen pro Volumen, v deren Geschwindigkeit, A der Querschnitt des Elektronenstrahls und e_0 die Elementarladung des Elektrons. Mit Gl. (3.64) und (3.65) erhalten wir für die Kraft auf die Elektronen des Strahls

$$F = n e_0 A v l B$$

Im Volumen $V = A l$ sind $n A l$ Elektronen vorhanden. Damit ist wie in Gl. (3.66) die Kraft auf ein Elektron $\vec{F}_L = e_0 (\vec{v} \times \vec{B})^1$.

Wirkt auf eine mit der Geschwindigkeit \vec{v} bewegte Ladung Q gleichzeitig ein elektrisches und ein magnetisches Feld, so erhält man als vollständigen Ausdruck für die Lorentzkraft

$$\vec{F}_L = Q\vec{E} + Q(\vec{v} \times \vec{B}) = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})^1$$

Beispiel 20. Die Anordnung von Versuch 32 eignet sich auch zur Bestimmung der spezifischen Ladung e_0/m des Elektrons. Die Lorentzkraft wirkt als Zentripetalkraft.

$$F_L = m_e v^2/r = e_0 v B$$

Die magnetische Induktion B ist aus den Abmessungen der Spulen und des Stromes zu ermitteln, der Radius r der Bahn ist direkt messbar. Die Geschwindigkeit erhält man mit Gl. (3.62) aus der Beschleunigungsspannung U . Somit wird die so genannte spezifische Ladung des Elektrons

¹⁾ Siehe auch Abschn. 8.2.3.

$$\frac{e_0}{m_e} = \frac{2U}{B^2 r^2} = \frac{2U I^2}{\mu_0^2 N^2 I^2 r^2} \quad (3.79)$$

bestimmbar. Gemessene Zahlenwerte: $U = 200$ V; Windungszahl $N = 100$; $I = 1$ A; Gesamtlänge der Spule $l = 13,2$ cm; $r = 5 \cdot 10^{-2}$ m. Daraus $e_0/m_e = 1,77 \cdot 10^{11}$ As/kg (genauer Wert: $1,7589 \cdot 10^{11}$ As/kg).

Anwendungen. Auf der Kraftwirkung magnetischer Felder auf stromdurchflossene Leiter beruht die Wirkungsweise der in Abschn. 3.3.6.2 beschriebenen Elektromotoren und des in Abschn. 3.2.1 besprochenen Drehspulinstrumentes. Die Ablenkung von Elektronenstrahlen durch die Magnetfelder von Spulen wird bei Fernsehbildröhren angewandt. Im Hals der Bildröhre sind 3 Elektronenkanonen für die Farben Blau, Grün und Rot untergebracht. Sie bestehen aus Heizfaden, Kathode, Wehnelt Elektrode, Schirmgitter, Fokussierungselektroden und Beschleunigungselektroden (s. Abschn. 3.2.6.1). Die vertikale (Bild) und horizontale (Zeile) Ablenkung der Elektronenstrahlen erfolgt mit Magnetfeldspulen, heute mit einer maximalen Strahldivergenz von 110° in der Diagonale. Eine so starke Ablenkung auf kurzem Weg ist nur im Magnetfeld (Elektronen auf Kreisbahn) möglich (s.a. Aufgabe 4 zu Abschn. 3.3.3). Im Gegensatz hierzu wird die viel geringere Ablenkung in der Oszilloskopröhre mit elektrostatischen Feldern (Elektronen auf Parabelbahn) bewirkt. Schließlich werden die Elektronen mit 25 kV zum Bildschirm hin nachbeschleunigt. Die Wirkungsweise elektrischer Generatoren beruht ebenfalls auf der Lorentzkraft.

In den Beschleunigeranlagen der Kernforschung werden Ionen oder Elektronen beim Durchlaufen elektrischer Felder auf hohe Geschwindigkeit gebracht. Durch zusätzliche Magnetfelder werden die erforderlichen langen Bahnen der Teilchen zu Spiralen aufgewickelt (s. Bild 3.63). Derartige Anlagen bezeichnet man als Zyklotrons. Im sog. Betatron werden Elektronen durch ein magnetisches Führungsfeld auf Kreisbahnen gehalten. Die Beschleunigung des Elektrons geschieht durch elektrische Felder, die durch die Änderung des magnetischen sog. Beschleunigungsfeldes entstehen (s. Abschn. 3.3.4). Mit ähnlichen kerntechnischen Beschleunigeranlagen erreicht man heute Teilchenenergien bis zu 400 GeV (s. Abschn. 6.2.3.3).

Mit magnetischen (und elektrischen) Feldern geeigneter Form und Stärke können Elektronenstrahlen – wie Licht durch optische Linsen – divergent und konvergent gemacht werden. Diese sog. Elektronenlinsen finden z.B. im Elektronenmikroskop Anwendung.

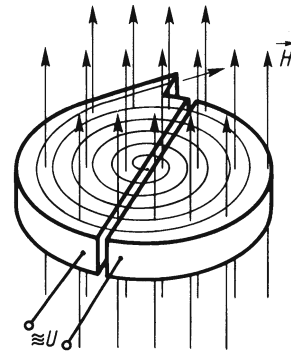


Bild 3.63 Schema eines Zyklotrons

3.3.3.3 Kraftwirkung zwischen parallelen stromführenden Leitern

Die magnetische Induktion B in der Umgebung eines geradlinigen stromführenden Leiters ist mit Gl. (3.71) und (3.72) $B = \mu_0 I / (2\pi r)$. Wenn sich zwei parallele, von gleichen Strömen durchflossene Leiter im Abstand r nebeneinander befinden, so wirkt auf jeden das magnetische Feld des anderen mit der gleichen magnetischen Erregung. Die Kraft auf jeden der beiden Leiter ist mit Gl. (3.65) und (3.64)

$$F = \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi r}$$

Diese Beziehung erlaubt die Bestimmung des elektrischen Stromes durch leicht messbare mechanische Größen. Sie dient heute zur Definition der Einheit des elektrischen Stromes im Internationalen Einheitensystem (s. Abschn. 3.2.1).

Aufgaben zu Abschn. 3.3.3

1. Zwischen den Polen 1 und 2 des Permanentmagneten eines Drehspulinstrumentes (Bild 3.64) befindet sich, um die Achse 3 drehbar gelagert, eine quadratische Spule mit 200 Windungen. Die Seitenlänge der Spule beträgt $s = 1$ cm, der Strom $I = 1$ mA. Das homogene Magnetfeld hat die magnetische Erregung $H = 3 \cdot 10^5$ A/m. Wie groß ist das maximale Drehmoment auf die Spule?

2. a) Welche Bahn beschreibt ein Elektron, das parallel zur Feldrichtung x in ein homogenes magnetisches Feld gelangt?

b) Welche Bahn beschreibt es, wenn die Richtung seiner Geschwindigkeit um einen kleinen Winkel von der Feldrichtung abweicht?

3. In einem Zyklotron werden α -Teilchen (He^{++} -Ionen) beschleunigt. Der Radius r der äußeren Bahn beträgt 0,5 m. Die magnetische Induktion B des Magnetfeldes beträgt 1 Vs/m^2 , $Q_\alpha = 2e_0$; $m_\alpha = 6,64 \cdot 10^{-27}$ kg. Die relativistische Massenzunahme darf für α -Teilchen mit Energien < 40 MeV vernachlässigt werden. Wie groß sind a) Winkelgeschwindigkeit und Umlauf-

frequenz, die sog. Zyklotronfrequenz, b) Bahngeschwindigkeit und c) kinetische Energie der α -Teilchen am Ende des Beschleunigungsvorgangs? d) Welche Spannung müsste das α -Teilchen in einem Linearbeschleuniger durchlaufen, um die gleiche Energie zu erreichen?

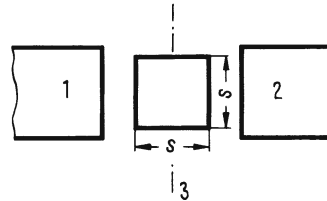


Bild 3.64 Zu Aufgabe 1

4. Die Spulen für die Vertikalablenkung einer Fernsehbiröhre erzeugen die magnetische Induktion $B = 5 \cdot 10^{-3}$ T. Die Elektronen sollen mit der als konstant angenommenen Energie $W = 1,7$ keV das Feld auf 2 cm horizontaler Länge durchlaufen. Um welchen Winkel wird der Elektronenstrahl abgelenkt?

3.3.4 Elektromagnetische Induktion

Bei der Beschreibung des magnetischen Feldes haben wir eine gewisse formale Ähnlichkeit zwischen dem elektrischen und dem magnetischen Feld festgestellt. Der wichtigste Unterschied zwischen beiden ist das Fehlen einzelner magnetischer Ladungen beim magnetischen Feld.

Den ersten Zusammenhang zwischen beiden Feldern hat Oerstedt entdeckt (s. Abschn. 3.3.2.2). Eine darüber hinausgehende Verknüpfung fand 1831 Faraday. Er hatte systematisch danach gesucht. Aus Symmetriegründen erwartete er ein Analogon zum Zusammenhang zwischen elektrischem Strom und magnetischer Feldstärke. Da es jedoch wegen des Fehlens magnetischer Ladungen auch keinen magnetischen Strom gibt, erwartete er eine Verknüpfung zwischen der zeitlichen Änderung der magnetischen Induktion B und der elektrischen Feldstärke. Seine Experimente führten zur Entdeckung der elektromagnetischen Induktion.

3.3.4.1 Versuche zur elektromagnetischen Induktion

□ **Versuch 33.** Wir wiederholen hierfür den Versuch 29c: Man bewegt den mit einem empfindlichen Galvanometer verbundenen Leiterstab (Bild 3.52) von Hand im Magnetfeld. Die Bewegung des Stabes entspricht dabei genau der durch das Magnetfeld des Stromes im Leiter (Versuch 29a) verursachten Auslenkung senkrecht zum Feld und zu seiner Längsrichtung. Während der Bewegung zeigt das Galvanometer einen Ausschlag, dessen Rich-

tion von der Bewegungsrichtung abhängt. Lenkt man den Leiter nach rechts aus, so fließt ein Strom von vorn nach hinten und umgekehrt. \square

Bewegt man einen Leiter in einem Magnetfeld, so bewegt man damit alle seine Ladungsträger. Auf diese wirkt also nach Gl. (3.78) eine Lorentzkraft, d.h. die Ladungsträger bewegen sich senkrecht zum Feld und zur Bewegungsrichtung, also hier in Versuch 33 in Richtung des Leiters. Diese Bewegung von Ladungsträgern ist aber identisch mit einem elektrischen Strom. Wir können den Versuch 33 in Gedanken abwandeln (Bild 3.65):

Wir denken uns einen Leiter 1; 2; 3; 4, der über die Leitung 5 zum und vom Galvanometer in sich geschlossen ist. Er wird in einem homogenen Magnetfeld \vec{B} mit der Geschwindigkeit \vec{v} senkrecht zu den Feldlinien bewegt, z.B. in die gestrichelt gezeichnete Lage. Dann wirkt auf alle Elektronen im Leiter die Lorentzkraft \vec{F}_L in der eingezeichneten Richtung. Wegen der Homogenität des Feldes, der Konstanz der Ladungsträgerdichte und der Geschwindigkeit haben die hier maßgebenden Kräfte in den Leiterteilen 2 und 4 gleichen Betrag und gleiche Richtung, ergeben also zusammen den Strom Null.

Ist allerdings entweder das Magnetfeld inhomogen oder sind die Geschwindigkeiten einzelner Leiterteile verschieden (in Versuch 33 ist beides der Fall), dann zeigt das angeschlossene Galvanometer einen Strom an. Wir fassen zusammen:

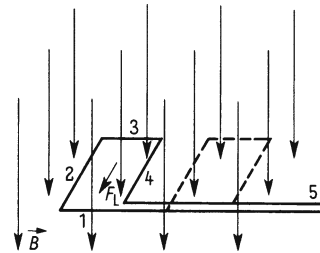


Bild 3.65 Bewegung eines Leiterkreises in einem homogenen Magnetfeld

Bewegt man senkrecht zur Feldrichtung Teile eines in sich geschlossenen Leiterkreises durch ein homogenes Magnetfeld oder den ganzen Leiterkreis durch ein inhomogenes Magnetfeld, so entsteht im Leiter ein elektrischer Strom. Diesen Strom nennt man Induktionsstrom, die Erscheinung elektromagnetische Induktion.

Die Richtung des Induktionsstroms im von Hand bewegten Leiterstab ist umgekehrt zur Richtung des Stromes im Leiterstab, der eine Bewegung in der gleichen Richtung (z.B. in Versuch 29a) verursacht. Daraus lässt sich die folgende Regel über die Stromrichtung ableiten:

Lenzsche Regel¹⁾: Der Induktionsstrom ist stets so gerichtet, dass er den Vorgang (z.B. Bewegung des Leiters), der ihn hervorruft, zu hemmen sucht.

Als Ursache eines Stromes können wir uns immer ein elektrisches Feld vorstellen mit der Feldstärke $\vec{E} = \vec{F}/Q$ (Gl. (3.3)). Hier beim Induktionsstrom ist die Kraft speziell die Lorentzkraft $\vec{F}_L = e_0(\vec{v} \times \vec{B})$; d.h. also, nicht durch das Vorhandensein von Ladungen im Magnetfeld, sondern durch ihre Bewegung mit der Geschwindigkeit \vec{v} (zusammen mit ihrem Leiter) wird das elektrische Feld „eingeführt“ (lat. *inducere* = einführen). In diesem

¹⁾ H. E. Lenz (1804 bis 1865).

induzierten elektrischen Feld ist dann auch die Potentialdifferenz oder Spannung zwischen zwei Punkten definiert (vgl. Abschn. 3.1.2.2), die wir Induktionsspannung nennen. Damit gilt:

Der Induktionsstrom ist die Folge einer durch die Bewegung des Leiters im Magnetfeld hervorgerufenen Induktionsspannung. Der Induktionsstrom fließt nur, wenn der Leiter geschlossen ist.

Die elektromagnetische Induktion und die in Abschn. 3.3.3 beschriebene Kraftwirkung magnetischer Felder beruhen also gemeinsam auf der Wirkung der Lorentzkraft. Bei der elektromagnetischen Induktion entsteht ein elektrischer Strom auf Grund der Bewegung eines Leiters in einem Magnetfeld (Prinzip eines Generators). In Versuch 29a bewegte sich ein Leiter auf Grund eines elektrischen Stromes in einem Magnetfeld (Prinzip des Elektromotors). Zur genaueren Deutung der elektromagnetischen Induktion und der Zusammenhänge zwischen Induktionsspannung und der Bewegung des Leiters im Magnetfeld wollen wir weitere Versuche machen.

□ **Versuch 34.** Mit Hilfe der Spule 1 in Bild 3.66 erzeugen wir ein Magnetfeld, das dem eines Stabmagneten gleicht. Wir nennen die Spule 1 Feldspule. Die magnetischen Feldlinien schneiden annähernd senkrecht die Drahtschlinge 2, die wir Induktionsspule nennen. Zur Messung der Induktionsspannung ist die Drahtschlinge 2 mit einem empfindlichen in Volt geeichten Schreiber 3 verbunden. Wir bewegen nun die Schlinge langsam in Richtung des Pfeils von der Feldspule 1 weg, also in Richtung abnehmender magnetischer Erregung des außerhalb der Feldspule inhomogenen Feldes. Der Schreiber 3 zeigt während der Bewegung einen kleinen Ausschlag. Bewegen wir die Schlinge 2 ebenso langsam zum Ausgangspunkt zurück, so erhalten wir während der Bewegung einen gleich großen Ausschlag in umgekehrter Richtung. Machen wir die beiden Bewegungen schneller, so erhalten wir einen größeren Ausschlag während der nun kürzeren Bewegungszeit. □

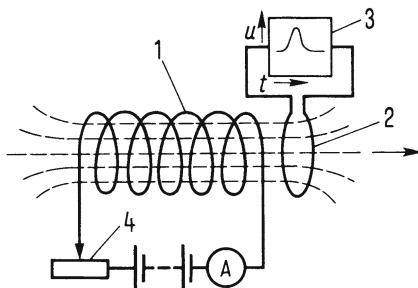


Bild 3.66 Messung der Induktionsspannung

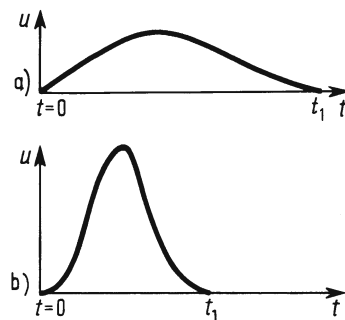


Bild 3.67 Zwei gleich große Induktionsspannungsschübe mit verschiedener Zeitdauer

Die Höhe der Induktionsspannung hängt von der Geschwindigkeit ab, mit der die Induktionsspule bewegt wird.

Bei langsamer Bewegung des Leiters messen wir eine kleine Spannung während einer längeren Zeitdauer (Bild 3.67a), bei schneller Bewegung eine große Spannung während einer kürzeren Zeitdauer (Bild 3.67b). Die Flächen unter den beiden Kurven sind gleich groß.

Der Inhalt der Fläche entspricht dem Zeitintegral der Spannung $\int_{t=0}^{t_1} u dt$. Analog zum Kraftstoß $\int_{t=0}^{t_1} \vec{F} dt$ (s. Abschn. 1.3.4.4) nennen wir diese Größe Spannungsstoß.

Der Induktionsspannungsstoß $\int_{t=0}^{t_1} u dt$ ist unabhängig von der Geschwindigkeit des Vorgangs.

Mit der Versuchsanordnung in Bild 3.66 machen wir eine Reihe weiterer Versuche.

□ **Versuch 35.** Den gleichen Spannungsstoß wie beim Entfernen und Nähern der Drahtschleife erhält man, wenn man den Strom in der Spule 1 mit dem Einstellwiderstand 4 vom eingestellten Wert annähernd auf den Wert Null bringt und ihn anschließend auf den ursprünglichen Wert erhöht.

Bei langsamer Stromänderung erhalten wir einen Spannungsstoß wie in Bild 3.67a, bei schneller Stromänderung wie in Bild 3.67b. □

Der induzierte Spannungsstoß hängt von der Änderung des Magnetfeldes ab, in dem sich der Leiter befindet.

□ **Versuch 36.** Verdoppelt oder verdreifacht man die Zahl der Windungen der Drahtschlinge 2 (Induktionsspule), so verdoppelt oder verdreifacht sich der induzierte Spannungsstoß. Das Gleiche geschieht, wenn man den Strom und damit die magnetische Erregung in der Spule 1 verdoppelt oder verdreifacht. □

Der induzierte Spannungsstoß ist der Windungszahl der Induktionsspule und der Stärke des Magnetfeldes proportional.

□ **Versuch 37.** Trennt man die Feldspule 1 in zwei Spulen (Bild 3.68), so hat man in dem Raum zwischen den beiden Spulen ein annähernd homogenes Feld. Dreht man die Drahtschleife 2, deren Ebene senkrecht zum Feld steht, um 90° , so erhält man den gleichen induzierten Spannungsstoß wie bei völliger Entfernung der Drahtschlinge aus dem Feld. Drehen wir die Schlinge um 180° , so erhalten wir den doppelten Spannungsstoß. Zieht man die Drahtschlinge im Feld zusammen, verkleinert also ihre Fläche, oder vergrößert man sie wieder, so zeigt auch dabei der Schreiber 3 einen Spannungsstoß an. Man kann den magnetischen Fluss durch Spule 2 auch ändern, indem man z.B. einen Eisenkern in die Spule schiebt (s. Versuch 39 in Abschn. 3.3.5.1). □

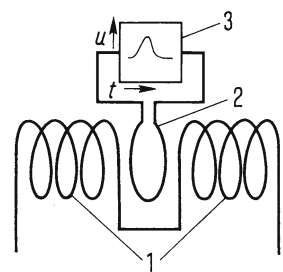


Bild 3.68 Zur Induktion

Die Versuche 34 bis 37 haben gezeigt:

Ein Induktionsspannungsstoß entsteht bei jeder zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses, der die Induktionsspule durchsetzt.

3.3.4.2 Das Induktionsgesetz

Die Ergebnisse der Versuche 34 bis 37 lassen sich, wie folgt, zusammenfassen: Immer dann, wenn sich der magnetische Fluss Φ ändert, der eine Fläche A durchsetzt, entsteht in einem Leiter, der diese Fläche umfasst, ein Induktionsspannungsstoß $\int_{t=0}^{t_1} u dt$. Dabei ist die Ursache dieser Änderung gleichgültig. Sie kann auf einer Bewegung des Leiters oder auf einer Änderung des magnetischen Feldes beruhen. Umfasst der Leiter die Fläche N -mal, dann ist auch der Induktionsspannungsstoß N -mal so groß. Daher lautet das

Induktionsgesetz: Der in einer Spule mit der Windungszahl N induzierte Spannungsstoß ist gleich dem Produkt aus der Windungszahl N und der zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses, der von der Spule umfasst wird.

$$\int_0^{t_1} u dt = N \Delta \Phi = N (\Phi_1 - \Phi_2) \quad (3.80)$$

Die Induktionsspannung zur Zeit t ist nach Differenzieren von G1. (3.80)

$$u_{\text{ind}} = N \frac{d\Phi}{dt} \quad (3.81)$$

Die Induktionsspannung wird oft mit negativem Vorzeichen angegeben. Dabei soll das negative Vorzeichen bedeuten, dass der induzierte Strom entgegengesetzt zu dem Strom im Rechtssystem Strom-Magnetfeld-Bewegung bei der magnetischen Kraftwirkung (s. Abschn. 3.3.2) fließt (Lenzsche Regel)¹⁾.

Die induzierte Spannung ist also nur von der Änderungsgeschwindigkeit des magnetischen Flusses abhängig. Die Änderung kann man sowohl durch Veränderung der vom Leiter umfassten Fläche A (z.B. Drehen, Verbiegen, Zusammenziehen) als auch durch eine zeitliche Änderung der magnetischen Induktion B (Änderung der magnetischen Erregung oder der Form des Feldes) erreichen²⁾.

Beispiel 21. Eine doppelte Drahtschleife ($N_2 = 2$) befindet sich im homogenen Feld zwischen zwei Spulen (Bild 3.68) von je $N_1 = 100$ Windungen und insgesamt $l = 20$ cm Länge. Durch die Spulen fließt der Strom $I = 1$ A. Steht die Schleife senkrecht zur Feldrichtung, so tritt durch ihre Fläche $A = 5$ cm² der magnetische Fluss

$$\Phi_{\text{max}} = AB = A \mu_0 H = A \mu_0 2 N_1 I / l = 6,28 \cdot 10^{-7} \text{ Vs}$$

Bildet die Normale der Schleifenebene den Winkel φ mit der Feldrichtung, so verringert sich der umfasste magnetische Fluss auf

$$\Phi = A \mu_0 H \cos \varphi = \Phi_{\text{max}} \cos \varphi$$

Schaltet man das Magnetfeld ab (s. Versuch 35), so entsteht ein induzierter Spannungsstoß

$$\int_{t=0}^{t_1} u dt = N_2 A \mu_0 \Delta H = N_2 \Delta \Phi = N_2 \Phi_{\text{max}} = 1,26 \cdot 10^{-6} \text{ Vs}$$

¹⁾ Genau genommen hängt das Vorzeichen vom sog. Zählpfeilsystem ab (s. [12], [14]). Das Vorzeichen der Induktionsspannung wird durch Zählrichtungen festgelegt.

²⁾ Die magnetische Induktion B kann auch durch Einbringen von Stoffen in das magnetische Feld verändert werden (s. Abschn. 3.3.5).

An Stelle der Änderung des Magnetfeldes durch Abschalten des Spulenstromes kann man auch die Schleife um 90° drehen (Versuch 37), und so erhält man den gleichen induzierten Spannungstoß

$$\int_{t=0}^{t_1} u \, dt = N_2 \mu_0 H A (\cos 0^\circ - \cos 90^\circ) = N_2 \Delta \Phi = N_2 \Phi_{\max} = 1,26 \cdot 10^{-6} \text{ Vs}$$

Vermindert man die magnetische Erregung oder verdreht man die Drahtschleife jeweils in der gleichen Zeit $t_1 = 0,5 \text{ s}$, so entsteht beide Male die gleiche Induktionsspannung

$$U_{\text{ind}} = 1,26 \cdot 10^{-6} \text{ Vs} / 0,5 \text{ s} = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ V}$$

Ist die Drahtschleife z.B. durch ein Galvanometer geschlossen, so fließt bei einem Widerstand $R = 1 \, \Omega$ im Leiterkreis der Induktionsstrom $I_{\text{ind}} = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ A}$.

Wirbelströme. Bewegt man einen ausgedehnten Leiter (z.B. eine Platte) zwischen den Polen eines starken Magneten, so werden im Leiter Induktionsströme erzeugt. Sie sind wie Wirbel geschlossen; deshalb nennt man sie Wirbelströme. Diese Wirbelströme wirken hemmend auf die Bewegung des Leiters im Magnetfeld (Lenzsche Regel). Der Körper lässt sich daher nur wie in einem zähen Medium bewegen. Bei dieser Bewegung wird Arbeit gegen die magnetischen Kräfte verrichtet und von den Wirbelströmen als Joulesche Wärme an den Körper abgegeben. Wirbelströme treten auch in ausgedehnten ruhenden Leitern, die sich in veränderlichen Magnetfeldern befinden, auf. Man kann sie dadurch vermeiden, dass man die Leiter aus vielen gegeneinander isolierten Teilen aufbaut (z.B. Lamellen der Transformatorkerne).

Anwendungen. Die Verknüpfung magnetischer und elektrischer Felder spielt in der Technik eine übertragende Rolle. Die Anwendungen der elektromagnetischen Induktion sind deshalb in einem gesonderten Abschnitt 3.3.8 zusammengefasst.

3.3.4.3 Selbstinduktion

□ **Versuch 38.** Ein Stromkreis (Bild 3.69) besteht aus einer Batterie 1 mit der Spannung U , einem Widerstand 2, einer Spule 3 und einem Schalter 4. Nach dem Einschalten erreicht der Strom nicht sofort seinen Endwert, sondern er steigt allmählich an. Das kann man auf einem Oszilloskop 5 beobachten, das die dem Strom proportionale Spannung am Widerstand 2 in Abhängigkeit von der Zeit aufzeichnet. □

Durch den ansteigenden Strom nach dem Einschalten entsteht in der Spule 3 ein Magnetfeld mit wachsendem magnetischen Fluss Φ . Infolge der Änderung $d\Phi/dt$ wird im Stromkreis eine der anliegenden Batteriespannung U entgegengesetzte Induktionsspannung u_{ind} induziert. Diese Induktionsspannung vermindert die Beschleunigung der Ladungsträger, d.h. der Stromanstieg wird verzögert (Lenzsche Regel). Eine solche Verzögerung tritt an sich bei jedem beliebigen Leiter auf. Bei Spulen ist sie wegen der großen Windungszahl besonders groß und daher gut zu beobachten, s. Gl. (3.81).

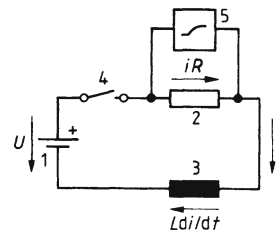


Bild 3.69 Gleichstromkreis mit Widerstand und Induktivität

Jeder Stromkreis wird vom magnetischen Fluss Φ des eigenen Feldes durchsetzt. Änderungen des Stromes rufen Änderungen dieses magnetischen Flusses hervor. Die dadurch induzierten Spannungen wirken den Stromänderungen entgegen.

In einem beliebigen Leiter ist die induzierte Spannung

$$u_{\text{ind}} = \frac{d\Phi}{dt} \quad (3.82)$$

Wenn das Magnetfeld des Leiterkreises nur vom Strom i dieses Kreises erzeugt wird, ändert sich der Induktionsfluss Φ proportional zum Strom i . Damit gilt:

Die durch Änderung des Stromes im eigenen Stromkreis induzierte Spannung ist proportional di/dt , mit einem Proportionalitätsfaktor L , also

$$u_{\text{ind}} = L \frac{di}{dt} \quad (3.83)$$

Definition: Die Proportionalitätskonstante L nennt man die Induktivität¹⁾ des Stromkreises. Sie hat die Dimension Spannung \times Zeit / Strom.

Die Einheit der Induktivität heißt Henry²⁾.

$$1 \text{ Henry} = 1 \text{ H} = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{A}} = 1 \Omega\text{s}$$

Von besonderer Bedeutung ist die Induktivität von Spulen. Die magnetische Erregung im Innern einer langen ($l \gg \sqrt{A}$) Spule mit dem Windungsquerschnitt A ist mit Gl. (3.68) $H = N I/l$. Wenn sich kein magnetischer Stoff (s. Abschn. 3.3.5) im Innern befindet, beträgt der magnetische Fluss $\Phi = \mu_0 H A$, und die Induktionsspannung ist

$$u_{\text{ind}} = u_L = \mu_0 A \frac{N^2}{l} \frac{di}{dt} = L \frac{di}{dt}$$

Somit ergibt sich für die

$$\text{Induktivität einer langgestreckten Spule } L = \mu_0 A \frac{N^2}{l} \quad (3.84)$$

Eine kreisförmige Leiterschleife mit dem Durchmesser d und dem Drahtradius r hat die Induktivität

$$L = \mu_0 \frac{d}{2} \left[\left(1 + \frac{r^2}{2d^2} \right) \ln \left(\frac{4d}{r} \right) - \frac{7}{4} + \frac{r^2}{6d^2} \right]$$

Die Induktivität eines Leiters hängt nur von dessen Geometrie ab, solange sich innerhalb der Leiterwindungen keine Materie befindet.

Spulen sehr geringer Induktivität erhält man, wenn man zwei gegensinnige Wicklungen verwendet (bifilare Wicklung), da sich die Magnetfelder beider Wicklungen aufheben. In dieser Weise sind z.B. Heizwendeln von Elektronenröhren gewickelt.

Einschalten von Strömen in Stromkreisen mit Induktivität. In dem Stromkreis (Bild 3.69) von Versuch 38 muss – wie in jedem Stromkreis – die Summe aller Spannungen Null

¹⁾ Auch Eigeninduktivität.

²⁾ Joseph Henry (1797 bis 1878).

sein. Die verschiedenen Spannungen sind hier die Batteriespannung U , die Spannung $u_R = R i$ am Widerstand R und die Spannung $u_L = L di/dt$ an der Spule L nach Gl. (3.83). Also gilt:

$$U - R i - L \frac{di}{dt} = 0 \quad (3.85)$$

Die Lösung dieser Diff.-Gl. (3.85) ergibt für das Anwachsen des Stromes vom Wert Null an (siehe z.B. [1])

$$i = \frac{U}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

Demnach nähert sich der Strom i asymptotisch dem (ohne Induktivität sofort vorhandenen) Wert $I = U/R$. Die Größe L/R heißt die Zeitkonstante τ des Stromkreises.

Beispiel 22. Im Stromkreis (Bild 3.69) ist die Batteriespannung $U = 10 \text{ V}$, der Widerstand $R = 10 \Omega$ und die Induktivität $L = 1 \text{ H}$. Der Strom wird zur Zeit $t = 0$ eingeschaltet. Den Verlauf des Stromanstiegs nach dem Einschalten zeigt Bild 3.70. Nach der durch die Zeitkonstante $\tau = L/R = 0,1 \text{ s}$ angegebenen Zeit $t = 0,1 \text{ s}$ ist der Strom auf $i_\tau = I - I/e = 0,63 \cdot U/R = 6,3 \text{ A}$ angestiegen.

Über die Vorgänge beim Ausschalten siehe Aufgabe 2 zu Abschn. 3.3.4.

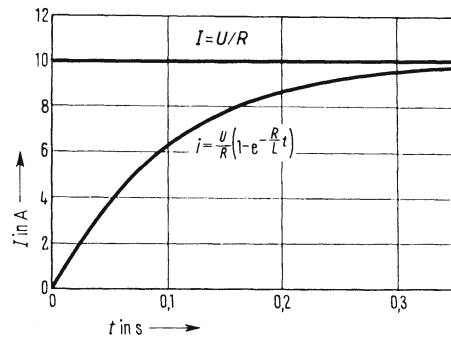


Bild 3.70 Stromverlauf beim Einschalten eines Gleichstromkreises

Energie des Magnetfeldes. Multipliziert man die Spannungen an Widerstand und Spule im Stromkreis in Bild 3.69 mit dem Momentanwert des elektrischen Stroms i , so erhält man die Momentanleistung

$$U i = R i^2 + L i \frac{di}{dt} = R i^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L i^2 \right)$$

Die der Stromquelle entnommene Leistung wird zur Erwärmung des Widerstandes ($R i^2$) und zur Änderung der Energie des Magnetfeldes ($L i di/dt$) aufgewendet. Die beim Einschalten (Stromänderung von $i = 0$ bei $t = 0$ bis $i = I$ bei $t = t_1$) gegen die induzierte Spannung vom Strom verrichtete Arbeit dient zum Aufbau des Magnetfeldes und ist in diesem als Energie des magnetischen Feldes enthalten. Beim Ausschalten (Stromänderung von $i = I$ bis $i = 0$) wird durch den Abbau des Magnetfeldes der gleiche Energiebetrag für die Energie des induzierten elektrischen Feldes frei. Diese Energie ist demnach

$$W = \int_0^{t_1} i u_{\text{ind}} dt = \int_0^{t_1} L i \frac{di}{dt} dt = \int_0^I L i di = \frac{1}{2} L I^2$$

Die Energie des magnetischen Feldes in einem Stromkreis mit der Induktivität L und dem elektrischen Strom I ist

$$W_{\text{magn}} = \frac{1}{2} L I^2 \quad (3.86)$$

Mit Gl. (3.56) und (3.84) beträgt die Energie pro Volumen im Magnetfeld im Innern einer langgestreckten Spule

$$w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N^2 A H^2 l^2}{N^2 l V} = \frac{1}{2} \mu_0 H^2$$

Definition: Der Quotient aus der Energie des Feldes W und dessen Volumen V heißt die Energiedichte w . Allgemein gilt für die Energiedichte des Magnetfeldes im materiefreien Raum:

$$w = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 = \frac{1}{2} B H \quad (3.87)$$

Wenn der Raum des Magnetfeldes materiefüllt ist, ändert sich die Energiedichte um den Faktor μ_r (s. Abschn. 3.3.5.1) auf

$$w = \frac{1}{2} \mu_0 \mu_r H^2 = \frac{1}{2} B H \quad (3.88)$$

Kraftwirkung eines Magneten auf einen Körper aus Weicheisen. In geringem Abstand von einem Dauermagneten (s. Abschn. 3.3.5.3) oder Elektromagneten befindet sich ein Stück magnetisch weiches Eisen (ähnlich Versuch 46) mit gleichem Querschnitt A wie der Magnet. Da der magnetische Fluss des Magneten das Eisen vollständig durchsetzt, wird dieses in der gleichen Weise magnetisch polarisiert wie der Magnet (s. Abschn. 3.3.5.3). Beide stehen sich also mit umgekehrter Polrichtung gegenüber und ziehen sich deshalb an. Hierbei ist B wegen des konstanten Querschnitts im Magneten, im Eisen und im Luftspalt gleich groß. Die Anziehungskraft F berechnet man am einfachsten, indem man sich vorstellt, man würde das Eisen um ein kleines Wegstück ds vom Magneten entfernen. Dabei wird die Arbeit $dW = F ds$ geleistet, welche eine Erhöhung der Feld-Energie im Spalt zur Folge hat. Diese ergibt sich mit der Energiedichte $w = 1/2 B H$ (vgl. Gl. (3.87) und (3.88)) zu $dW = w dV = w A ds$. Wegen $F ds = w A ds$ ergibt sich für die Anziehungskraft $F = A w = A 1/2 B H$ und, da im Luftspalt $B = \mu_0 H$ gilt (s. Abschn. 3.3.2.3),

$$F = A \cdot \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \quad (3.89)$$

3.3.4.4 Gegeninduktion

Durch die Änderung des Stromes ändert sich auch das den Leiter umgebende Magnetfeld. So, wie es beim Durchsetzen des eigenen Leiters eine Induktionsspannung hervorruft (Selbstinduktion), induziert es eine Spannung in einem anderen in der Nähe befindlichen Leiter. Die im benachbarten Leiter induzierte Spannung ist – wie die im eigenen – der Stromänderung proportional.

$$u_{\text{ind}} = M \frac{di}{dt}$$

Dabei ist M die Gegeninduktivität. Sie hängt von der Geometrie der Leiter selbst und ihrer Lage zueinander ab (wiederum ohne magnetische Stoffe) und ist besonders groß bei ineinander gewickelten Spulen. Ihre Einheit ist wie die der Induktivität 1 Henry.

Ändern sich die Ströme i_A und i_B in zwei benachbarten Leitern A und B, so erzeugen sie gegenseitig die Induktionsspannungen $u_{\text{ind A}} = M di_B/dt$ und $u_{\text{ind B}} = M di_A/dt$.

Aufgaben zu Abschn. 3.3.4

1. Wie groß ist die Induktivität einer Ringspule (innerer Radius r_1 , äußerer Radius r_2) mit 200 Windungen, wenn man sie als ringförmig gebogene lange Zylinderspule betrachtet?
2. Der Stromkreis (Bild 3.71 a) besteht aus den Widerständen $R_1 = 2 \Omega$, $R_2 = 100 \Omega$, der Spule mit

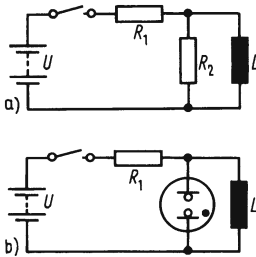


Bild 3.71
Zu Aufgabe 2

der Induktivität $L = 0,2 \text{ H}$ und der Batterie mit der Spannung $U = 12 \text{ V}$.

a) Man gebe den Strom in R_2 als Funktion der Zeit an, wenn zur Zeit $t = 0$ der Schalter geöffnet wird.

b) In Bild 3.71 b) ist an der Stelle des Widerstandes R_2 eine Glühlampe mit einer Zündspannung $U_Z = 110 \text{ V}$ zwischengeschaltet. Genügt die beim Öffnen des Schalters in der Zeit $t = 0,01 \text{ s}$ induzierte Spannung zum Zünden der Glühlampe?

c) Wie groß ist die zum Leuchten der Glühlampe zur Verfügung stehende Energie?

3. Die magnetische Induktion B eines Magneten ist $B = 1,2 \text{ T}$, sein Querschnitt $A = 10 \text{ cm}$. Wie groß ist die Kraft auf ein Weicheisenstück gleichen Querschnitts?

3.3.5 Materie im magnetischen Feld

Bisher haben wir magnetische Felder in Luft betrachtet. Der Einfluss von Luftmolekülen ist jedoch so klein, dass die Ergebnisse praktisch dieselben sind wie im Vakuum. Bringt man jedoch andere Stoffe in das Magnetfeld, so können sich die Verhältnisse unter Umständen deutlich ändern.

3.3.5.1 Magnetische Polarisation und Magnetisierung

Der Induktionsspannungsstoß $\int_0^t u_{\text{ind}} dt$ ist nach Gl. (3.80) der Änderung des magnetischen Flusses Φ direkt proportional. Verändert sich das Magnetfeld, so können wir dies also an der induzierten Spannung feststellen. Das nützen wir in den folgenden Versuchen aus.

□ **Versuch 39.** Mit Hilfe der Versuchsanordnung in Bild 3.66 bekamen wir am Schreiber an der Drahtschleife 2 einen induzierten Spannungsstoß, wenn wir den Strom in der Feldspule 1 vom Wert 0 auf den Wert I brachten. Den gleichen Spannungsstoß beobachteten wir, wenn wir bei konstantem Strom I die Drahtschleife 2 weit entfernten. Wir lassen nun wiederum den Strom I in der Feldspule 1 konstant und schieben in das Innere der Spule 1 einen Eisenkern. In der unbewegten Drahtschleife 2 erhalten wir während des Hineinschiebens des Eisenkerns einen um ein Vielfaches größeren Spannungsstoß gegenüber den Versuchen 34 bis 37. Einen ebenso großen entgegengesetzten Spannungsstoß erhalten wir beim Herausnehmen des Eisenkerns. □

□ **Versuch 40.** Bewegt man die Drahtschleife 2 im inhomogenen Feld der Feldspule 1 mit Eisenkern von dieser weg, so erhält man einen um ein Vielfaches größeren Induktionsspannungsstoß gegenüber dem gleichen Vorgang bei leerer Spule. □

Die Versuche 39 und 40 zeigen:

Eine stromdurchflossene Spule mit Eisenkern hat einen größeren magnetischen Fluss Φ als die gleiche Spule ohne Eisenkern mit dem Fluss Φ_0 .

In einer Drahtschleife wird durch die in der Zeit Δt erfolgte Änderung des magnetischen Flusses von Φ_0 auf Φ ein Spannungsstoß induziert. Er ist mit Gl. (3.80)

$$\int_0^{\Delta t} u_{\text{ind}} dt = N(\Phi - \Phi_0)$$

Der magnetische Fluss Φ_0 der stromführenden leeren Spule ist mit Gl. (3.75), (3.72) und (3.68)

$$\Phi_0 = A B_0 = A \mu_0 H = A \mu_0 N \frac{I}{l} \quad (3.89)$$

In dem rechten Ausdruck für Φ_0 stehen nur konstante Größen, die durch das Einbringen des Eisens nicht geändert werden. Es ändert sich jedoch der magnetische Fluss und – da die Fläche A konstant ist – die magnetische Induktion B um einen Faktor μ_r auf

$$\Phi = \mu_r \Phi_0 = \mu_r A B_0 = A B \quad (3.90)$$

$$B = \mu_r B_0 = \mu_r \mu_0 H \quad (3.91)$$

Den Faktor μ_r nennt man die Permeabilitätszahl¹⁾ eines Stoffes.

Definition: Die Permeabilitätszahl ist der Quotient aus der magnetischen Induktion B mit und dadurch in Materie und der magnetischen Induktion B_0 ohne Materie bei konstanter Erregung H .

$$\mu_r = \frac{B}{B_0} \quad (3.92)$$

So, wie die Dielektrizitätskonstante $\epsilon_r = D/D_0 = C/C_0$ ein Maß ist für die Erhöhung der elektrischen Erregung bei konstanter Spannung oder der Kapazität durch das Einbringen von Materie in einen Kondensator, ist die Permeabilitätszahl $\mu_r = B/B_0$ ein Maß für die Erhöhung der magnetischen Induktion B bei konstantem Strom durch das Einbringen von Materie in eine Spule.

Wie wir gesehen haben, erhöht sich durch das Eisen die magnetische Induktion B . Diese Tatsache ist so zu erklären, dass durch das Eisen zusätzliche magnetische Dipole in das Feld kommen. So, wie ein Nichtleiter (Dielektrikum) in das elektrische Feld zusätzliche Ladungen bringt, die durch elektrische Polarisation entstehen (s. Abschn. 3.1.3), bringt das Eisen zusätzliche magnetische Dipole ins magnetische Feld, die durch magnetische Polarisation entstehen. Das geschieht dadurch, dass sich im Eisen vorhandene, wahllos orientierte magnetische Dipole unter der Kraftwirkung des Magnetfeldes der Spule ausrichten (Näheres dazu s. Abschn. 3.3.5.4). Die so zusätzlich erzeugte magnetische Induktion ΔB ist

¹⁾ Statt Permeabilitätszahl liest man häufig auch (relative) Permeabilität.

$$\frac{\Delta\Phi}{A} = \frac{\Phi}{A} - \frac{\Phi_0}{A}$$

oder $\Delta\vec{B} = \vec{B} - \vec{B}_0$

Definition: Die durch Einbringen in ein Magnetfeld in einem Stoff entstandene zusätzliche magnetische Induktion nennt man magnetische Polarisation¹⁾

$$\vec{J} = \Delta\vec{B} = \vec{B} - \vec{B}_0 = \vec{B} - \mu_0\vec{H} \quad (3.93)$$

Die zusätzliche magnetische Induktion ΔB entspricht einer scheinbaren Erhöhung der magnetischen Erregung der Spule von \vec{H} auf \vec{B}/μ_0 .

Definition: Die Größe

$$\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H} = \frac{\vec{J}}{\mu_0} \quad (3.94)$$

nennt man Magnetisierung.

Bei den meisten Stoffen (mit Ausnahme der ferromagnetischen) ist die Magnetisierung proportional der Erregung, die sie hervorruft, bzw. die magnetische Polarisation ist der magnetischen Induktion proportional:

$$\vec{M} = \kappa\vec{H} \quad \text{bzw.} \quad \vec{J} = \kappa\mu_0\vec{H} \quad (3.95)$$

Definition: Man nennt die dimensionslose Proportionalitätskonstante κ die magnetische Suszeptibilität eines Stoffes.

Nur wenn die Magnetisierung der magnetischen Erregung proportional ist, hat \vec{B} die Richtung von \vec{H} , und es gilt: $\vec{B} = \mu_r\mu_0\vec{H}$.

Mit Gl. (3.91), (3.93) und (3.95) erhalten wir den Zusammenhang zwischen κ und μ_r wie folgt:

$$\kappa = \frac{J}{\mu_0 H} = \frac{B - B_0}{B_0} = \mu_r - 1$$

Bildet man den Quotienten aus magnetischer Suszeptibilität und der Dichte des Stoffes, so erhält man damit die

Definition:

Spezifische magnetische Suszeptibilität = $\frac{\text{magnetische Suszeptibilität}}{\text{Dichte}}$

$$\chi = \frac{\kappa}{\rho}$$

¹⁾ In der Elektrotechnik wird die magnetische Polarisation meist Magnetisierung genannt.

3.3.5.2 Dia- und Paramagnetismus

In Versuch 39 und 40 haben wir einen Kern aus Eisen in das Innere der Spule gebracht. Beim Hinein- und Herausbewegen konnten wir jeweils einen starken Induktionsspannungsstoß beobachten. Ein ähnliches Ergebnis bekommen wir, wenn wir einen Kern aus Nickel oder Kobalt oder bestimmten Legierungen dieser und auch anderer Metalle verwenden. Bei den meisten anderen Stoffen erhalten wir jedoch keinen Ausschlag. Sie scheinen unmagnetisch zu sein. Verwendet man hingegen eine Versuchsanordnung, die genauere Messungen zulässt, so stellt man fest, dass alle Stoffe in allen Aggregatzuständen magnetische Eigenschaften besitzen. Ihre Permeabilitätszahl weicht jedoch nur sehr wenig vom Wert 1 ab ($\mu_r \approx 1$). Dabei können wir neben der ersten, nach dem Eisen (lat. ferrum, Eisen) ferromagnetisch genannten Gruppe zwei weitere Gruppen unterscheiden:

1. Stoffe, deren Permeabilitätszahl μ_r wenig kleiner als 1 und deren magnetische Suszeptibilität χ geringfügig negativ ist, nennt man diamagnetisch.
2. Stoffe, deren Permeabilitätszahl μ_r wenig größer als 1 und deren magnetische Suszeptibilität χ geringfügig positiv ist, nennt man paramagnetisch.

Die magnetische Suszeptibilität ist sowohl bei den diamagnetischen ($\chi \approx -10^{-4}$ bis -10^{-9}) als auch bei den paramagnetischen Stoffen ($\chi = 10^{-5} \dots 10^{-3}$) sehr klein.

Tafel 3.72 gibt einige Werte.

Tafel 3.72 Magnetische Suszeptibilität χ einiger Stoffe bei Raumtemperatur

Diamagnetische Stoffe		Paramagnetische Stoffe	
Wismut	$-157 \cdot 10^{-6}$	Sauerstoff flüssig	$3600 \cdot 10^{-6}$
Blei	$-15,9 \cdot 10^{-6}$	Platin	$256 \cdot 10^{-6}$
Kupfer	$-9,65 \cdot 10^{-6}$	Wolfram	$67,5 \cdot 10^{-6}$
Wasser	$-9,05 \cdot 10^{-6}$	Aluminium	$24 \cdot 10^{-6}$
Stickstoff (20 °C)	$-0,006 \cdot 10^{-6}$	Tantal	$18,2 \cdot 10^{-6}$
Wasserstoff	$-0,002 \cdot 10^{-6}$	Sauerstoff (20 °C)	$1,8 \cdot 10^{-6}$

Diamagnetismus

□ **Versuch 41** (Bild 3.73). Ein an einem Faden aufgehängter kleiner Körper aus Wismut 1 wird in die Nähe des Nordpols 2 eines starken Magneten gebracht. Die Wismutkugel wird abgestoßen. Sie wird in den Bereich geringerer magnetischer Erregung abgedrängt. Die gleiche Erscheinung beobachtet man in der Nähe des Südpols. □

Diamagnetische Stoffe werden im magnetischen Feld zu magnetischen Dipolen, d.h. sie erhalten ein magnetisches Moment. Dabei ist der positive Pol des Dipols dem positiven Pol des äußeren Magnetfeldes zugewandt. Ähnlich wie beim elektrischen Dipol im inhomogenen elektrischen Feld (s. Abschn. 3.1.3.1) ist die Abstoßung des positiven Pols stärker als die Anziehung des negativen Pols.

Diamagnetische Stoffe werden im inhomogenen Magnetfeld in Richtung abnehmender Erregung abgedrängt.

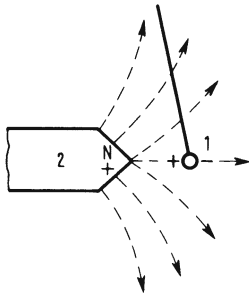


Bild 3.73 Verhalten einer diamagnetischen Kugel im inhomogenen Magnetfeld

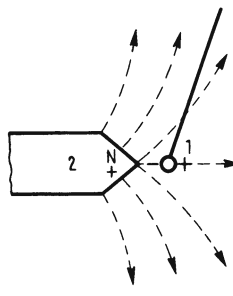


Bild 3.74 Verhalten einer paramagnetischen Kugel im inhomogenen Magnetfeld

Eine genauere Deutung des Diamagnetismus ist nur mit eingehenderen Kenntnissen der Vorgänge im Atom möglich. Dazu müssen unsere

Modellvorstellungen vom Aufbau der Materie verfeinert werden. In Abschn. 3.1.3.1 haben wir festgestellt, dass die Atome positive und negative Ladungen haben. Die positiven Ladungen sind im Inneren, im sog. Kern des Atoms. Die negativen Ladungen, die Elektronen, befinden sich in der sog. Atomhülle. Nach dem in Abschn. 6.1.2 näher beschriebenen Bohrschen Atommodell bewegen sich die Elektronen auf Kreisbahnen um den Kern. Ein Kreisstrom erzeugt jedoch ein Magnetfeld (Bild 3.50 b), das dem Feld eines zur Kreisebene senkrechten Magnetstabes entspricht. Damit stellt jedes kreisende Elektron einen magnetischen Dipol mit einem entsprechenden magnetischen Moment dar. Diese Dipole sind regellos verteilt, sodass nach außen kein magnetisches Moment auftritt. Ein äußeres Magnetfeld wirkt auf die Kreisströme ein, sodass sie geringfügig ändern. Dadurch entsteht dann ein dem äußeren Feld entgegengesetzt gerichtetes (Lenzsche Regel) magnetisches Moment, das die beschriebene magnetische Wirkung hervorruft. Diese Modellvorstellung passt für alle Atome.

Diamagnetisch sind alle Stoffe in allen Aggregatzuständen. Der Diamagnetismus tritt jedoch nur dann in Erscheinung, wenn er nicht durch die anderen stärkeren magnetischen Eigenschaften Paramagnetismus und Ferromagnetismus überdeckt wird.

Paramagnetismus

□ **Versuch 42** (Bild 3.74). Eine an einem Faden aufgehängte kleine Kugel 1 aus Platin oder Aluminium wird in der Nähe des Polschuhes 2 eines starken Magneten von diesem angezogen. Dieser Anziehung geht eine rasch vorübergehende Abstoßung voraus. Hält man die Kugel während dieser Abstoßung fest, so kann man die anschließende Anziehung, die andauert, beobachten. □

Die anfängliche Abstoßung der Kugel hat folgende Ursache: Bringt man die Kugel in das Magnetfeld, so werden in dieser Wirbelströme induziert, deren magnetisches Moment dem Feld entgegengesetzt gerichtet ist (Lenzsche Regel). Dieser Vorgang ist der Entstehung des Diamagnetismus vergleichbar, nur sind die hier induzierten Ströme makroskopische Wirbelströme der Leitungselektronen. Deshalb klingen sie wegen der Stromwärme rasch ab. Übrig bleibt ein konstantes magnetisches Moment, das offensichtlich dem Feld gleich gerichtet ist (Bild 3.74); denn paramagnetische Stoffe werden im inhomogenen Magnetfeld in Richtung zunehmender Feldstärke gezogen.

Paramagnetische Stoffe haben ein dem äußeren Feld gleich gerichtetes magnetisches Moment.

Dieses Moment ist also nicht induziert. Die Moleküle oder Atome der paramagnetischen Stoffe haben demnach einerseits zwar auch wie diejenigen diamagnetischer Stoffe ein induziertes, dem Feld entgegengesetztes magnetisches Moment, aber andererseits dazu noch ein permanentes magnetisches Moment in Richtung des Feldes. Dieses setzt sich zusammen aus permanenten magnetischen Momenten der Atome oder Moleküle. Ohne äußeres Magnetfeld heben sich diese durch die regellose Verteilung der Moleküle oder Atome auf. Im Magnetfeld werden sie jedoch mehr oder weniger – je nach der Stärke des Feldes – ausgerichtet, sodass daraus ein magnetisches Moment des Körpers resultiert. Meist ist diese Orientierung allerdings nur sehr gering. Eine völlige Ausrichtung wird auch in den stärksten herstellbaren Magnetfeldern nicht erreicht, da der Ausrichtung immer die regellose Wärmebewegung der Moleküle entgegen wirkt. Die mittlere thermische Energie eines Atoms mit magnetischem Dipolmoment ist bei Zimmertemperatur etwa 500 mal so groß wie diejenige Energie, die zum Drehen des Dipols aus der Lage senkrecht zum Feld in Feldrichtung erforderlich ist. Das macht verständlich, warum nur in der Nähe des absoluten Nullpunktes eine weitgehende Ausrichtung möglich ist. Zum tieferen Verständnis benützen wir wiederum

Modellvorstellungen. Neben ihrer Bewegung auf Kreisbahnen rotieren die Elektronen zusätzlich noch um ihre eigene Achse. Den Drehimpuls dieser Bewegung nennt man Spin. Damit verknüpft ist ein magnetisches Moment, das sog. Spinmoment. Diese Spinmomente der Elektronen eines Atomes oder Moleküls addieren sich nach besonderen, im atomaren Bereich gültigen Gesetzen zum magnetischen Moment des Atoms: Die Elektronen ordnen sich stets paarweise so, dass ihre Spinmomente entgegengesetzt sind, sich also aufheben (Pauli-Prinzip, s. Abschn. 6.1.2.2). Atome, bei denen sich die Spinmomente aller Elektronen kompensieren, besitzen demnach kein magnetisches Moment. Das ist z.B. bei allen Atomen mit abgeschlossenen Elektronenschalen der Fall. Stoffe, aus solchen Atomen aufgebaut, sind diamagnetisch. Stoffe aus Atomen, in denen die Spinmomente von einem oder mehr Elektronen unkompensiert bleiben, sind paramagnetisch. Ihr Paramagnetismus ist jedoch nur zu beobachten, wenn das magnetische Moment des Atoms größer ist als das vom äußeren Feld in den Elektronenbahnen induzierte Moment. Andernfalls wird Diamagnetismus beobachtet.

Die Atome paramagnetischer Stoffe haben ein permanentes magnetisches Moment. Die atomaren magnetischen Dipole werden im Magnetfeld in geringem Maße ausgerichtet. Die Magnetisierung ist der magnetischen Erregung proportional. Die magnetische Suszeptibilität paramagnetischer Stoffe ist der Temperatur umgekehrt proportional.

3.3.5.3 Ferromagnetismus

Dass Eisen und alle anderen ferromagnetischen Stoffe (z.B. Kobalt, Nickel) in der Nähe von Magnetpolen stark angezogen werden, ist allgemein bekannt. Die Versuche 39 und 40 haben gezeigt, dass ferromagnetische Stoffe in einem Magnetfeld dieses deutlich verän-

dern, da die magnetische Induktion B beträchtlich erhöht wird. Die magnetische Polarisation und die Magnetisierung ferromagnetischer Stoffe ist sehr groß. Die Permeabilitätszahl ferromagnetischer Stoffe liegt zwischen 100 und 100 000.

Magnetisierungskurve. Zur Ermittlung weiterer Eigenschaften ferromagnetischer Stoffe dienen die folgenden Versuche.

□ **Versuch 43.** Über einem geschlossenen Eisenkern 1 (Bild 3.75a) befinden sich die Feldspule 2 und die Induktionsspule 3. Wegen der Proportionalität von magnetischer Erregung und elektrischem Strom in der Spule 2 ist der am Strommesser 4 abgelesene Wert ein Maß für die magnetische Erregung. Der Strom wird nun schrittweise erhöht. Der bei der i -ten Erhöhung in der Spule 3 induzierte Spannungsstoß ist ein Maß für die zugehörige Änderung des magnetischen Flusses und – da die von Windungen umfassten Flächen sich nicht ändern – auch für die Änderung dB der magnetischen Induktion.

Die Summe des i -ten Spannungsstoßes und aller vorhergehenden Spannungsstöße (von der $(i-1)$ -ten, der $(i-2)$ -ten usw. Stromerhöhung) ist dann ein Maß für die magnetische Induktion B_i , die natürlich auch vorhanden wäre, wenn man die zugehörige magnetische Erregung H_i nicht in i Schritten, sondern auf einmal eingeschaltet hätte. Aber dann wären die Werte B_{i-1} , B_{i-2} usw. nicht bekannt. Auf diese Weise hat man die Abhängigkeit der magnetischen Induktion B von der magnetischen Erregung H erhalten.

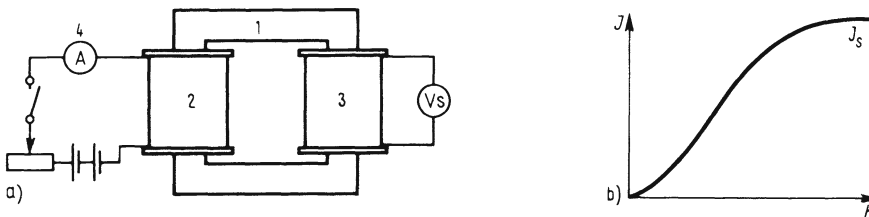


Bild 3.75 Aufnahme der Magnetisierungskurve eines Eisenkerns
a) Versuchsanordnung, b) Magnetisierungskurve

Wenn man von jedem Wert B_i der magnetischen Induktion die zugehörige magnetische Induktion ohne Materie $B_{0i} = \mu_0 H_i$ abzieht, erhält man die in Bild 3.75b gezeigte Abhängigkeit der zusätzlichen magnetischen Induktion B – das ist die magnetische Polarisation J im Eisen – von der magnetischen Erregung. Da die Magnetisierung M der magnetischen Polarisation J proportional ist, gibt die Kurve auch die Abhängigkeit der Magnetisierung M von der magnetischen Erregung wieder, man nennt sie deshalb Magnetisierungskurve. Bei ferromagnetischen Stoffen ist die Permeabilitätszahl $\mu_r \gg 1$. Deshalb ist $B \approx \Delta B = J = \mu_0 M$. □

Die magnetische Polarisation steigt anfangs gering, dann stärker mit wachsender magnetischer Erregung und nähert sich schließlich einem konstanten Wert J_s . Die Steigung der Tangente an die Magnetisierungskurve ist ein Maß für die Permeabilitätszahl des Eisens. Diese ist also im Gegensatz zu derjenigen paramagnetischer Stoffe nicht konstant. Es lässt sich außerdem zeigen, dass die Permeabilitätszahl auch von der Vorbehandlung (z.B. Verbiegen, Ziehen, Glühen, Gießen, Sintern) des Eisens abhängt.

Die Permeabilitätszahl ferromagnetischer Stoffe ist keine Konstante. Sie hängt von der magnetischen Erregung sowie von der Vorbehandlung des Materials ab. Die magnetische Polarisation J und damit auch die Magnetisierung M ferromagnetischer Stoffe zeigt mit steigender magnetischer Erregung eine Sättigung, während diese bei paramagnetischen Stoffen mit technisch realisierbaren Erregungen nicht erreicht wird.

Hysteresis. Die Magnetisierung von Eisen wurde in Versuch 43 (Bild 3.75) gemessen. Wir wollen diese Messung weiterführen:

□ **Versuch 44.** Verringert man nach Erreichen der Sättigungspolarisation J_s (Bild 3.76) die magnetische Erregung wieder schrittweise, so erhält man durch Messung der Induktionsspannungsstöße Werte der magnetischen Polarisation, die höher liegen als die entsprechenden Werte bei der erstmaligen Magnetisierung (Neukurve = gestrichelte Kurve in Bild 3.76). Selbst beim Strom Null ist noch eine Polarisation des Eisens $+J_R$ vorhanden. Erst nach Anlegen eines entgegengesetzt gerichteten Feldes durch Umpolen des Stromes lässt sich die Polarisation des Eisens beseitigen. □

Die Erscheinung, dass nach Abnahme der magnetischen Erregung auf den Wert Null noch die Polarisation J_R oder die Magnetisierung M_R vorhanden ist, nennt man Remanenz. Die zur völligen Aufhebung der Magnetisierung erforderliche, der Magnetisierungsrichtung entgegengesetzte magnetische Erregung nennt man Koerzitiv-erregung H_C .

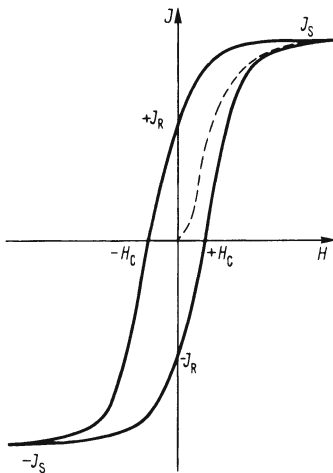


Bild 3.76 Hysteresisschleife

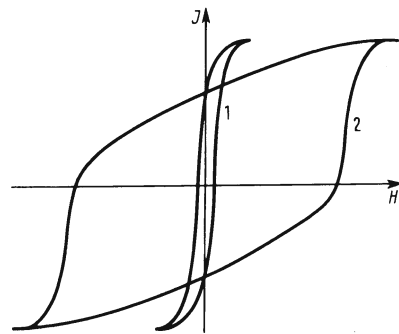


Bild 3.77 Hysteresisschleife eines magnetisch weichen (1) und eines magnetisch harten (2) Werkstoffes

□ **Versuch 45.** Erhöht man nach Erreichen der Koerzitiv-erregung die magnetische Erregung weiter, so erreicht man wiederum eine Sättigung der – gegenüber der ersten Magnetisierung nun entgegengesetzt gerichteten – magnetischen Polarisation. Bei anschließender

Verringerung der Erregung auf Null bleibt wiederum eine remanente Polarisation J_R vom gleichen Betrag, nur mit entgegengesetztem Vorzeichen, die durch Anlegen der Koerzitiv-erregung beseitigt wird. Nach weiterer Erhöhung der Erregung erreicht man wieder den ursprünglichen Sättigungswert. □

Die geschlossene Magnetisierungskurve nennt man Hysteresisschleife.

Die Form der Hysteresisschleife ist je nach Material stark unterschiedlich. Stark magnetisierbare Stoffe mit geringer Koerzitiv-erregung (Kurve 1 in Bild 3.77) nennt man magnetisch weich, da sie ihre magnetische Polarisation leicht verlieren (z.B. hat sehr reines Eisen, das ja auch mechanisch weich ist, diese Eigenschaften). Magnetisch weiche Stoffe werden überall da verwendet, wo die Magnetisierung den Änderungen der Erregung gut folgen soll (Elektroblech). Stoffe mit großer remanenter Polarisation und mit Koerzitiv-erregungen $> 10^4$ A/m (Kurve 2 in Bild 3.77) nennt man magnetisch hart, da sie ihre Magnetisierung erst durch starke Gegenfelder verlieren (z.B. hat gehärteter Stahl derartige Kurven). Sie dienen zur Herstellung von Dauermagneten.

Die Sättigung J_S der magnetischen Polarisation wird bei Eisen etwa mit der magnetischen Erregung $H_S = 10^5$ A/m erreicht. Bei Legierungen mit hoher Permeabilitätszahl μ_r liegt sie um ein bis zwei Größenordnungen darunter, bei magnetisch harten Werkstoffen etwas darüber. Durch starke Erschütterungen oder durch Erhitzen kann die Magnetisierung wieder rückgängig gemacht werden. Oberhalb einer bestimmten Temperatur verschwindet bei allen ferromagnetischen Stoffen der Ferromagnetismus vollständig. Die Stoffe sind dann paramagnetisch. Man nennt diese Temperatur die Curie-Temperatur¹⁾ des Materials. Sie liegt für Eisen bei 769 °C, für Nickel bei 360 °C und für Kobalt, je nach Reinheit, zwischen 1110 °C und 1130 °C.

Einerseits beobachtet man an Flüssigkeiten und Gasen keinen Ferromagnetismus. Andererseits gibt es Legierungen aus nicht ferromagnetischen Stoffen (z.B. manganhaltige Kupfer-

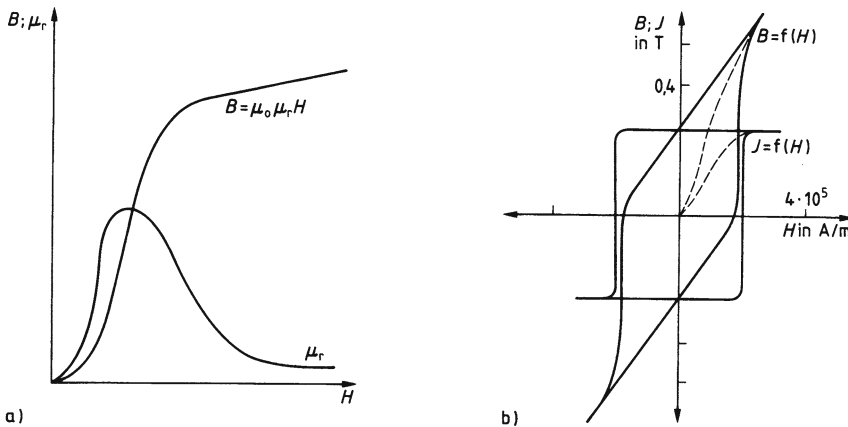


Bild 3.78 a) Magnetische Induktion B und Permeabilitätszahl μ_r in Abhängigkeit von der magnetischen Erregung H

b) Magnetisierungskurven $J(H)$ und $B(H)$ für einen magnetisch harten Werkstoff

¹⁾ Pierre Curie (1859 bis 1906).

legierungen, sog. Heuslersche Legierungen), die ferromagnetisch sind. Beide Tatsachen weisen darauf hin, dass der Ferromagnetismus keine Eigenschaft der Atome, sondern des kristallinen Festkörpers ist.

Misst man in Versuch 43 bis 45 die magnetische Induktion B an Stelle der magnetischen Polarisation J – z.B. mit Hilfe einer Hallsonde – so erhält man Kurven (Bild 3.78), die sich von den vorherigen in denjenigen Bereichen unterscheiden, in denen μ_r klein ist, also vor allem im Sättigungsbereich, in dem sie konstant, jedoch gering weiter ansteigen. In der Elektrotechnik ist diese Darstellungsart weit verbreitet.

Tafel 3.79 enthält die magnetischen Eigenschaften einiger ferromagnetischer Werkstoffe. Dabei ist μ_{ra} die Permeabilitätszahl bei sehr kleinen Erregungen, die sog. Anfangspermeabilitätszahl; die Maximalpermeabilitätszahl $\mu_{r \max}$ ist der größte Wert von $\mu_r = B/B_0$. Die remanente magnetische Induktion ist $B_R = J_R^{1)}$.

Tafel 3.79 Magnetische Eigenschaften einiger Stoffe bei Raumtemperatur

Bezeichnung	μ_{ra}	$\mu_{r \max}$	J_S in Vs/m ²	H_C in A/m
Magnetisch weiche Stoffe				
Eisen technisch rein	200...500	1000...7000	2,15	8...16
Stähle (0,2...0,4% C)	100	800...2000	2	5...20
Elektrobleche	150...2000	3000...60 000	2	10...50
Nickel-Eisen-Legierungen				
(z.B. Mu-Metall)	2000...100000	10000...300000	0,6...1,5	0,3...3
Ferrite	20...5000		0,2...0,4	
Bezeichnung			B_R in Vs/m ²	H_C in kA/m
Magnetisch harte Stoffe				
Chromstähle und Kobaltstähle			0,8...1	4...20
Ausscheidungsstähle (Fe, Ni, Al, Co) gesintert oder gegossen			0,7...1,3	15...160
Oxidmagnete (BaO, Fe ₂ O ₃) gesintert			0,2...3	100...160
Anisotrope Dauermagnete aus Seltenerdmetall und Kobalt			0,8...1	460...1200
Legierungen von Silber (Ag, Mn, Al) und Wismut (Bi, Mn)			0,04...0,4	300...400

Anwendungen. Magnetische Werkstoffe findet man in vielen Maschinen und Messgeräten, aber auch in zahlreichen Konsumgütern. Sie sind entweder metallisch und können z.B. gegossen, gewalzt oder gezogen sein, oder keramisch aus Pulvergemischen gepresst und gesintert.

Metallische weichmagnetische Stoffe werden als Kernmaterialien für Relais, Transformatoren, für Motoren und Generatoren sowie für magnetische Abschirmungen verwendet. Werkstoffe mit annähernd rechteckigen Magnetisierungskurven werden für spezielle Wandler (z.B. Zündwandler) und für Schalter eingesetzt. Weichmagnetische keramische Stoffe s. unter Ferrite Abschn. 3.3.5.5.

Hartmagnetische Werkstoffe. Unter den metallischen Materialien überwiegen die sog. AlNiCo-Werkstoffe, sehr reines Eisen mit verschiedenen Materialien zusammengeschmolzen. Keramische Hartferrite weisen niedrige remanente Induktion, aber hohe Koerzitivverregung auf. Wichtig für hartmagnetische Werkstoffe ist ein möglichst hoher Wert des Produktes aus B und zugehörigem H . Diese Größe $(BH)_{\max}$ umfasst bei Ausscheidungsstählen Werte zwischen 5 kJm⁻³ und 50 kJm⁻³, bei Werkstoffen aus Neodym-Eisen-Bor Werte bis 240 kJm⁻³.

¹⁾ In den Hysteresiskurven der Elektrotechnik ist oft an Stelle der magnetischen Polarisation J die magnetische Induktion B aufgetragen. Die Kurven unterscheiden sich im Anfangsbereich kaum, die magnetische Induktion zeigt jedoch wegen $B_0 \sim H$ keine Sättigung, sodass – auch wenn $\mu_r = 1$ wird – die Kurven mit der durch μ_0 gegebenen Neigung weiter ansteigen (Bild 3.78b).

Neodym-Eisen-Bor-Magnete besitzen eine remanente magnetische Induktion B_R von etwa 1,5 T. Mit dem bekannten Hochtemperatur-Supraleiter $YBa_2Cu_3O_7$, kurz YBCO (s.a. Abschn. 7.4.4), lassen sich bei der Temperatur 24 K Werte um 16 T und damit 100-mal so große Kräfte erreichen.

Hartmagnetische Werkstoffe findet man in Form von Dauermagneten in Lautsprechersystemen, als Haftmagnete, Kupplungen, an Stelle von Erregerfeldspulen von Motoren und Generatoren (z.B. Fahrraddynamo) und in elektrischen Messwerken.

Flüssigkeiten, die ferromagnetisch sind, gibt es nicht. Man kann aber stabile kolloidale Suspensionen ferromagnetischer Teilchen (z.B. Magnetit-Teilchen in einer Hülle amphiphiler polymerer Moleküle) herstellen, die echte Flüssigkeitseigenschaften aufweisen und ferromagnetisch sind, mit Sättigungsmagnetisierungen um 50 kA/m. Die Teilchen koagulieren und sedimentieren praktisch nicht. Solche Ferrofluide können überall da eingesetzt werden, wo eine Flüssigkeit leicht regulierbaren Kräften folgen soll. Im Luftspalt von Lautsprechern dienen sie zur Dämpfung, ebenso bei Schrittmotoren, Zeigermessgeräten und Beschleunigungsaufnehmern. Hauptanwendung sind Ventile ohne bewegte Teile. Bringt man nichtmagnetische Teilchen im Ferrofluid zum Schweben, so kann man dies zur Separierung von Teilchen anwenden.

3.3.5.4 Deutung des Ferromagnetismus

Die Wärmebewegung, die ein völliges Ausrichten der magnetischen Momente paramagnetischer Stoffe unmöglich macht, kann dies bei ferromagnetischen Stoffen offensichtlich nicht verhindern. P. Weiß¹⁾ deutete dies (1907) so, dass in vielen kleinen Bereichen – nach ihm Weißsche Bezirke genannt – die magnetischen Momente der Atome durch gegenseitige Wechselwirkung völlig parallel liegen. Da dieses Ausrichten von selbst geschieht, nennt man die so erfolgte Magnetisierung spontane Magnetisierung.

Jeder Bereich weist ein magnetisches Moment auf, das gleich der Summe der ausgerichteten atomaren Momente ist. Die magnetischen Momente der verschiedenen Weißschen Bezirke eines makroskopischen Körpers haben alle Richtungen im Raum (Bild 3.80a), sodass der Körper nach außen unmagnetisch ist. Unter der Einwirkung eines äußeren Magnetfeldes orientieren sich diese Bereiche jedoch mehr und mehr in Feldrichtung (Bild 3.80b), bis eine völlige Ausrichtung erreicht ist (Bild 3.80c). Die so erfolgte Magnetisierung heißt technische Magnetisierung. Die Orientierung erfolgt meist durch Wandverschiebung, d.h. durch ruckweises Wachsen der nahezu in Feldrichtung magnetisierten Bezirke auf Kosten der ungünstiger orientierten Nachbarn, selten auch durch Umklappen der magnetischen Momente eines ganzen Bezirkes in die Feldrichtung. Bei der

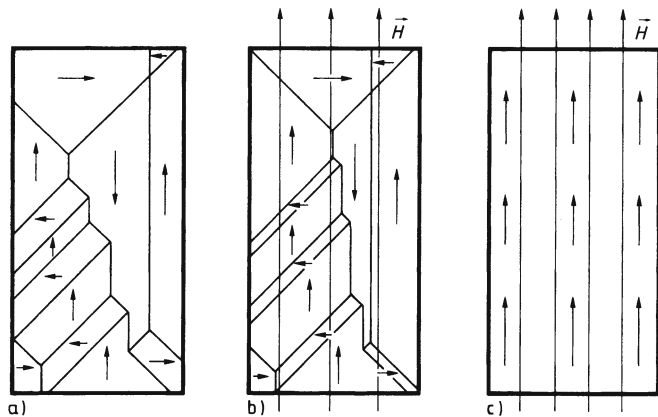


Bild 3.80 Weißsche Bezirke
a) unausgerichtet,
b) durch ein Magnetfeld
teilweise,
c) völlig ausgerichtet

¹⁾ Pierre Weiß (1865 bis 1940).

technischen Magnetisierung ist nicht die Temperaturbewegung zu überwinden, sondern allenfalls Widerstände, die in der Struktur des Kristalls liegen. Die Temperaturbewegung ist schon durch die spontane Ausrichtung überwunden.

Barkhausen-Effekt. Die Wandverschiebung Weißscher Bezirke zeigt der folgende

□ **Versuch 46.** Im Innern einer Spule, die an einen Verstärker mit Lautsprecher angeschlossen ist, befindet sich ein Eisendraht. Nähert man einen starken kleinen Dauermagneten dem aus der Spule herausragenden Draht, so hört man im Lautsprecher ein Prasseln (Barkhausen-Effekt¹⁾). □

Der Versuch 46 zeigt, dass die magnetische Polarisierung des Eisendrahtes im Feld des Permanentmagneten nicht kontinuierlich geschieht. Immer wenn ein Bereich sich ruckartig erweitert, entsteht auf Grund des sprunghaft geänderten magnetischen Flusses in der Spule ein Induktionsspannungsstoß. Die unregelmäßige Folge solcher Spannungsschübe erzeugt im Lautsprecher das prasselnde Geräusch. Zur Erklärung der besprochenen Effekte wollen wir wiederum

Modellvorstellungen zu Hilfe nehmen. Die Elektronen sind im Schalenmodell des Atoms (s. Abschn. 6.1.2) so angeordnet, dass sich maximal 2 auf der innersten (K-)Schale, 8 auf der folgenden (L-), 18 auf der dritten (M-) und 32 auf der vierten (N-)Schale befinden können. Mit zunehmender Ordnungszahl werden die Schalen von innen nach außen aufgefüllt. Bei den Elementen mit den Ordnungszahlen 19 bis 30, darunter z.B. Eisen, Nickel und Kobalt, befinden sich aber bereits Elektronen in der vierten Schale, obwohl die dritte noch nicht voll ausgefüllt ist. Während in der ersten, zweiten und vierten Schale die Spins und damit die magnetischen Momente paarweise antiparallel stehen, befinden sich in der dritten Schale des Eisenatoms 4 (bei Kobalt 3, bei Nickel 2) Elektronen mit gleichgerichteten magnetischen Momenten. Das magnetische Moment der Atome dieser drei Metalle rührt also von mehr als einem Elektron her. Das würde jedoch nur bedeuten, dass sie besonders stark paramagnetisch wären. Zur Erklärung des Ferromagnetismus muss man zusätzlich annehmen, dass die magnetischen Momente vieler benachbarter Atome gleichgerichtet liegen. Heisenberg²⁾ hat unter Anwendung der Gesetze der Quantenmechanik gezeigt, dass eine derartige Parallelstellung der magnetischen Momente durch die gegenseitige Beeinflussung der Eisen-, Nickel- bzw. Kobaltatome zustande kommt, da diese Einstellung mit einem besonders niedrigen Energieinhalt verbunden ist. Bei höheren Temperaturen kann durch die thermische Energie der Atome die Parallelstellung der magnetischen Momente der benachbarten Atome aufgehoben werden. Bei Erreichen der Curie-Temperatur ist dies für alle Atome der Fall.

Voraussetzung für das Auftreten spontaner Magnetisierung ist ein hoher geometrischer Ordnungsgrad im Kristallverband. Ferromagnetismus ist daher nur in festen Körpern mit einer Gitterstruktur möglich. Dabei spielt z.B. der Abstand der Atome eine wichtige Rolle. In einer geeigneten Anordnung bilden auch para- und diamagnetische Atome einen ferromagnetischen Festkörper (wie die bereits erwähnten Heuslerschen³⁾ Legierungen).

Magnetostraktion. Die Magnetisierung ist mit einer geringfügigen Änderung der Atomabstände verbunden. Die Volumenänderung der Kristalle durch Magnetisieren nennt man

¹⁾ Heinrich Georg Barkhausen (1881 bis 1956).

²⁾ Werner Karl Heisenberg (1901 bis 1976).

³⁾ Fritz Heusler (1866 bis 1947).

Magnetostriktion. Die relativen Längenänderungen bei Sättigungsmagnetisierung, die positiv (Fe) oder negativ (Ni) sein können, liegen bei Nickel- und Eisenlegierungen in der Größenordnung 10^{-5} , bei sog. Kobalt-Eisen-Ferriten zwischen $2 \cdot 10^{-4}$ bis $7 \cdot 10^{-5}$.

Anwendungen. Mit magnetostriktiven Ultraschallgebern lassen sich Schallwellen mit Intensitäten bis 10^5 W/m^2 erzeugen.

Riesenmagnetowiderstand. Dieser engl. Giant Magneto-Resistance GMR genannte Effekt beruht auf der Erscheinung, dass die Bewegung elektrischer Ladungen wesentlich vom magnetischen Zustand der Elektronen, also von deren Spinrichtung bestimmt wird. Werden zwei ferromagnetische Schichten z.B. durch eine nur etwa 2 nm dünne nichtferromagnetische Schicht (z.B. Cr) getrennt, so richtet sich die Magnetisierung in den ferromagnetischen Schichten antiparallel aus. Wird sodann durch ein äußeres Magnetfeld eine Parallelstellung beider Magnetisierungsrichtungen erzwungen, sinkt erstaunlicherweise der elektrische Widerstand in den magnetischen Schichten. Diese Widerstandsänderung ist dabei unabhängig von der Orientierung des Magnetfeldes zum Strom und überraschend groß (ca. 200 %). Ein ähnliches Verhalten zeigt sich auch, wenn die nichtmagnetische Struktur nicht als Schicht, sondern in einer Matrix verteilt auftritt.

Die Bezeichnungen für diesen und verwandte Effekte sind etwas verwirrend. Zusammenfassend spricht man von einem x -beliebigen Magnetowiderstand (XMR) als Oberbegriff für diese Widerstandsphänomene.

Anwendungen. Die Kennlinien des elektrischen Widerstandes und deren Abhängigkeit vom Magnetfeld bei den verschiedenen XMR-Effekten sind unterschiedlich in Steilheit und Hysterese, sodass es möglich ist, durch geeigneten Aufbau Bauelemente mit dem jeweils gewünschten Verhalten für die Anwendung als Sensoren und Speicher herzustellen. Sensoren werden benützt, um z.B. Weg, Winkel und Drehzahl in beweglichen mechanischen Systemen zu messen. In Festplattenlaufwerken können solche Elemente für Leseköpfe hoher Empfindlichkeit und Ortsauflösung eingesetzt werden. Ähnlich ist die Anwendung in mikro- und nanoskaligen Speichern. Mit dem Bau von aktiven elektronischen Bauelementen (Spintransistoren) eröffnen sich Anwendungen im Rahmen einer neuen Nanoelektronik.

3.3.5.5 Antiferro- und Ferrimagnetismus

Neben der parallelen Anordnung der magnetischen Momente benachbarter Atome bei der spontanen Magnetisierung gibt es auch die Möglichkeit der paarweise antiparallelen Einstellung. Diese nennt man Antiferromagnetismus. So ordnen sich z.B. die Manganionen im Gitter des Manganoxids paarweise antiparallel. Die Substanz ist spontan magnetisiert und zeigt nach außen Diamagnetismus. Bei Überschreiten einer der Curie-Temperatur entsprechenden sog. Néel-Temperatur¹⁾ verschwindet die spontane Magnetisierung, die Substanz ist dann paramagnetisch. Eine Reihe von Verbindungen, vor allem die Oxide von Eisen, Mangan, Chrom u.a. sind antiferromagnetisch.

Wenn sich in einem Gitter ungleiche magnetische Momente von Ionen paarweise antiparallel stellen, so heben sich die magnetischen Momente nicht auf. Diese Erscheinung nennt man Ferrimagnetismus. Ferrimagnetische Substanzen, genannt Ferrite, bestehen aus zusammengesinterten Oxiden von Eisen, Nickel, Mangan, Zink und Cadmium. Die Ferrite haben im Gegensatz zu den metallischen ferromagnetischen Stoffen einen sehr hohen spezifischen elektrischen Widerstand ($\rho \approx 10^6 \Omega\text{cm}$).

Anwendungen. Da wegen des hohen elektrischen Widerstandes bei Ferriten Wirbelströme (s. Abschn. 3.3.4.2) praktisch nicht auftreten, werden sie vor allem als Kerne für Spulen in der Hochfrequenztechnik (bis ca. 5 MHz) verwendet. Ihre Anfangspermeabilitätszahl beträgt bis 2000.

¹⁾ Louis Néel (1904 bis 2000).

Aufgaben zu Abschn. 3.3.5

1. Eine 20 cm lange Spule mit 100 Windungen wird vom Strom 10 A durchflossen. Der Innenraum der Spule, die den Innenquerschnitt 2 cm^2 hat, ist ganz mit einem Kern aus Elektroteblech (Magnetisierungskurve s. Bild 3.81) ausgefüllt. Zu berechnen sind a) die magnetische Induktion B im Eisen, b) die Permeabilitätszahl des Eisens, c) die Energie des Magnetfeldes der Spule.

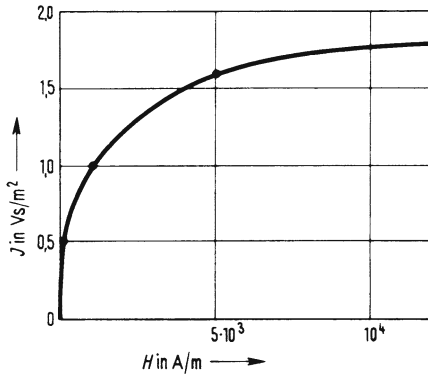


Bild 3.81 Magnetisierungskurve eines Elektroteblechs

2. Ein Überstromrelais (Bild 3.82) besteht aus der Spule 4 und dem Eisenkern 2 mit dem beweg-

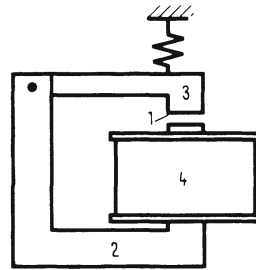


Bild 3.82 Zu Aufgabe 2

lichen Joch 3. Das Joch wird angezogen (und damit z.B. ein Kontakt gelöst), wenn im Luftspalt 1 die Induktion $0,5 \text{ Vs/m}^2$ herrscht. Die Querschnitte des Kerns 2 und des Luftspaltes 1 sind 1 cm^2 , der des Jochs 3 ist $0,5 \text{ cm}^2$. Die Länge des Kerns ist 10 cm, die des Jochs 4 cm und die des Luftspaltes 0,3 cm.

Wie groß ist a) der erforderliche magnetische Fluss, b) die Induktion B im Kern und im Joch, c) die magnetische Erregung im Luftspalt 1, d) wie viele Windungen muss die Spule 4 haben, wenn das Relais beim Strom 6 A auslösen soll? Dazu berechnet man die Summe der magnetischen Spannungen der drei Abschnitte und erhält so die magnetische Spannung $U_{\text{magn}} = IN$ der Spule.

3.3.6 Verknüpfung von elektrischen und magnetischen Feldern, Maxwell'sche Gleichungen

In Abschn. 3.3.4 haben wir folgende Einzelheiten über die Verknüpfung von elektrischen und magnetischen Erscheinungen kennengelernt:

1. Ein elektrischer Strom ruft ein Magnetfeld hervor.
2. Ein sich zeitlich änderndes Magnetfeld ruft im davon erfassten Leiter oder bei sonstigen freien Ladungsträgern einen elektrischen Strom hervor.

Beide Aussagen beschränken sich auf Ströme von Ladungsträgern in Leitern oder im Vakuum. Sie zeigen nicht den ganzen Umfang der Verknüpfung beider Felder. Mit Hilfe der in diesem Abschnitt vorgestellten Gleichungen gelingt es, Felder im Raum zu beschreiben, die unabhängig von felderzeugenden Ladungen sind.

Zweite Maxwell'sche Gleichung

Da die elektromagnetische Induktion das bekanntere Phänomen ist, wollen wir mit dieser zur 2. Maxwell'schen¹⁾ Gleichung führenden Erscheinung beginnen und die 1. Maxwell'sche Gleichung anschließend behandeln.

¹⁾ James C. Maxwell (1831 bis 1879).

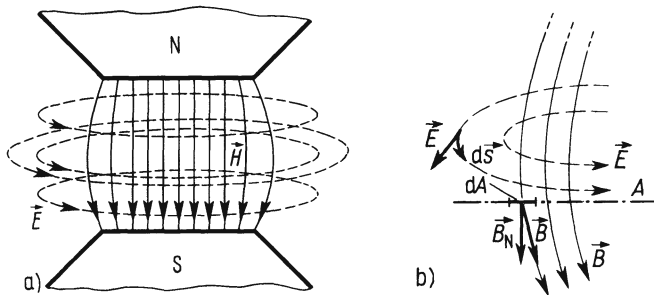
Die Versuche zur elektromagnetischen Induktion in Abschn. 3.3.4 brachten u. a. folgendes Ergebnis: Ändert sich ein Magnetfeld, das von einer durch einen Spannungsmesser geschlossenen Leiterschleife umfasst wird, so fließt darin ein Induktionsstrom. Aus der zugehörigen Feldstärke E erhält man die Induktionsspannung

$$u_{\text{ind}} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{d\Phi}{dt} = A \frac{dB}{dt} \quad (3.96)$$

Demnach wirkt auf alle Ladungsträger im Leiter eine Kraft oder mit anderen Worten: es herrscht ein elektrisches Feld, das vom veränderlichen Magnetfeld „induziert“¹⁾ wurde. Für die Existenz dieses Feldes ist die Anwesenheit der Ladungsträger (im Leiter oder im Vakuum) nach Maxwells Überlegungen unwesentlich; sie zeigen es durch ihre Bewegung oder durch die Induktionsspannung nach Gl. (3.96) nur an. Im Gegensatz zu allen bisher behandelten elektrischen Feldern, deren Feldlinien am Sitz von Ladungen beginnen und enden, hat dieses im Raum induzierte elektrische Feld jedoch in sich geschlossene Feldlinien, es ist ein sog. elektrisches Wirbelfeld (Bild 3.83a).

Bild 3.83

- a) Elektrisches Wirbelfeld \vec{E} (---) das um ein sich änderndes Magnetfeld mit der Erregung \vec{H} (—) entsteht
 b) Zur 2. Maxwellschen Gleichung



Ein sich zeitlich änderndes Magnetfeld induziert im Raum ein elektrisches Feld mit in sich geschlossenen Feldlinien, ein elektrisches Wirbelfeld.

In Bild 3.83b ist ein Teil des inhomogenen Magnetfeldes vergrößert dargestellt, mit der Teilspur einer Fläche A , die vom gesamten Magnetfeld durchsetzt wird. Die magnetischen Feldlinien geben wegen $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ Gl. (3.73) auch die Richtung von \vec{B} an. Wie schon in Bild 3.60 und Gl. (3.75) gezeigt, ist der gesamte, diese Fläche A durchsetzende Fluss, als Summe aller Teilflüsse $d\Phi = B_N dA$, gleich $\Phi = \int_A B_N dA$ ²⁾. Die um das sich ändernde Magnetfeld entstehende Induktionsspannung ist dann

$$u_{\text{ind}} = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \int_A B_N dA = \frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Damit erhalten wir den Zusammenhang zwischen der zeitlichen Änderung dB/dt des Magnetfeldes und der Feldstärke E des entstehenden elektrischen Wirbelfeldes, die

¹⁾ Lat.: inducere = einführen.

²⁾ \vec{B}_N ist hier die Normalkomponente der magnetischen Induktion, also die auf der Fläche dA senkrecht stehende Komponente von \vec{B} .

2. Maxwell'sche Gleichung

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_A B_N dA = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (3.97)$$

Wir schreiben in Gl.(3.97) das negative Vorzeichen, weil nach der Lenzschen Regel die Stromdichte $\vec{S} = \kappa \vec{E}$ (Gl. (3.42)) in einem die Fläche A umfassenden Leiter so gerichtet ist, dass der damit verbundene Strom der von außen eingepprägten Flussänderung entgegenwirkt.

Fließt als Folge des induzierten elektrischen Feldes in einem geschlossenen Leiterkreis (oder im Vakuum) ein Induktionsstrom, so entsteht dadurch ein sekundäres Magnetfeld, das nach der Lenzschen Regel dem ursprünglichen entgegengesetzt gerichtet ist (s. hierzu Abschn. 3.3.4.1).

Erste Maxwell'sche Gleichung

Beim Auf- und Entladen eines Kondensators bzw. beim Anlegen einer Wechselspannung fließt im Stromkreis ein Strom. Dieser kommt zustande im Leiter durch die Bewegung von Elektronen, im Dielektrikum des Kondensators durch die Verschiebung der Ladungen (Verschiebungspolarisation (s. Abschn. 3.1.3.1)). Dieser Verschiebungsstrom ist wie der Leiterstrom definiert als $I = dQ/dt$. Hierbei ist Q die Ladung, die sich auf den Platten mit je der Fläche A befindet. Diese bewirkt im Kondensator die Feldstärke

$$E = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_r} = -\frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r A}$$

Wir betrachten dabei nur den homogenen Bereich des elektrischen Feldes.

Die zeitliche Änderung der Ladung bewirkt die zeitliche Änderung der Feldstärke

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{dQ}{dt \epsilon_0 \epsilon_r A}$$

Auch wenn der Raum evakuiert ist und sich die Ladung auf den Platten ändert, ändert sich selbstverständlich die Feldstärke

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{dQ}{dt \epsilon_0 A}$$

Wir erwarten daher, dass ebenso wie um den Leiterstrom I auch um den Verschiebungsstrom im Kondensatorfeld – zur besseren Unterscheidung bezeichnen wir ihn mit

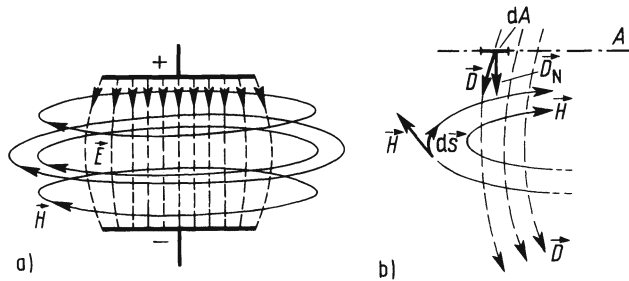
$$I_D = \frac{dQ}{dt} = \frac{dE}{dt} \epsilon_0 \epsilon_r A \quad \text{– ein Magnetfeld entsteht. Tatsächlich lässt es sich dort auch nach-$$

weisen. Seine Feldlinien sind konzentrische Kreise (Bild 3.84a). Also ist der ganze Stromkreis einschließlich des Raumes zwischen den Kondensatorplatten vom Magnetfeld umschlossen.

Ein sich zeitlich änderndes elektrisches Feld erzeugt im Raum ein magnetisches Feld mit in sich geschlossenen Feldlinien, ein sog. magnetisches Wirbelfeld.

Bild 3.84

- a) Magnetfeld mit der Erregung \vec{H} (—), das um ein sich änderndes elektrisches Feld \vec{E} (- - -) entsteht
 b) Zur 2. Maxwellschen Gleichung



In Bild 3.84b ist ein Teil des inhomogenen elektrischen Feldes vergrößert dargestellt, mit der Teilspur der Fläche A , die vom gesamten elektrischen Feld durchsetzt ist. Wegen $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ (Gl. (3.8)) kann das Feld ebenso durch \vec{D} -Linien, wie durch \vec{E} -Linien veranschaulicht werden. Der Verschiebungsstrom I_D ist gleich der Summe aller Teilströme $dI_D = d/dt (D_N dA)$, die durch die Fläche A hindurchgehen, also

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dQ}{dt \epsilon_0 A}$$

Hierbei gilt

$$I_D = \frac{dQ}{dt} = A_{\text{Kond}} \frac{dD}{dt}$$

Damit und mit Gl. (3.70) und (3.72) erhalten wir den Zusammenhang zwischen dem Verschiebungsstrom und dem durch ihn erzeugten Magnetfeld

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \frac{d}{dt} \int_A D_N dA^{1)} = \mu_0 \frac{d}{dt} \int_A \vec{D} \cdot d\vec{A} \quad \text{Durchflutungsgesetz} \quad (3.98)$$

Berücksichtigt man, dass das magnetische Wirbelfeld um jeden Teil eines Stromkreises entsteht, so erhält man folgende Form:

1. Maxwellsche Gleichung

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 (I + I_D) = \mu_0 \left(I + \frac{d}{dt} \int \vec{D} \cdot d\vec{A} \right) \quad (3.99)$$

Dabei kann $I = 0$ sein, wie im Raum zwischen den Kondensatorplatten, oder $I_D = 0$ wie im Bereich der Zuleitungen, oder aber der Strom setzt sich aus beiden Anteilen zusammen, wie z.B. bei einem Kondensator mit einem verlustbehafteten²⁾ Dielektrikum.

¹⁾ D_N ist hier die Normalkomponente der elektrische Erregung, also die auf der Fläche dA senkrecht stehende Komponente von \vec{D} .

²⁾ In dielektrischen Werkstoffen fließt wegen ihres endlichen Widerstandes immer auch ein – meist sehr kleiner – (Verlust-)Wirkstrom (s. Abschn. 3.3.8).

Die Maxwell'schen Gleichungen stellen die theoretische Grundlage zur Beschreibung der Zusammenhänge zwischen statischen und zeitlich veränderlichen elektrischen und magnetischen Feldern dar. Insbesondere gilt dies für die in Abschn. 5.2.5.4 behandelten elektromagnetischen Wellen. Sie ermöglichen auch eine Berechnung der Lichtgeschwindigkeit (s. Abschn. 5.2.5.4).

Beispiel 23. Wir wollen das in Abschn. 3.3.2.2 schon angewendete Biot-Savartsche Gesetz mit Hilfe der 1. Maxwell'schen Gleichung herleiten. Eine Ladung dq (s. Bild 3.85) erzeugt nach Gl. (3.5) und Gl. (3.14) im Abstand r die elektrische Erregung $D = dq/(4\pi r^2)$ (s. Abschn. 3.1.2.5). Wenn sie sich in dem Zeitintervall dt um das Stück dx bewegt, ergibt sich an allen unter dem Winkel α gelegenen Punkten

eine zeitliche elektrische Flussänderung $d\psi_{el}/dt = \frac{d}{dt} \int_A D_N dA$.

Mit $B = \mu_0 H$ schreiben wir für Gl. (3.98)

$$\oint H ds = \frac{d}{dt} \int_A D_N dA$$

Durch Umformung erhält man

$$H \cdot 2\pi r \sin \alpha = \frac{d}{dA} \int_A D \sin \alpha dA \frac{dA}{dt} = D \sin \alpha \frac{dA}{dt}^{1)}$$

Es wird also wegen $dA = 2\pi r \sin \alpha dx$ (s. Bild 3.85)

$$H \cdot 2\pi r = \frac{dq}{4\pi r^2} 2\pi r \sin \alpha \frac{dx}{dt}$$

und mit $I = dq/dt$

$$H = \frac{I dx \sin \alpha}{4\pi r^2}$$

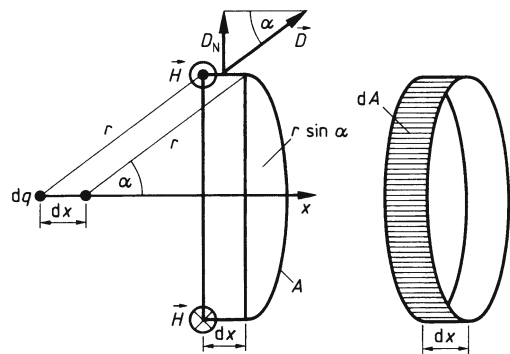


Bild 3.85

Aufgabe zu Abschnitt 3.3.6

- Im Raum zwischen 2 Kondensatorplatten ändert sich beim Aufladen die elektrische Feldstärke um $5 \cdot 10^8$ V/ms.
a) Wie groß ist die magnetische Induktion im Inneren des Kondensatorraumes 1,5 cm von der

Achse des Kondensators entfernt? b) Wie groß ist die magnetische Spannung zwischen zwei sich gegenüberliegenden Punkten auf einem Kreis mit dem Radius 50 cm, der das ganze Kondensatorfeld einschließt?

3.3.7 Vergleich der Größen des Gravitationsfeldes sowie des elektrischen und magnetischen Feldes

Mit dem Gravitationsfeld, dem elektrischen und dem magnetischen Feld haben wir drei Kraftfelder kennengelernt, von denen die beiden letzteren in enger Wechselwirkung zueinander stehen: Die zeitliche Änderung elektrischer Felder bedingt das Auftreten von Magnetfeldern und umgekehrt. Die Quellen des Gravitationsfeldes und des elektrischen Feldes sind die schwere Masse (auch: Gravitationsladung) bzw. die elektrische Ladung. Das Magnetfeld ist quellenfrei. Ein Körper mit der schweren Masse m_S , der elektrischen Ladung Q oder dem magnetischen Moment j hat entsprechende Kraftfelder um sich. Die Felder sind allein durch ihre Kraftwirkung feststellbar. Diese Kraftwirkung

¹⁾ $\frac{d}{dz} \int f(z) dz = f(z)$.

ist typisch für sie. Das Gravitationsfeld übt auf einen Körper mit der schweren Masse m_S eine Kraft aus, ebenso das elektrische Feld auf einen Körper mit der Ladung Q und das magnetische Feld ein Drehmoment auf einen Körper mit dem magnetischen Moment j .

	Größe		Einheit
Gravitationsfeld			
Quelle	schwere = träge Masse	m	kg (s. Abschn. 1.4.1)
Quellendichte	Massendichte	$\rho = m/V$	kg/m ³
Feldstärke	Gravitationsfeldstärke	$\vec{G} = \vec{F}_G/m$	N/kg = m/s ²
Potential		$\varphi_{\text{Grav}} = \frac{W_{\text{pot}}}{m}$	J/kg = m ² /s ²
Elektrisches Feld			
Quelle	elektrische Ladung	Q	As
Quellendichte	Raumladungsdichte	$\rho = Q/V$	As/m ³
	elektrische Erregung	$D = Q/A$	As/m ²
Feldstärke	elektrische Feldstärke	$\vec{E} = \vec{F}/Q$	N/(As) = V/m
Potential		$\varphi_{\text{el}} = \frac{W_{\text{pot}}}{Q}$	J/(As) = V
Grundgleichung		$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$	
Magnetisches Feld			
Quelle	keine Quellen!		
Feldgrößen	magnetische Erregung	$\vec{H} = \frac{\vec{M}}{j_C}$	N/(Vs) = A/m
	magnetische Induktion	$\vec{B} = \frac{\vec{F}}{Qv}$	N/(Am) = Vs/m ²
Grundgleichung		$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}$	

Die Felder sind jedoch auch vorhanden ohne die Anwesenheit der Masse, der Ladung oder des Magneten, an denen ihre Wirkung festgestellt wird. Die Kraft pro Masse oder pro elektrische Ladung ist die für die Stärke des Gravitationsfeldes oder des elektrischen Feldes charakteristische Größe, die jeweilige Feldstärke.

Im Magnetfeld wird das Drehmoment pro Coulombsches magnetisches Moment, die magnetische Erregung, oft auch Feldstärke genannt. Besser wäre es, die Kraft pro Ladung und Geschwindigkeit (Drehmoment pro Amperesches magnetisches Moment), die magnetische Induktion B , so zu nennen.

3.3.8 Anwendungen der elektromagnetischen Induktion

Die praktische Bedeutung der elektromagnetischen Induktion ist außerordentlich groß: So wird heute elektrische Energie überwiegend durch die Anwendung der Induktion (Generatoren) und umgekehrt mechanische Energie aus elektrischer nach dem gleichen Prinzip (elektrische Motoren) gewonnen.

Eine eingehende und umfassende Darstellung der Anwendungen der Induktion würde den Rahmen dieses Buches bei weitem übersteigen. Wir beschränken uns auf die Beschreibung einiger wichtiger Beispiele. (Näheres siehe [14]).

3.3.8.1 Wechselstrom- und Gleichstromgeneratoren

□ **Versuch 47.** Zwischen den Polen 1 eines Magneten (Bild 3.86) befindet sich die Spule 2, deren Enden über die Schleifringe 3 mit einem Spannungsmesser 4 verbunden sind. Dreht man die Spule in Pfeilrichtung um die Achse 5 um 180° , so zeigt das Instrument 4 einen Spannungsstoß an; dreht man um weitere 180° , so zeigt es einen gleich großen, aber entgegengesetzt gerichteten Spannungsstoß an (s. auch Versuch 37, S. 313). Ist das Innere der Spule mit Eisen gefüllt, entsteht ein wesentlich größerer Spannungsstoß. Wenn man die Spule mit konstanter Winkelgeschwindigkeit dreht, misst man mit einem Oszilloskop (s. Abschn. 3.2.6.1) den in Bild 3.87a dargestellten zeitlichen Verlauf der Spannung. □

Der Versuch zeigt, dass die induzierte Spannung periodisch ihr Vorzeichen wechselt. Der Generator (Bild 3.86) erzeugt also eine Wechselspannung.

Eine Spannung mit periodisch veränderlichem Vorzeichen nennt man Wechselspannung.

Nach Gl. (3.81) ist die in der Spule induzierte Spannung $u_{\text{ind}} = N d\Phi/dt$. Beim Drehen durchsetzt der magnetische Fluss $\Phi = BA \cos \varphi$ die Spule; dabei ist φ der Winkel zwischen der Richtung des Magnetfeldes und der Normalen der Windungsfläche der Spule (s.a. Beispiel 19, S. 306). Wird die Spule mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\omega = d\varphi/dt$ gedreht, so ist $\varphi = \omega t$. Damit ist mit $u_{\text{ind}} = d/dt(NAB \cos \omega t)$, also mit $|d/dt(\cos(\omega t))| = \omega \sin \omega t$ der Betrag der induzierten Spannung

$$u_{\text{ind}} = NAB \omega \sin \omega t$$

Die induzierte Spannung ändert sich demnach sinusförmig mit der Zeit.

Definition: Den Maximalwert

$$NAB \omega = \hat{u}$$

nennt man den Scheitelwert der Wechselspannung oder die Scheitelspannung. Damit wird

$$u_{\text{ind}} = \hat{u} \sin \omega t \tag{3.100}$$

Anstatt mit Hilfe der Winkelgeschwindigkeit ω (Winkel/Zeit) kann man die Umdrehung der Spule und die entstehende Wechselspannung auch mit Hilfe der Frequenz f ¹⁾ oder der Periode T beschreiben (s. Abschn. 5.1.1). In Bild 3.87a ist die Periode der Wechselspannung eingetragen. Aus Gl. (3.100) wird also

$$u_{\text{ind}} = \hat{u} \sin(2\pi ft) = \hat{u} \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right)$$

¹⁾ Das öffentliche Netz in Deutschland wird mit einer Wechselspannung der Frequenz 50 Hz betrieben, das Netz der Bundesbahn mit $16^{2/3}$ Hz. In den USA beträgt die Netzfrequenz 60 Hz.

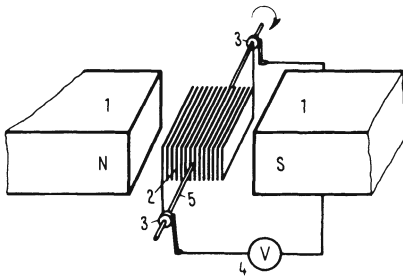


Bild 3.86 Prinzip eines Generators

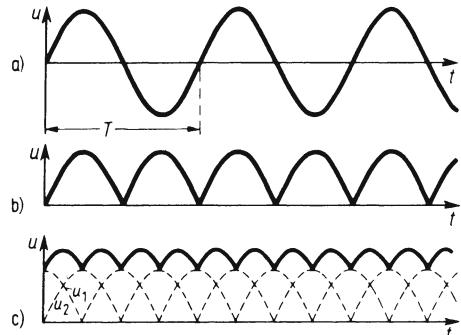


Bild 3.87 Spannungsverlauf zu den Versuchen 47 und 48

□ **Versuch 48.** Wenn man zum Kontaktgeben einen sog. Polwender (Bild 3.88a) verwendet, entsteht bei Drehung der Spule mit konstanter, gegenüber Versuch 47 nicht geänderter Winkelgeschwindigkeit eine pulsierende Gleichspannung (Bild 3.87b). Das Pulsieren geschieht mit immer größerer Frequenz und immer geringerer Amplitude, je mehr Spulen über einen sog. Kollektor (Bild 3.88b) angeschlossen sind. Sind z.B. 2 Spulen wie in Bild 3.88b angeschlossen, so entsteht eine Spannung u wie in Bild 3.87c. □

An Stelle des Permanentmagneten (1 in Bild 3.86) kann auch ein Elektromagnet treten, dessen Spulen an eine eigene Spannungsquelle angeschlossen sind. Sie können aber auch ohne äußere Spannungsquelle parallel (sog. Nebenschluss) oder in Serie (sog. Haupt- oder Reihenschluss) mit der Induktionsspule liegen: Wenn sich die Induktionsspule zu drehen beginnt, wird infolge des remanenten Magnetismus des Eisenkerns des Elektromagneten in der Spule eine Spannung induziert. Der dadurch in der Wicklung des Elektromagneten fließende Strom führt zu einer Erhöhung des Magnetfeldes und damit der Induktionsspannung in der Spule usw., bis die volle Spannung des Generators erreicht ist (dynamoelektrisches Prinzip von Werner v. Siemens, 1816 bis 1892).

Wenn der sich drehende Läufer (Rotor) aus einem Permanentmagneten besteht und die Spannung an den feststehenden Spulen (Stator) abgenommen wird, braucht man bei Wechselstromgeneratoren keine Schleifringe. Solche Generatoren sind besonders für hohe Drehzahlen geeignet.

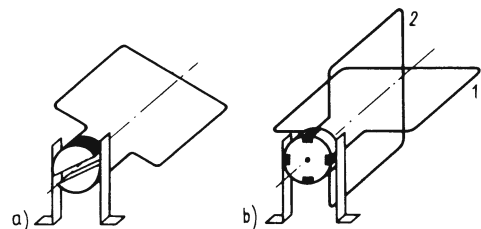


Bild 3.88

a) Polwender

b) Kollektor eines Gleichstromgenerators

Dynamische Mikrofone. Zur Umwandlung von Schallschwingungen (Abschn. 5.2.5.3) in elektrische Schwingungen dienen neben anderen auch sog. dynamische Mikrofone. Sie arbeiten im Prinzip wie die beschriebenen Generatoren. Beim Bändchenmikrofon wird durch den Schalldruck ein bandförmiger Leiter im Luftspalt eines Magneten bewegt. Die induzierte Wechselspannung schwankt im Rhythmus des Schalls. Beim Tauchspulmikrofon bewegt sich eine mit der Membran verbundene Spule im zylindrischen Spalt eines zylindrischen Magneten.

Induktive Messwertwandler. Zur Umwandlung mechanischer Größen, wie Kräfte, Beschleunigungen oder Geschwindigkeiten in elektrische Spannungen verwendet man sog. induktive Messwertgeber oder Messaufnehmer. Wie beim Mikrofon entsteht hier in einer Spule eine Spannung als Funktion der zu messenden mechanischen Größe.

3.3.8.2 Elektromotoren

Durch Umkehrung des Prinzips eines Generators erhält man einen Elektromotor. Es gibt Synchronmotoren mit konstanter, von der Frequenz der Spannung abhängiger Drehzahl, außerdem Asynchronmotoren, deren Drehzahl in Grenzen veränderlich ist, sowie Kollektormotoren mit in weitem Bereich veränderlicher Drehzahl.

Prinzip des Synchronmotors

□ **Versuch 49.** Legt man an die Schleifringe des Generators (Bild 3.86) eine Wechselspannung, so dreht sich die Spule mit der Frequenz der Wechselspannung, nachdem sie von Hand „angeworfen“ wurde. Wenn man die Wechselspannung mit einem Generator nach Bild 3.86 erzeugt, so kann man das synchrone Laufen des Generators und des Motors beobachten. □

Auf den Strom in der Läuferspule des Motors wirkt das Magnetfeld mit der Lorentzkraft (vgl. Gl. (3.78)). Diese zum Feld und zur Stromrichtung senkrecht angreifende Kraft erzeugt an der drehbaren Spule ein Drehmoment. Bei jeder Stellung der Spule muss dies ein Weiterdrehen zur Folge haben. Das ist der Fall, wenn die Spule nach Ablauf einer Periode der anliegenden Wechselspannung wieder in der Ausgangsstellung steht. Nach dem Herstellen des anfänglichen Gleichlaufs zwischen Motor und Generator (z.B. Wechselstromnetz), wofür es verschiedene Methoden gibt, z.B. das „Anwerfen“ in Versuch 49, läuft der Motor synchron weiter.

Prinzip des Kollektormotors

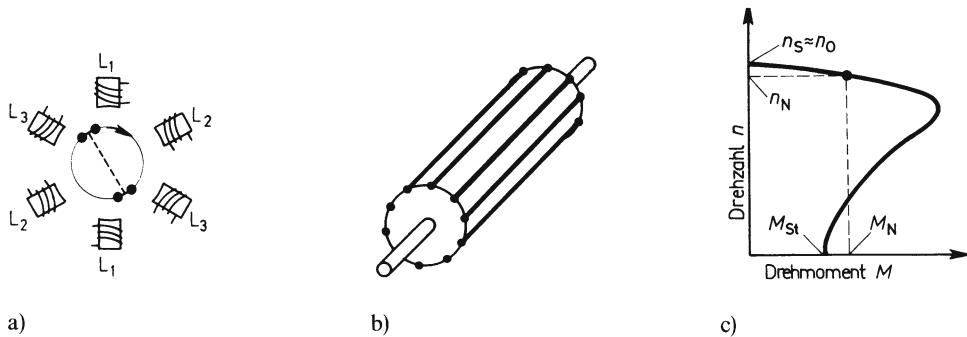
□ **Versuch 50.** Wenn man an den Generator über einen Polwender wie in Bild 3.88 eine Gleichspannung legt, dann rotiert die Spule. □

Auf die stromführende Spule im Magnetfeld wirkt durch die Lorentzkraft ein Drehmoment, die Spule dreht sich. Nach jeder halben Drehung wird durch den Polwender die Stromrichtung umgekehrt, sodass das Drehmoment dauernd die gleiche Richtung behält. Wenn bei stehendem Motor die Windungsfläche senkrecht zum Feld steht, läuft er nicht an (toter Punkt). Gleichmäßigen Lauf ohne toten Punkt erreicht man dadurch, dass der Rotor viele gegeneinander versetzte Spulen und einen entsprechend unterteilten Kollektor besitzt. Wie beim Generator kann auch beim Motor die Feldwicklung parallel oder in Serie zur Läuferwicklung liegen. Demgemäß spricht man von Nebenschluss- oder Reihenschlussmotoren. Während der Nebenschlussmotor weitgehend unabhängig von der Belastung eine annähernd konstante Drehzahl aufweist, ändert sich diese beim Hauptschlussmotor stark mit der mechanischen Belastung.

Asynchronmotor

Der Asynchronmotor (Bild 3.89) für den Anschluss an das Drehstromnetz (s. Abschn. 3.3.8.4) ist der mit Abstand häufigste Elektromotor.

Im einfachsten Fall sind 3 Feldwicklungen so verteilt (Bild 3.89a), dass durch die zeitlich gegeneinander verschobenen Spannungen des Drehstromnetzes ein umlaufendes Magnetfeld, ein sog. Drehfeld, entsteht. Der Läufer (Bild 3.89b) besteht meist aus Leiterstäben, die isoliert in den Nuten eines Blechpaketes liegen und an den Stirnseiten kurzgeschlossen sind (Kurzschluss- oder Käfigläufer).

**Bild 3.89** Asynchronmotor

a) Die drei Feldspulen L_1 , L_2 und L_3 liegen an den 3 Phasen des Drehstromnetzes (in der technischen Realisierung überlappen sich 3 Spulen stark, sodass sich jede über etwa 224° erstreckt). Vom Käfigläufer sind nur zwei Kurzschlusswindungen angedeutet.

b) Prinzip eines Käfig-(Kurzschluss-)Läufers

c) Drehzahl-Drehmoment-Kennlinie

n_N = Nenndrehzahl, n_s = Drehzahl des Erregerfeldes, sog. synchrone Drehzahl, M_N = Nenndrehmoment, M_{St} = Stillstandsmoment

Hält man den Läufer bei angeschlossenem Feld fest, so werden die kurzgeschlossenen Läufer Schleifen von dem umlaufenden Erregerfeld durchsetzt. Der dadurch in den Läufer Schleifen induzierte Strom verursacht eine (Lorentz-)Kraft, die den Läufer in die gleiche Richtung wie das umlaufende Feld in Drehung versetzt. Mit zunehmender Umdrehungsgeschwindigkeit des Läufers nähert sich dessen Drehzahl immer mehr derjenigen des Erregerfeldes (Bild 3.89c). Würde sie diese erreichen (synchroner Lauf), so würde der Induktionsstrom und damit das Drehmoment Null werden. Da jedoch auch für den leerlaufenden Motor wegen der unvermeidlichen Reibungsverluste ein dauerndes Drehmoment erforderlich ist, erreicht der Läufer nur eine Leerlaufdrehzahl, die gering unter der synchronen Drehzahl liegt. Die synchrone Drehzahl beträgt bei obiger Erregerfeldanordnung 3000 min^{-1} , bei Verdopplung, Verdreifachung, usw. der Spulenzahl die Hälfte, ein Drittel, usw. davon. Bei Belastung mit dem Nenndrehmoment läuft der Motor mit der Nenndrehzahl n_N , die je nach Motorleistung um 15% bis 20% (sog. Schlupf) unter der synchronen Drehzahl liegt.

Umformer

Mit einem mechanisch gekoppelten Motor und Generator kann man größere elektrische Leistungen umformen. So kann mit einem Wechselstrommotor und einem Gleichstromgenerator Wechselstrom in Gleichstrom umgewandelt werden. (Heute verwendet man dazu meist Diodengleichrichter s. Abschn. 3.2.2.3 und 7.4).

Prinzipiell ähnliche Geräte – jedoch zur Umwandlung elektrischer in mechanische Energie – sind z.B. das in Abschn. 3.2.1 beschriebene Drehspulinstrument und der dynamische Lautsprecher. Ersteres arbeitet im Grunde wie ein Gleichstrommotor. Doch dreht sich hier die Spule nur so weit, bis das von der Rückstellfeder erzeugte Drehmoment dem vom Magnetfeld auf die Spule ausgeübten Drehmoment entgegengesetzt gleich ist.

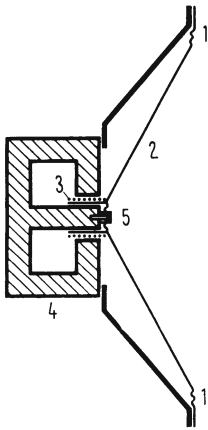


Bild 3.90 Dynamischer Lautsprecher

Die Umkehrung des dem dynamischen Mikrofon zugrundeliegenden Prinzips ergibt den dynamischen Lautsprecher (Bild 3.90). Eine weich aufgehängte (1) trichterförmig Membran 2 ist mit der Schwingespaltspule 3 verbunden. Diese ist im zylindrischen Spalt eines Dauermagneten 4 federnd zentriert (5). Je nach Stärke und Richtung des durch flexible Leitungen zugeführten Stromes wird die Spule 3 mehr oder weniger in das Feld hinein oder heraus bewegt.

Schwankt der Strom im Rhythmus der Sprache oder Musik (erzeugt durch ein Mikrofon mit Verstärker), so bewegt sich die Spule mit der Membran im gleichen Rhythmus. Die Membran regt die Luft zum Mitschwingen an.

3.3.8.3 Transformator

□ **Versuch 51** (Bild 3.91a). 2 Spulen gleicher Windungszahl 1 und 2 befinden sich auf einem geschlossenen Eisenkern 3. Verbinden wir die Spule 1 mit dem Wechselstromnetz von 230 V, so messen wir an der Spule 2 ebenfalls die Spannung 230 V. Verwenden wir als Spule 2 eine Spule mit halber bzw. mit doppelter Windungszahl, so messen wir die Spannung 115 V bzw. 460 V. □

Der in der Primärspule 1 fließende Wechselstrom mit der Frequenz $f = 50$ Hz ändert periodisch den magnetischen Fluss des Magnetfeldes der Spule. 50-mal in der Sekunde wächst er an, nimmt ab, wächst nach Vorzeichenumkehr der Spannung umgekehrt gerichtet an und nimmt dann wieder bis zum Wert Null ab. Durch den geschlossenen Eisenkern ergibt sich die gleiche magnetische Flussänderung in der Sekundärspule 2. Die in ihr induzierte „Sekundärspannung“ hat den gleichen Wert und sinusförmigen Verlauf wie die „Primärspannung“ (vorausgesetzt der Kern hat eine lineare J - H -Kennlinie).

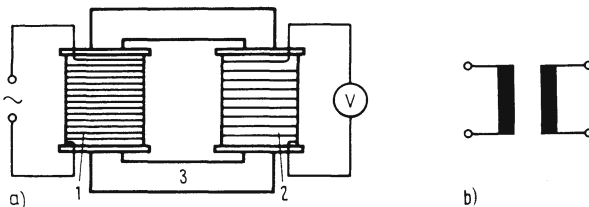


Bild 3.91 Prinzip (a) und Symbol (b) eines Transformators

Da die induzierte Spannung der Windungszahl der Induktionsspule proportional ist, kann der Wert der Primärspannung also sekundärseitig herauf- oder herabgesetzt, d.h. transformiert werden.

Zwei etwa durch einen Eisenkern miteinander induktiv gekoppelte Spulen nennt man einen Transformator.

Definition: Das Verhältnis der Windungszahlen eines Transformators nennt man dessen Übersetzungsverhältnis \ddot{u} . Wenn keine Leistung übertragen wird, ist es gleich dem Spannungsverhältnis

$$\frac{N_1}{N_2} = \ddot{u} = \frac{U_1}{U_2}$$

Transformatoren haben nur einen geringen Leistungsverlust, sodass wir schreiben können

$$P_1 = P_2 \quad \text{oder} \quad I_1 U_1 = I_2 U_2 \quad \text{und} \quad I_1 / I_2 = U_2 / U_1$$

Das Schaltungssymbol eines Transformators zeigt Bild 3.91b.

U und I sind sog. Effektivwerte, die in Abschn. 3.3.8.4 erklärt werden. Dort wird auch gezeigt, dass die Leistung bei Wechselstrom vom zeitlichen Zusammenhang zwischen Spannung und Strom abhängt.

Zur Verringerung der Wirbelstromverluste (s. Abschn. 3.3.4.2) werden die Kerne parallel zum magnetischen Fluss „lamelliert“, d.h. aus gegeneinander isolierten Blechen zusammengesetzt. Derartige Transformatoren sind bis zu Frequenzen um 50 kHz verwendbar. Für höhere Frequenzen werden zur Vermeidung von Wirbelstromverlusten Transformatoren mit Ferrit-Kernen oder ganz ohne Kern gebaut. Transformatoren gibt es für alle Spannungsbereiche. Die in Kraftwerken erzeugten Spannungen (6...20 kV) werden auf 50...400 kV hinauftransformiert, damit man die elektrische Leistung über große Entfernungen mit geringeren Verlusten (kleiner Strom ergibt geringe Stromwärme) übertragen kann. Schließlich werden sie wieder auf den in den öffentlichen Netzen üblichen Wert von 400 oder 230 Volt heruntertransformiert.

Messwandler sind Transformatoren mit sehr genau bekanntem Übersetzungsverhältnis und mit besonders kleinem Phasenfehler (s. Abschn. 3.3.8.4). Sie sind für die Übertragung nur kleiner Leistung ausgelegt und gestatten die Messung sehr hoher Spannungen und Ströme über die heruntertransformierten Werte.

3.3.8.4 Wechselstromkreise

Stromkreis mit Widerstand. Eine sinusförmige Wechselspannung bedingt in einem Stromkreis mit dem Wirkwiderstand R , dessen Induktivität verschwindend klein ist, den Strom

$$i = \frac{u}{R} = \frac{\hat{u} \sin \omega t}{R} = \hat{i} \sin \omega t$$

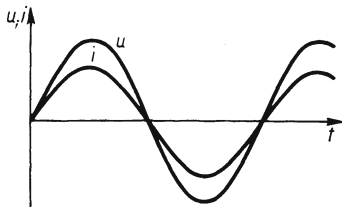


Bild 3.92 Spannung und Strom im Wechselstromkreis mit Wirkwiderstand R

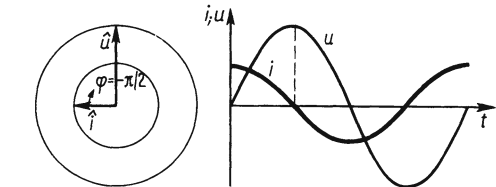
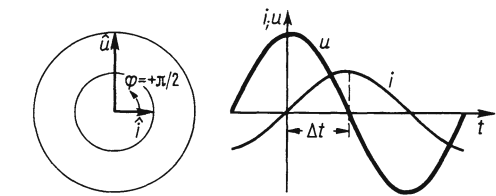
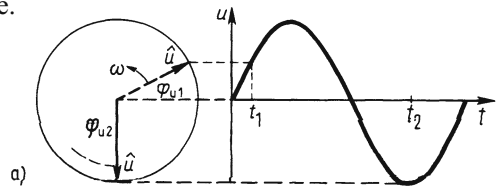


Bild 3.93

- a) Zeigerdarstellung einer Wechselspannung
- b) Phasenverschiebung der Spannung gegenüber dem Strom in einem Wechselstromkreis mit einer reinen Induktivität
- c) Phasenverschiebung der Spannung gegenüber dem Strom in einem Wechselstromkreis mit einer reinen Kapazität

Der Strom und die Spannung haben in einem Wechselstromkreis mit dem Widerstand R den gleichen Verlauf, und beide erreichen immer gleichzeitig ihren Scheitelwert (Bild 3.92).

Stromkreis mit Induktivität. Ist die Induktivität in dem Stromkreis nicht vernachlässigbar klein, so wächst und sinkt der Strom beim Ansteigen und Abnehmen der Spannung verzögert (vgl. Ein- und Ausschaltvorgang Abschn. 3.3.4.3). Der Strom eilt der anliegenden Spannung nach (Bild 3.93 b), umso mehr, je kleiner der Widerstand R im Stromkreis ist. Ist $R = 0$, so ist die Spannung $u = L di/dt$. Da ferner die Frequenz des Stromes und der Spannung gleich ist, gilt mit

$$u = L \hat{i} \frac{d}{dt} (\sin \omega t) = L \hat{i} \omega \cos \omega t = L \hat{i} \omega \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = L \omega \hat{i} \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (3.101)$$

Das bedeutet, dass die Spannung gegenüber dem Strom um eine Viertelperiode zeitlich verschoben ist. Das Vorzeichen der Verschiebung soll die Zeigerdarstellung in Bild 3.93 klarmachen. Die entgegen dem Uhrzeigersinn umlaufenden Zeiger (keine Vektoren!) stellen die Scheitelwerte von Spannung (z.B. in Bild 3.93a) und Strom dar. Ein Umlauf um den Winkel 2π entspricht einer Periode T . So kann man dem Spannungspfeil einen Winkel φ_u zuordnen, dem Strompfeil einen Winkel φ_i . Ist zwischen gleichen Zuständen (also z.B. Nulldurchgängen oder Scheitelwerten) zweier Wechselgrößen ein Zeitunterschied Δt (z.B. Bild 3.93b), so kann man diesen durch den entsprechenden Winkel φ – genannt Phasenwinkel oder Phasenverschiebung – ausdrücken (Näheres hierzu s. Abschn. 5.1). Wir setzen $\varphi_i = 0$, dann ist der Phasenwinkel $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$, der im Stromkreis mit einem Wirkwiderstand gleich Null ist, im Stromkreis mit einer Induktivität $\varphi = +\pi/2$.

Zwischen Strom und Spannung in einem Wechselstromkreis mit reiner Induktivität L tritt ein Phasenwinkel $\varphi = \pi/2$ auf (Bild 3.93b). In jeder Periode erreicht also immer erst die Spannung ihr Maximum \hat{u} , dann um $T/4$ später der Strom sein Maximum \hat{i} .

Definition: Man nennt den Quotienten

$$Z = \frac{\hat{u}}{\hat{i}} \quad \text{Scheinwiderstand}$$

Dieser stimmt im Wechselstromkreis nur dann mit dem Quotienten u/i der Momentanwerte überein, wenn ein reiner Wirkwiderstand vorliegt ($\varphi = 0$, dann gilt $Z = R$), nicht jedoch bei Induktivitäten und Kapazitäten, wie wir im Folgenden sehen werden.

Für eine Induktivität ist gemäß Gl. (3.101) der Scheinwiderstand

$$Z = \omega L = X_L$$

X_L heißt induktiver Blindwiderstand; er nimmt mit steigender Frequenz zu. Seine Einheit ist 1Ω .

Skineffekt oder Hautwirkung. Die Induktivität ist selbst in geringem Maße frequenzabhängig, da sich mit zunehmender Frequenz der Strom in einem Leiter immer mehr in eine dünne Oberflächen-

schicht verlagert. Die Stromverdrängung zur Leiteroberfläche nennt man Haut- oder Skineffekt. Er rührt, wie hier nicht näher gezeigt werden kann, von den durch das Magnetfeld des Leiterstromes im Leiter erzeugten Wirbelströmen her (s. Abschn. 3.3.4.2). Diese haben in achsennahen Bereichen dem Leiterstrom gegenüber umgekehrtes Vorzeichen. Man verwendet deshalb für hohe und höchste Frequenzen Leiter mit großen, gut leitenden Oberflächen (versilberte Hf-Litzen, Rohrleiter).

Stromkreis mit Kapazität. Besteht der Stromkreis aus einer Wechselstromquelle und einem Kondensator der Kapazität C , dann wird der Kondensator dauernd mit wechselndem Vorzeichen aufgeladen und entladen. Es fließt ein dauernder Wechselstrom, der scheinbar durch den Kondensator hindurch geht. Ist der Wirkwiderstand R des Kreises gleich Null, so liegt bei jeder Halbperiode die Scheitelspannung erst dann am Kondensator, wenn der Strom Null geworden, der Kondensator also gänzlich aufgeladen ist. Am Kondensator liegt die veränderliche Spannung $u_C = q/C^1$. Der Strom ist dann

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt} \quad (3.102)$$

Wegen $R = 0$ ist die Spannung am Kondensator gleich der anliegenden Spannung $u_C = u$ und mit $u = \hat{u} \sin \omega t$ wird aus Gl. (3.102)

$$i = C\omega \hat{u} \cos \omega t = C\omega \hat{u} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (3.103)$$

Zählen wir wieder den Phasenwinkel vom Strom i aus, dann ist die Spannung gegenüber dem Strom um $-\pi/2$ phasenverschoben. Das Vorzeichen des Phasenwinkels geht aus der Zeigerdarstellung in Bild 3.93c hervor.

Zwischen Strom und Spannung in einem Wechselstromkreis mit reiner Kapazität C tritt ein Phasenwinkel $\varphi = -\pi/2$ auf (Bild 3.93c). In jeder Periode erreicht also immer erst der Strom sein Maximum \hat{i} , dann um $T/4$ später die Spannung ihr Maximum \hat{u} .

Wie oben erhält man für $Z = \hat{u}/\hat{i} = 1/(\omega C)$. Doch wenn man die Widerstände im Wechselstromkreis wie die Scheitelspannungen als Zeiger darstellt und diese mit Hilfe komplexer Zahlen beschreibt, erhält der kapazitive Widerstand ein negatives Vorzeichen. Damit kann man dann Blindwiderstände wie Wirkwiderstände addieren. Wir wollen in der gleichen Weise verfahren:

Definition:

$$X_C = -\frac{1}{\omega C}$$

nennt man den kapazitiven oder Blindwiderstand einer Kapazität C . Er nimmt mit steigender Frequenz ab. Seine Einheit ist 1Ω .

Stromkreis mit Widerstand, Induktivität und Kapazität. Im Stromkreis (Bild 3.94a) liegen ein Widerstand, eine Spule und ein Kondensator in Reihe an einer Wechselspan-

¹⁾ Da die Ladung zeitlich veränderlich ist, steht für den Momentanwert q .

nungsquelle. Deren Spannung ist gleich der Summe der Spannungen an Widerstand, Spule und Kondensator:

$$u = u_R + u_L + u_C$$

Die Spannung am Widerstand ist mit dem Strom $i = \hat{i} \sin \omega t$ in Phase (s. Zeigerdarstellung in Bild 3.94b) sie ist $u_R = \hat{i} R \sin \omega t$, ihr Scheitelwert $\hat{u}_R = \hat{i} R$. Die in der Spule induzierte Spannung ist gegenüber dem Strom um $+\pi/2$ phasenverschoben:

$$u_L = \hat{i} L \omega \cos \omega t = \hat{i} L \omega \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

ihr Scheitelwert ist $\hat{u}_L = \hat{i} \omega L$; die Spannung am Kondensator weist gemäß S. 345 oben eine Verschiebung um $-\pi/2$ auf:

$$u_C = \frac{1}{\omega C} = \hat{i} \sin(\omega t - \pi/2)$$

ihr Scheitelwert ist $\hat{u}_C = \hat{i} / \omega C$.

Die Scheitelwerte der drei Spannungen addieren sich mit ihren Phasendifferenzen zur Gesamtscheitelspannung (vgl. Bild 3.94b).

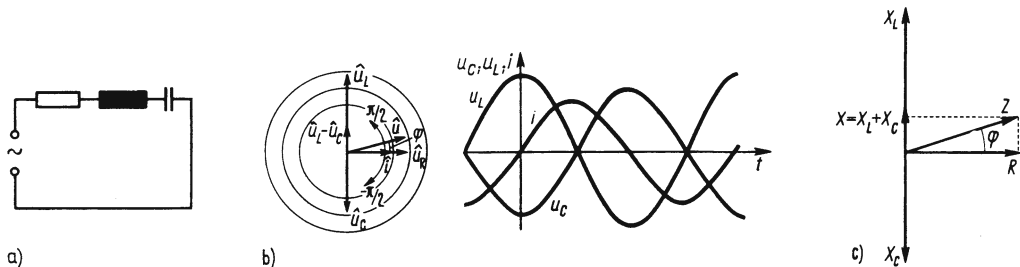


Bild 3.94 Reihenschaltung eines Widerstandes, einer Spule und eines Kondensators

$$\hat{u} = \hat{i} \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} = \hat{i} Z \quad (3.104)$$

Definition:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \quad (3.105)$$

nennt man den Scheinwiderstand Z des Wechselstromkreises;

$$X = X_L + X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

heißt der Blindwiderstand; R heißt der Wirkwiderstand des Kreises.

An Stelle der Scheitelspannung können wir auch die Widerstände R , X_L und X_C im Zeigerdiagramm auftragen (Bild 3.94c), und so den Scheinwiderstand und den Phasenwinkel φ zwischen Strom und Spannung ermitteln.

Bei Parallelschaltung (Bild 3.95a) von Widerstand, Spule und Kondensator addieren sich die einzelnen Ströme zum Gesamtstrom. Bezogen auf die anliegende Spannung ist der Strom im Kondensator um $+\pi/2$, der in der Spule um $-\pi/2$ phasenverschoben (Bild 3.95b).

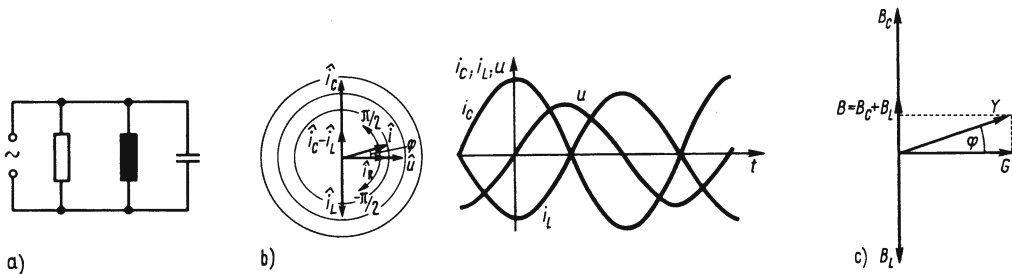


Bild 3.95 Parallelschaltung eines Widerstandes, einer Spule und eines Kondensators

Mit dem Leitwert $G = 1/R$, den Blindleitwerten $B_C = \omega C$ und $B_L = -1/(\omega L)$ erhalten wir für die Scheitelwerte der Ströme $\hat{i}_R = G\hat{u}$, $\hat{i}_C = B_C\hat{u}$ und $\hat{i}_L = B_L\hat{u}$ und damit

$$\hat{i} = \hat{u} \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2} = \hat{u} Y$$

Definition:

$$Y = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2}$$

nennt man den Scheinleitwert, $B = B_C + B_L$ heißt der Blindleitwert des Wechselstromkreises.

Thomsongleichung. Der Scheinwiderstand Z ist nach Gl. (3.105) am kleinsten ($Z = R$), wenn die Blindwiderstände X_L und X_C einander gleich sind, weil dann $[\omega L - 1/(\omega C)]^2 = 0$ ist. Daraus folgt

$$\omega^2 = \frac{1}{L C} \quad \text{oder} \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{L C}} \quad (3.106)$$

Diese Gleichung – nach William Thomson (1824 bis 1907) benannt – besagt also, dass es für jede Reihenschaltung einer Induktivität L und einer Kapazität C (und eines Widerstandes R) eine bestimmte Frequenz f der anliegenden Wechselspannung gibt, bei der der durchfließende Strom die höchste Amplitude \hat{i} erreicht und keine Phasenverschiebung gegenüber der Spannung hat. Bei Parallelschaltung hat der Scheinleitwert ein Minimum, wenn die Blindleitwerte einander gleich sind. Man erhält mit $\omega C = 1/(\omega L)$ ebenfalls die Gl. (3.106). Sie gibt die Frequenz an, bei der der Gesamtstrom ein Minimum wird und keine Phasenverschiebung gegenüber der Spannung hat.

Leistung im Wechselstromkreis, Effektivwerte. Die Momentanleistung ist das Produkt aus den sich periodisch ändernden Größen i und u

$$P_{\text{mom}} = \hat{i} \hat{u} \sin \omega t \sin (\omega t + \varphi)$$

Der Verlauf der Momentanleistung ist während jeder Periode gleich (Bild 3.96). Integriert man über die Dauer einer Periode und teilt durch T , erhält man die wirksame oder effektive Leistung P – das ist der zeitliche Mittelwert von P_{mom} –

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T \hat{u} \hat{i} \sin \omega t \sin(\omega t + \varphi) dt = \frac{1}{2} \hat{u} \hat{i} \cos \varphi \quad (3.107)$$

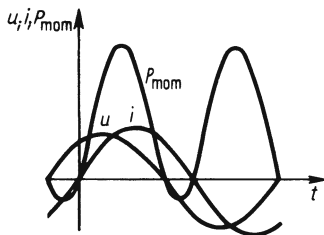


Bild 3.96 Spannung, Strom und Momentanleistung im Wechselstromkreis

Diese Leistung ist umso größer, je mehr sich $\cos \varphi$ dem Wert 1 nähert, je kleiner also φ ist. Daher nennt man $\cos \varphi$ auch den Leistungsfaktor und φ den Verlustwinkel eines Wechselstromkreises. Aus dem Zeigerdiagramm (Bild 3.94b) entnehmen wir, dass $\hat{u} \cos \varphi = u_R = iR$ ist. Damit schreiben wir

$$P = \frac{1}{2} \hat{i}^2 R \quad (3.108)$$

Die wirksame oder effektive – also z.B. zur Erwärmung eines Leiters aufgewandte – Leistung eines sinusförmigen Wechselstroms mit dem Scheitelwert \hat{i} ist gleich derjenigen des Gleichstroms $I = \hat{i}/\sqrt{2}$.

Definition: Der Effektivwert $I_{\text{eff}} = I$ eines Wechselstroms ist gleich dem Gleichstrom, der im Stromkreis mit demselben Widerstand die gleiche wirksame Leistung verursacht. Für sinusförmigen Wechselstrom gilt

$$I = \hat{i}/\sqrt{2} \quad (3.109)$$

Unabhängig von der Form des Stromverlaufs gilt allgemein: Der Effektivstrom ist die Wurzel aus dem zeitlichen Mittelwert der Quadrate der Momentanwerte i

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}$$

Analog zu Gl. (3.109) ist der

Effektivwert der Spannung $U_{\text{eff}} = U$ bei sinusförmigem Wechselstrom

$$U = \hat{u}/\sqrt{2}$$

Setzt man die Effektivwerte in Gl. (3.107) ein, so wird die

Wirkleistung

$$P = UI \cos \varphi \quad (3.110)$$

$P_S = UI$ nennt man die Scheinleistung (Einheit VA), $P_B = UI \sin \varphi$ die Blindleistung (Einheit Var) des Wechselstromes¹⁾.

¹⁾ In der Elektrotechnik verwendet man für die Scheinleistung das Formelzeichen S (nicht zu verwechseln mit der Stromdichte S) und für die Blindleistung das Formelzeichen Q (nicht zu verwechseln mit der elektrischen Ladung Q).

P_S und P_B sind reine Rechengrößen, die keine physikalische Realität haben. Da man mit Effektivwerten von Strömen und Spannungen rechnet, ist es oft sinnvoll, in das Zeigerdiagramm die Effektivwerte einzutragen. In vereinfachter Darstellung ist dies für die Schaltung 3.95a in Bild 3.97 geschehen. In Phase mit der Spannung (Betrag U) ist der Strom im Wirkwiderstand, der sog. Wirkstrom (Betrag I_R oder I_W). Den aus den beiden Strömen in Spule und Kondensator resultierenden Strom (Betrag I_B) nennt man Blindstrom. Er ist hier kapazitiv ($\varphi = \pi/2$), er kann natürlich genau so gut induktiv sein ($\varphi = -\pi/2$). Der resultierende Gesamtstrom hat den Betrag I . Ein Vergleich mit Bild 3.95b zeigt auch, dass sich die Ströme in Spule und Kondensator ganz oder teilweise kompensieren. Sind beide gleich groß, so wird $I_B = 0$. Die Kompensation von induktiven Blindströmen ist eine wichtige technische Anwendung. Sie wird erreicht, indem man dem induktiven Blindwiderstand (z.B. von Motorwicklungen oder Drosselspulen) einen Kondensator mit entsprechendem kapazitiven Blindwiderstand parallel schaltet.

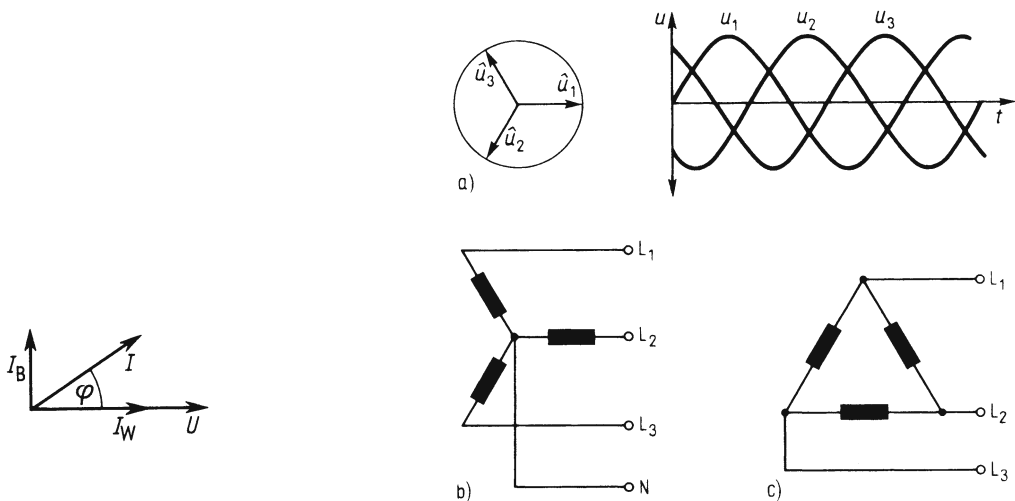


Bild 3.97 Zeigerdiagramm der Ströme

Bild 3.98 Drehstrom

Drehstrom entsteht in 3 voneinander unabhängigen Wicklungen eines Generators. Die drei Wechselspannungen (im Fachjargon „Phasen“ genannt) sind um je 120° gegeneinander phasenverschoben. Durch Verkettung der 3 Wicklungen in sog. Stern- oder Dreieckschaltung (Bild 3.98b oder c) werden nur 4 oder 3 Leitungen (Außenleiter L_1, L_2, L_3) für das Drehstromnetz benötigt. Es ist das heute allgemein übliche öffentliche Stromnetz. Die effektive Spannung jedes Leiters gegen den Sternpunkt N (Neutralleiter) ist gleich 230 V, die effektive Spannung zwischen je zwei Leitern ist 400 V. Außerdem erzeugen die phasenverschobenen verketteten Spannungen in geeignet angeordneten Feldspulen ein Drehfeld und ermöglichen so den Bau besonders einfacher Motoren (Asynchronmotoren vgl. Abschn. 3.3.8.2).

3.3.8.5 Magneto-hydrodynamische Effekte

Natürlich gilt das Induktionsgesetz auch für deformierbare Leiter. Wenn eine Flüssigkeit oder ein Gas den Strom leitet, ist jedes bewegte geladene Teilchen in einem Magnetfeld der Lorentzkraft ausgesetzt. Umgekehrt entsteht im Medium eine Induktionsspannung, wenn sich der magnetische Fluss in diesem

ändert. Der dadurch entstehende Induktionsstrom besteht ja aus bewegten Ladungsträgern. Auf diese und damit auf das ganze Medium wirkt dann die Lorentzkraft. Ursprünglich wurde vor allem das Verhalten von Flüssigkeiten untersucht. Den so entstandenen Wissenschaftszweig nannte man Magnetohydrodynamik (MHD). Dieser Name wurde auch für die gleichen Effekte an leitenden Gasen beibehalten¹⁾.

Die Vorgänge in Flüssigkeiten im Magnetfeld sind mannigfaltiger als die der normalen Hydrodynamik. Durch die auf eine Flüssigkeit wirkende Lorentzkraft tritt nämlich eine Änderung der Flüssigkeitsbewegung ein. Das für eine Strömung erforderliche Druckgefälle nimmt mit der Feldstärke des von der Flüssigkeit gekreuzten Magnetfeldes zu. So bewegt sich z.B. Quecksilber im Magnetfeld wie eine zähe Flüssigkeit. Die Erhöhung der Viskosität tritt vor allem bei Flüssigkeiten mit hoher elektrischer Leitfähigkeit auf.

Die Schallausbreitung in deformierbaren stromdurchflossenen Medien wird im Magnetfeld dadurch kompliziert, dass zum hydrostatischen Druck durch die Lorentzkraft bedingte Druckkomponenten hinzukommen.

Von besonderem Interesse sind heute Versuche mit hochionisierten Gasen (Plasma) im Magnetfeld.

MHD-Generator. In einer leitenden Gasströmung wird durch ein zur Strömungsrichtung senkrecht Magnetfeld eine Spannung induziert. An Elektroden senkrecht zur Strömung und zum Magnetfeld wird diese abgegriffen. Die Spannung entsteht direkt auf Grund der Bewegung der geladenen Teilchen. Ein MHD-Generator vereint gewissermaßen Gasturbine und elektrischen Generator. Eine solche Anordnung gestattet die direkte Umwandlung von kinetischer in elektrische Energie. Bei Gastemperaturen von ca. 3000 K erwartet man, mit solchen MHD-Generatoren auf einen Wirkungsgrad von 0,5 bis 0,6 zu kommen. Eine andere wichtige Anwendung dieses Prinzips ist die Messung von Strömungsgeschwindigkeiten.

Raketenantrieb. Legt man an die Elektroden am Rande einer leitenden Gasströmung eine Spannung, so kann man den in einem MHD-Generator ablaufenden Prozess umkehren. Der Strom verläuft gegenüber dem im Generator in umgekehrter Richtung, und die Lorentzkraft beschleunigt die strömenden Teilchen.

Da man auf diese Weise erheblich höhere Teilchengeschwindigkeiten erreichen kann, als dies chemisch (Verbrennung) möglich ist, eröffnen sich hiermit Antriebsmöglichkeiten für Raumfahrzeuge für den interplanetaren Raum. Die gleiche Methode wird auch zum Pumpen flüssiger Metalle (Kühlkreislauf von Reaktoren) angewandt.

Pinch-Effekt. Wenn in einer zylindrischen Plasmasäule eine sehr stromstarke (10^6 A) Bogenentladung stattfindet, sind die aus dem axial fließenden Strom und dem ringförmig die Strombahn umgebenden Magnetfeld folgenden Lorentzkräfte radial nach innen gerichtet. Es entsteht ein radialer Druck auf das Plasma, dieses wird zu einem dünnen Faden komprimiert. Diese Erscheinung nennt man Pinch-Effekt. Durch die Joulesche Wärme in der Säule und die adiabatische Kompression erhitzt sich das Plasma beträchtlich. Der Plasmafaden zerreißt jedoch schon nach Bruchteilen einer Sekunde und man versucht, durch geeignete zusätzliche Magnetfelder den Faden zu stabilisieren.

Auf diesem Prinzip – jedoch bei anderer geometrischer Anordnung – beruht eine aussichtsreiche Methode zum Erzeugen so extrem hoher Temperaturen, wie sie z.B. für das Auftreten von Kernfusionen (s. Abschn. 6.2.4.2) in einem Fusionsreaktor erforderlich sind.

Aufgaben zu Abschn. 3.3.8

1. Man beweise, dass der Ausschlag eines Drehspulinstrumentes dem Strom proportional ist, wenn eine Torsionsfeder mit linearem Drehmomentverlauf verwendet wird. Homogenes Magnetfeld: $\vec{B} \perp \vec{l}$ des Leiters.

2. Auf dem Leistungsschild eines Einphasen-Wechselstrommotors mit dem Wirkungsgrad $\eta = 0,86$ stehen folgende Werte: $U = 230$ V, $I = 6$ A, $\cos \varphi = 0,82$.

Wie groß ist a) die Scheinleistung, b) die Wirk-

¹⁾ Je nachdem um welches Medium es sich handelt, spricht man auch von Magnetogasdynamik (MGD), Magnetoplasmadynamik (MPD) oder Magnetofluiddynamik (MFD).

leistung, c) die vom Motor abgegebene mechanische Leistung, d) die Blindleistung?

3. In der 6,3 Volt-Sekundärwicklung eines Heiztransformators fließen 2,4 A.

a) Wie groß ist der Strom primärseitig, wenn der Trafo am 230 V-Netz liegt und ohne Verluste gerechnet wird?

b) Wie viele Windungen hat die Primärwicklung, wenn man auf der Sekundärseite 30 Windungen zählt?

4. Auf welche Spannung kann ein Kondensator mittels einer Gleichrichter-Diode am 230 V-Wech-

selstromnetz aufgeladen werden, wenn man die Durchlass-Spannung der Diode vernachlässigt? Welche Sperrspannung muss die Diode mindestens aushalten?

5. Am 230 V-Wechselstromnetz liegen ein Wirkwiderstand $R = 200 \Omega$, eine Induktivität $L = 0,1 \text{ H}$ und eine Kapazität $C = 5 \mu\text{F}$ in Serie. Zu berechnen sind

a) Effektiv- und Scheitelstrom, b) Phasenwinkel und zugehörige zeitliche Verschiebung zwischen Strom und Spannung, c) die Effektivspannungen an den drei Widerständen R , X_L und X_C .

4 Strahlenoptik

Elektromagnetische Wellen mit Wellenlängen von 390 bis 790 nm (Frequenzen zwischen $3,8 \cdot 10^{14}$ und $7,7 \cdot 10^{14}$ Hz) nennen wir Licht – nach dem Eindruck, den diese Wellen in unserem Auge hervorrufen. Das Verhalten und die Eigenschaften dieses Lichtes beschreibt die Optik. Soweit dazu die Welleneigenschaften eine Rolle spielen, wird die Optik in Abschn. 5.2 behandelt. Für den einfacheren Teil der Optik ist es jedoch nicht notwendig, die Wellennatur des Lichtes zu berücksichtigen; man beschreibt vielmehr nur den makroskopischen Verlauf von Lichtbündeln.

In homogenen Medien breiten sich Lichtbündel erfahrungsgemäß geradlinig aus.

Zur zeichnerischen Darstellung eines solchen Lichtbündels dient entweder das begrenzende Geradenpaar („Randstrahlen“) oder die Symmetriegerade in der Bündelmitte („Hauptstrahl“). Wegen dieser geometrischen Darstellung durch Geraden („Strahlen“) nennt man dieses Teilgebiet Strahlenoptik (geometrische Optik). Diese Betrachtungsweise ist eine „Modellvorstellung“, die stark vereinfacht; trotzdem gelingt es mit ihrer Hilfe, beachtliche Fortschritte beim Bau optischer Geräte zu erzielen.

4.1 Abweichungen von der geradlinigen Lichtausbreitung

4.1.1 Reflexion

Die uns geläufigste Abweichung von der Geradlinigkeit der Lichtausbreitung ist die Reflexion, d.h. die Tatsache, dass Licht an der Grenzfläche zwischen zwei verschiedenen Stoffen mehr oder weniger stark „zurückgeworfen“ (reflektiert) wird. Dabei spielen Form und Beschaffenheit dieser Grenzflächen eine Rolle.

4.1.1.1 Reflexion an ebenen Flächen

Spiegelung. Streng genommen sind alle Oberflächen fester oder flüssiger Stoffe rau. Sind jedoch die mittleren Abmessungen der Rauigkeiten kleiner als etwa $5 \cdot 10^{-7}$ m, so wirken die Oberflächen optisch glatt, d.h. sie reflektieren Licht spiegelnd. In Bild 4.1 trifft ein schmales Lichtbündel 1 im Punkt P auf die Fläche 2 und wird reflektiert (3). In P ist das Lot 4 auf der Fläche 2 errichtet. Genaue Messungen der Winkel ergeben das

Reflexionsgesetz: Der Einfallswinkel ε ist gleich dem Ausfallswinkel ε' ; einfallender Strahl, Lot auf der reflektierenden Fläche und reflektierter Strahl liegen in einer Ebene.

In Bild 4.2 ist das Lichtbündel, das von einer Lichtquelle A ausgeht und auf den Spiegel 1 fällt, durch seine Randstrahlen 2 und 3 dargestellt; diese werden in die Richtungen 4 und 5 reflektiert. Blickt man gegen diese Richtungen, so sieht man die Lichtquelle A vermeintlich hinter dem Spiegel, und zwar an der Stelle A', die symmetrisch zur tatsächlichen Quelle A

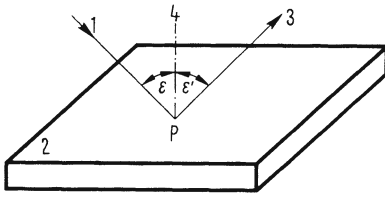


Bild 4.1 Spiegelung an einer ebenen, glatten Oberfläche

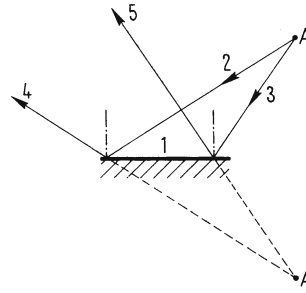


Bild 4.2 Entstehung eines Spiegelbildes

bezüglich der Oberfläche ist. Dies gilt nicht nur für die hier gezeichnete punktförmige Lichtquelle A, sondern auch für ausgedehnte und auch für nicht selbstleuchtende, sondern z.B. diffus reflektierende Körper (s. unten).

Den Ort A' von dem nach einer spiegelnden Reflexion das Licht einer Quelle A herzukommen scheint, nennt man das Spiegelbild der Lichtquelle.

Reflexion an rauen Flächen. Sind die Abmessungen der Rauigkeiten einer Oberfläche im Durchschnitt größer als etwa $5 \cdot 10^{-7}$ m, so wird Licht daran zwar reflektiert, man kann jedoch meist kein Spiegelbild erkennen. Zur Erklärung muss man sich die Oberfläche zusammengesetzt denken aus lauter mikroskopisch kleinen spiegelnden Flächen, die, statistisch verteilt, alle möglichen Richtungen haben. Ein Lichtbündel wird dann zerlegt in lauter feinste Teilbündel mit ebenfalls allen möglichen Richtungen. Dies nennt man diffuse Reflexion.

4.1.1.2 Reflexion an gekrümmten glatten Flächen

Für die Reflexion an gekrümmten Flächen gilt dasselbe Gesetz wie für die Reflexion an einer Ebene. Der einzige Unterschied besteht darin, dass sich nunmehr die Richtung der Flächennormale (Lot) von Punkt zu Punkt systematisch ändert. Praktisch interessieren hauptsächlich Teile von Kugelflächen („Sphärische Spiegel“) und von Rotationsparaboloiden („Parabolspiegel“). Sind die hohlen Seiten solcher Flächen der Lichtquelle zugekehrt, so hat man

Konkavspiegel. In Bild 4.3a fällt ein Parallellichtbündel – also z.B. Licht von einer unendlich fernen Lichtquelle – parallel zur Achse CS auf eine reflektierende Kugelfläche

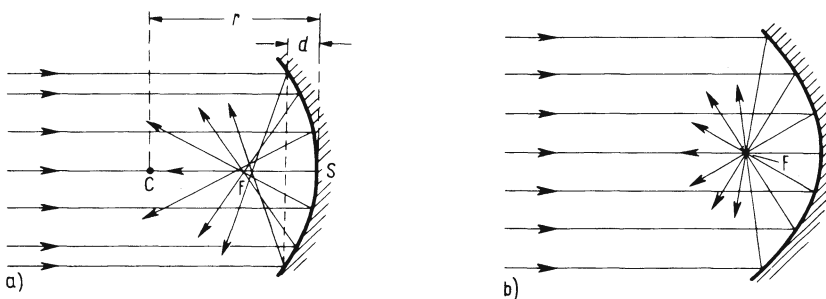


Bild 4.3 Fokussierung durch einen sphärischen (a) und einen parabolischen Konkavspiegel (b)

(gezeichnet sind mehrere „Parallelstrahlen“). Nach der Reflexion bildet es ein zusammenlaufendes (konvergentes) Bündel, da alle Strahlen annähernd auf einen Punkt F zulaufen. Dieser liegt in der Mitte zwischen dem Scheitel S und dem Kugelmittelpunkt C und heißt Brennpunkt. Je kleiner die Dicke d der als Spiegel ausgenutzten Kugelkalotte im Verhältnis zum Kugelradius ist, umso genauer schneiden sich die Strahlen in einem Punkt. Bei einem Parabolspiegel (Bild 4.3b) gehen sie exakt durch den Brennpunkt.

Bringt man umgekehrt eine Lichtquelle in den Brennpunkt, so wird das kegelförmig auseinanderlaufende (divergente) Teilbündel, das auf den Spiegel trifft, durch die Reflexion zu einem Parallelbündel. Wir können verallgemeinernd feststellen:

Der Öffnungswinkel eines Lichtbündels – seine Divergenz – wird durch Reflexion an einem Konkavspiegel verringert.

Abbildung

Allgemein spricht man von Abbildung, wenn alle Bildpunkte geometrisch ähnlich angeordnet sind wie ihre Objektpunkte. Spiegel und Linsen (s. Abschn. 4.1.2.3) bewirken diese Zuordnung mehr oder weniger exakt und heißen daher abbildende Systeme.

□ **Versuch 1.** Auf einen Konkavspiegel mit einem Krümmungsradius von etwa 0,5 m fällt das Licht eines einige Meter entfernten, leuchtenden Gegenstandes. Bringt man in die Nähe des Brennpunktes einen im Vergleich zum Spiegel kleinen mattweißen Schirm (z.B. eine Papierscheibe), so erscheint auf diesem ein verkleinertes, umgekehrtes Bild des Gegenstandes. Nähert man den Gegenstand dem Spiegel, so muss man den Schirm weiter vom Spiegel entfernen, damit das Bild wieder scharf wird. Dabei wird das Bild größer. Befindet sich der Gegenstand im Krümmungsmittelpunkt, so entsteht auch sein Bild dort und ist gleich groß. Nähert man den Gegenstand dem Brennpunkt, so geht das Bild gegen unendlich. Ist der Gegenstand zwischen Brennpunkt und Spiegel, so erscheint auf dem Schirm kein Bild mehr. Nur wenn man in den Spiegel blickt, sieht man ein aufrechtes Bild, ähnlich wie beim ebenen Spiegel, jedoch vergrößert. □

Bild 4.4 zeigt einen Hohlspiegel mit seinem Krümmungsmittelpunkt C , seinem Brennpunkt F , seinem Scheitel S sowie strichpunktiert die sog. optische Achse CS . Zur einheitlichen Bezeichnung aller Strecken und insbesondere ihrer Vorzeichen ist im Scheitel S der Ursprung eines Koordinatensystems mit positiver y -Achse nach oben und positiver a -Achse nach rechts gezeichnet. Dann hat darin z.B. der pfeilförmige Gegenstand OO_S – im folgenden Objekt genannt – die positive Länge $y = OO_S$ und den negativen Abstand $a = SO$ vom Scheitel. Von jedem seiner Punkte geht nach allen Seiten Licht aus. Von dem Lichtbündel, das von der Pfeilspitze O_S ausgeht und auf den Hohlspiegel trifft, sind einige Strahlen gestrichelt, zwei ausgezogen gezeichnet: Einer (1) parallel zu CS , der nach der Reflexion (ungefähr) durch F geht, und einer (2), der vorher durch F geht und daher nachher (ungefähr) parallel zu CS verläuft. Diese beiden und auch alle anderen von O_S auf den Spiegel treffenden Strahlen schneiden sich in O'_S . Man nennt O'_S den Bildpunkt zu O_S . Die gleiche Konstruktion lässt sich für alle anderen Punkte des Objektes durchführen.

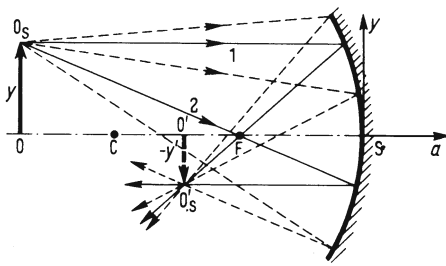


Bild 4.4 Konstruktion des reellen Bildes beim Hohlspiegel

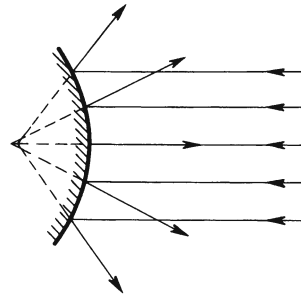


Bild 4.5 Reflexion am Konvexspiegel

Dadurch erhält man als Summe aller Bildpunkte das Bild $O'O'_s$ mit der negativen Länge y' . Es lässt sich auf einem Schirm auffangen und heißt daher reelles Bild. Diejenigen Bilder dagegen, die man nur direkt mit dem Auge empfangen kann, wenn der Gegenstand innerhalb der Brennweite ist, nennt man virtuelle Bilder. Auch sämtliche Bilder, die durch einen ebenen Spiegel entworfen werden, sind virtuell.

Aus einfachen geometrischen Überlegungen (s. Aufgabe 1 zu Abschn. 4) ergibt sich für den

Zusammenhang zwischen Objektweite $a = SO$, Bildweite $a' = SO'$ und Brennweite $f = SF = SC/2 = r/2$ die Abbildungsgleichung

$$1/a + 1/a' = 1/f \quad (4.1)$$

und für das Verhältnis der Bildgröße y' zur Objektgröße y der sog. Abbildungsmaßstab

$$\beta' = y'/y = a'/a$$

Wird $a > f$; ($|a| < |f|$!), so ergibt sich aus Gl. (4.1): $a' > 0$, d.h. das (virtuelle!) Bild liegt rechts vom Spiegel.

Konvexspiegel. Wird ein Parallellichtbündel (Licht von einer unendlich fernen Quelle) an der erhabenen (konvexen) Seite eines sphärischen Spiegels (Bild 4.5) reflektiert, so ist es danach divergent. Die gestrichelten Verlängerungen der reflektierten „Strahlen“ nach rückwärts schneiden sich annähernd in einem Punkt. Von dort scheint also das reflektierte Lichtbündel auszugehen, d.h. ein Betrachter vermeint dort die Lichtquelle zu sehen. Ähnlich ergeht es auch den (divergenten) Lichtbündeln von näher gelegenen Lichtquellen:

Der Öffnungswinkel – die Divergenz – eines Lichtbündels wird durch Reflexion an einem Konvexspiegel vergrößert.

Die vermeintlichen Lichtquellen, die ein Beobachter sieht, wenn er in das reflektierte Licht blickt, sind wieder virtuelle Bilder. Sie stehen auch aufrecht, sind jedoch verkleinert. In Bild 4.6 ist ein virtuelles Bild nach dem gleichen Verfahren wie in Bild 4.4 konstruiert.

Anwendungen. Konkavspiegel sind häufig die wesentlichen Teile astronomischer Fernrohre (Spiegelteleskope). In Scheinwerfern erzeugen Konkavspiegel parallele, in Projektoren konvergente Lichtbündel. Konkavspiegel findet man z.T. als Rückspiegel in Autos, da man mit ihnen wegen der verkleinerten Abbildung ein vergrößertes Gesichtsfeld hat.

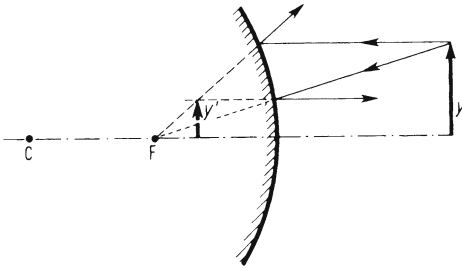


Bild 4.6 Konstruktion des virtuellen Bildes

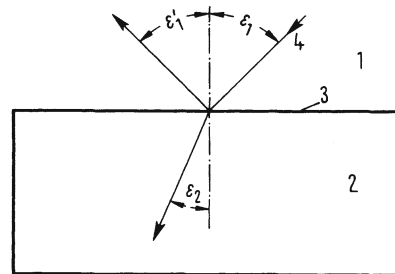


Bild 4.7 Brechung an einer ebenen Grenzfläche

4.1.2 Brechung

Licht, das an die Grenzfläche zwischen zwei verschiedenen Medien gelangt, wird nicht nur reflektiert, sondern dringt z.T. auch in das andere Medium ein und ändert dabei im Allgemeinen seine Richtung. Diese Abweichung von der geradlinigen Ausbreitung nennt man Brechung.

4.1.2.1 Brechungsgesetz

In Bild 4.7 grenzen entlang der ebenen Oberfläche 3 zwei Medien 1 und 2 aneinander. Ein schlanke Lichtbündel 4 trifft auf diese Grenzfläche. Der nichtreflektierte Teil des Lichtes wird gebrochen und verläuft im Medium 2 unter dem Winkel ε_2 gegen das strichpunktierte Lot. Der Winkel ε_2 hängt ab vom Einfallswinkel ε_1 und von den beiden Medien, die aneinander grenzen. Die quantitative Untersuchung zeigt, dass für beliebige Einfallswinkel ε_1 das Verhältnis $\sin \varepsilon_1 / \sin \varepsilon_2$ gleich einer Konstanten ist, die von den aneinander grenzenden Materialien abhängt (W. Snellius 1621).

$$\frac{\sin \varepsilon_1}{\sin \varepsilon_2} = \text{const.} \quad \text{Snelliussches Brechungsgesetz} \quad (4.2)$$

Ist vor der Grenzfläche Vakuum oder Luft, so nennt man die Konstante die Brechzahl n bzw. n_L des Mediums 2

$$\frac{\sin \varepsilon_v}{\sin \varepsilon_2} = n \quad \text{bzw.} \quad \frac{\sin \varepsilon_L}{\sin \varepsilon_2} = n_L \quad (4.3)$$

Die Brechzahl hängt auch von der Wellenlänge (Farbe) des Lichtes ab (s. Abschn. 5.2.6.2). Die Zahlenwerte in Tafel 4.8 gelten für das gelbe Licht einer Natriumdampflampe (D-Linien des Na-Spektrums, $\lambda = 589,3 \text{ nm}$).

Tafel 4.8 Brechzahlen n_L einiger Stoffe gegen Luft (für Natriumlicht)

Luft	1,000 ¹⁾	Flintglas	1,603	Kronglas	1,505
Wasser	1,333	Diamant	2,417	Quarz	1,539

In Bild 4.9a sind zwei Medien 1 und 2 zunächst durch ein Vakuum 3 getrennt. Der Lichtstrahl 4 wird an beiden Grenzflächen nach Gl. (4.3) gebrochen:

$$\sin \varepsilon_v / \sin \varepsilon_1 = n_1 \quad \text{und} \quad \sin \varepsilon_v / \sin \varepsilon_2 = n_2$$

daraus folgt

$$\sin \varepsilon_1 / \sin \varepsilon_2 = n_2 / n_1$$

Das gilt auch, wenn man sich das Gebiet 3 immer dünner vorstellt, sodass sich die Medien 1 und 2 schließlich berühren (Bild 4.9b):

Grenzen zwei Medien 1 und 2 mit den Brechzahlen n_1 und n_2 aneinander, so gilt für die Winkel ε_1 im Medium 1 und ε_2 im Medium 2

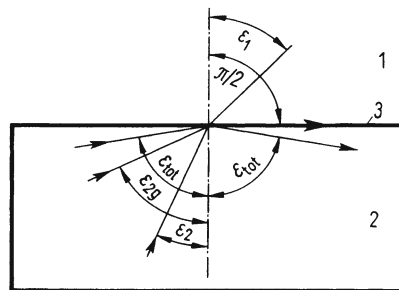
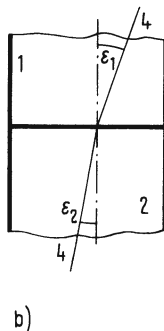
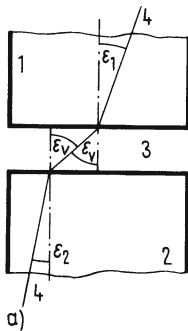
$$\frac{\sin \varepsilon_1}{\sin \varepsilon_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad \text{oder} \quad n_1 \sin \varepsilon_1 = n_2 \sin \varepsilon_2 \quad (4.4)$$

gleichgültig, in welcher Richtung das Licht durch die Grenzfläche tritt.

Das Medium mit der größeren Brechzahl heißt „optisch dichter“, das mit der kleineren Brechzahl „optisch dünner“.

Totalreflexion

Dringt das Licht vom optisch dichteren ins dünnere Medium (Bild 4.10) und vergrößert man den Winkel ε_2 , so wächst auch der (größere) Winkel ε_1 , bis er $\pi/2$ erreicht, d.h. bis sich

**Bild 4.9** Brechung an der Grenzfläche zwischen zwei verschiedenen Medien**Bild 4.10** Mehrere Strahlen treffen unter verschiedenen Winkeln auf die Grenze 3 zum optisch dünneren Medium 1 und werden entweder gebrochen (ε_2 , ε_1), verlaufen streifend in der Grenzfläche ($\varepsilon_{2g} = \pi/2$) oder werden totalreflektiert (ε_{tot} ; ε_{tot})

¹⁾ Da die Brechzahl der Luft gegen Vakuum 1,0003 fast gleich 1 ist, unterscheiden sich auch alle anderen n erst in der vierten Stelle nach dem Komma von den n_L in Tafel 4.8.

das Licht streifend entlang der Grenzfläche 3 ausbreitet. Bei einer weiteren Vergrößerung von ε_2 kann Gl. (4.4) nicht mehr gelten, sonst müsste (da $n_2 > n_1$ ist) $\sin \varepsilon_2 > 1$ sein. Das ist mathematisch unmöglich. Physikalisch heißt das, dass das Licht gar nicht mehr in das optisch dünnere Medium eindringt, sondern an der Grenzfläche totalreflektiert wird und so im optisch dichteren Medium bleibt. Für den Grenzwinkel ε_{2g} zwischen streifendem Lichtausfall ($\varepsilon_1 = \pi/2$) und Totalreflexion folgt aus Gl. (4.4)

$$\sin \varepsilon_{2g} = \frac{n_1}{n_2} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{n_1}{n_2} \quad (4.5)$$

Die Totalreflexion findet unter anderem folgende

Anwendungen. Es ist oft notwendig, Licht auf ganz bestimmten Wegen zu führen, es um Ecken zu leiten oder in bestimmte Richtungen zu lenken. Das kann in entsprechend geformten Körpern aus lichtdurchlässigem Material mit hoher Brechzahl geschehen, die in eine Umgebung mit niedrigerer Brechzahl eingebettet sind. Lichtbündel, die in solche Körper eintreten, können sie nicht mehr verlassen, solange sie von innen auf die Grenzflächen unter Winkeln ε_2 gegen die Flächennormalen treffen, die größer als der Grenzwinkel der Totalreflexion ε_{2g} sind, d.h. solange sie totalreflektiert werden. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden:

Wenn das Licht von vielen unterschiedlichen Punkten eines räumlich ausgedehnten Objektes ausgeht und nach der Umlenkung eine Abbildung zustande kommen soll, muss die räumliche Ordnung des Lichtes bei den Totalreflexionen erhalten bleiben. Dann müssen die Grenzflächen praktisch immer Ebenen sein, die zugehörigen Körper sind dann mehr oder weniger komplizierte Prismen, sog. Umlenkprismen wie z.B. in Bild 4.26.

Wenn dagegen nicht die räumliche Ordnung eines Lichtbündels, sondern nur seine (oft kleine) Energie bei der Umlenkung erhalten bleiben soll, können die Grenzflächen beliebig geformt sein, es müssen nur die Krümmungsradien so groß sein, dass immer $\varepsilon_2 < \varepsilon_{2g}$ ist, sodass Totalreflexion stattfindet. Körper für diesen Zweck heißen Lichtleiter. Für dieses Weiterleiten ist der Öffnungswinkel wichtig, den das eintretende Lichtbündel maximal haben darf, damit es nach Eintritt immer total reflektiert wird und den Lichtleiter erst am Ende wieder verlassen kann. Ist das divergente Lichtbündel, das gerade noch weitergeleitet wird, kegelförmig mit einem Öffnungswinkel σ , und hat das Material die Brechzahl n , dann ist $n \sin(\sigma/2)$ die maßgebende Größe und heißt numerische Apertur (s. auch Abschn. 5.2.6.4, Auflösungsgränze).

Häufig sind Lichtleiter feine Fasern aus Glas hoher Brechzahl, umgeben von einem Mantel aus Glas niedrigerer Brechzahl (Bild 4.11). Bündel aus einigen derartigen Glasfasern dienen als Leitungen zum Übertragen von Lichtimpulsen und damit von Informationen über viele Kilometer. Sie können metallische Leitungen z.B. für Fernsehsignale ersetzen.

Dabei tritt ein neues Problem auf: Das Lichtbündel, das in die Glasfaser eintritt, ist nicht streng parallel, sondern hat einen endlichen Öffnungswinkel. Seine Strahlen gehen daher auf unterschiedlichen Zickzackwegen durch die Faser (Bild 4.11b), legen also verschieden lange Wege zurück¹⁾ und brauchen dazu verschieden lange Zeiten. Hat nun das Licht eine zeitliche Struktur, ist es z.B. ein rechteckiger Lichtimpuls wie in Bild 4.12a, so wird diese Struktur durch die Übertragung verändert, z.B. in den Impuls in Bild 4.12b. Zur Abhilfe macht man in sog. Gradientenfasern den Übergang vom Faserkern mit hoher Brechzahl zum Fasermantel mit niedrigerer Brechzahl nicht sprunghaft (Bild 4.11c), sondern kontinuierlich (Bild 4.11f). Dann verlaufen die Lichtwege so wie in Bild 4.11e, sind zwar auch verschieden lang, werden aber alle annähernd in der gleichen Zeit durchlaufen. Zum Verständnis muss man allerdings berücksichtigen, dass in Gebieten mit hoher Brechzahl die Lichtgeschwindigkeit kleiner ist als in Gebieten mit niedriger Brechzahl; s. hierzu Abschn. 5.2.6.2.

¹⁾ Hier sind sog. Multimode-Fasern beschrieben; Näheres hierzu und zu Monomode-Fasern s. unten und [36].

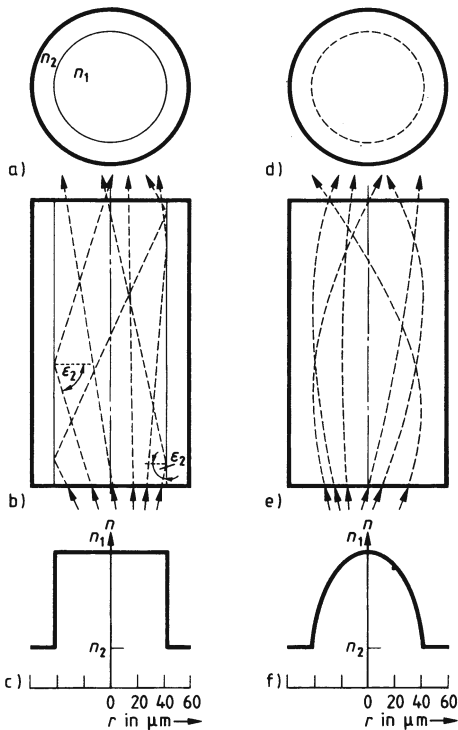


Bild 4.11 Lichtleitfasern
 a) und d) Querschnitte, b) und e) Längsschnitte mit gestrichelten Lichtwegen,
 c) und f) Verlauf der Brechzahl n als Funktion des Abstandes r von der Mitte

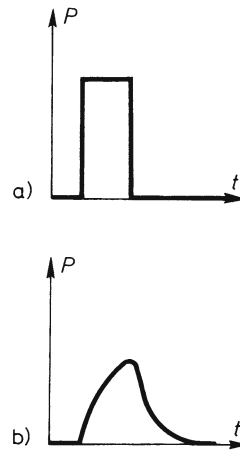


Bild 4.12 Lichtimpuls
 a) vor und b) nach der Übertragung durch eine Lichtleitfaser wie in Bild 4.11a bis c

Neuerdings ist es gelungen, die Lichtabsorption in Glasfasern so gering zu halten, dass man mit wesentlich kleineren Durchmessern der Glasfasern auskommt. Dadurch legen alle Lichtstrahlen praktisch den gleichen Weg zurück und das hier beschriebene Problem wird ebenfalls stark gemindert. Solche Glasfasern nennt man „einwellige“ oder Monomode-Fasern.

Mit Bündeln aus sehr vielen ummantelten Glasfasern kann man auch das räumlich geordnete Licht von einem räumlich ausgedehnten Objekt weiterleiten und zur Abbildung bringen. Dazu wird jedem Faseranfang nur das Licht eines eng begrenzten Teils des Objektes zugeführt und von der Faser weitergeleitet. Wenn nun die Faserenden genauso geordnet sind wie die Anfänge, dann tritt das Licht dort ebenso geordnet aus und kann zu einem mit der Zahl der Fasern gerasterten Bild verarbeitet werden. Solche Bündel werden Faseroptik genannt; ihr großer Vorteil ist ihre mechanische Flexibilität.

4.1.2.2 Brechung an ebenen Grenzflächen

Untersucht man den Durchgang von Licht durch ein Medium, so sind meistens mindestens zwei Grenzflächen zu betrachten. Der einfachste Fall liegt vor, wenn die beiden Grenzflächen parallele Ebenen sind:

Parallele Ebenen. Das Medium in Bild 4.13 möge auf beiden Seiten an die gleiche Umgebung grenzen. Dann ist bei beiden Grenzübertritten Gl. (4.4) mit den gleichen Brechzahlen anzuwenden. Folglich ist der Austrittswinkel gleich dem Eintrittswinkel; der „Strahl“ wird insgesamt nur um ein Stück parallel verschoben. Ist dagegen ein Medium durch zwei gegeneinander

Geneigte Ebenen begrenzt, so wird ein durchgehendes Lichtbündel insgesamt abgelenkt.

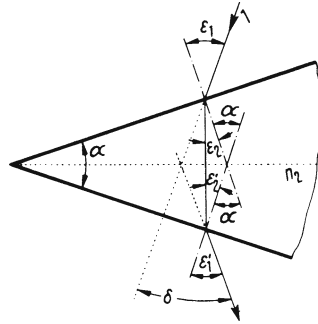
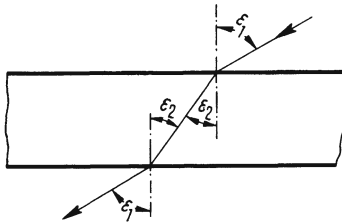


Bild 4.13 Brechung an zwei parallelen Grenzflächen **Bild 4.14** Brechung am Prisma

□ **Versuch 2.** Zwei gegeneinander um den Winkel α geneigte Ebenen (Bild 4.14) begrenzen zusammen mit drei weiteren, hier nicht interessierenden Flächen ein Prisma aus Glas mit der Brechzahl n_2 . Die Schnittlinie der beiden Ebenen heißt brechende Kante, jede Ebene senkrecht zu dieser ist ein sog. Hauptschnitt durch das Prisma. In einem solchen durchdringt ein Lichtbündel 1 das Prisma und wird dabei um den Winkel δ abgelenkt. Verkleinert man den Einfallswinkel ε_1 , so wird der Ablenkungswinkel δ zunächst auch kleiner, bis das Licht im Innern des Glases gerade senkrecht zur Winkelhalbierenden des brechenden Winkels α verläuft (symmetrischer Strahlengang). Bei weiterer Verkleinerung von ε_1 nimmt δ wieder zu, d.h. bei symmetrischem Strahlengang liegt ein Minimum der Ablenkung vor.

Bringt man verschiedene Prismen mit anderen brechenden Winkeln α und anderen Brechzahlen in den Strahlengang, so sieht man, dass der Ablenkungswinkel δ auch von diesen Größen abhängt. □

Anwendungen. Die genaueste Messung der Brechzahl eines Festkörpers geschieht an einem Prisma, die einer Flüssigkeit meist durch Bestimmung des Grenzwinkels der Totalreflexion nach Gl. (4.5). Im Übrigen sind die folgenden Abschnitte der Strahlenoptik hauptsächlich Anwendungen des Brechungsgesetzes.

4.1.2.3 Brechung an gekrümmten Grenzflächen, Linsen

Ein Parallellichtbündel soll mit Hilfe der Brechung konvergent gemacht werden, d.h. es soll in einem sog. Brennpunkt F' fokussiert werden (vgl. Abschn.4.1.1.2). Das kann man zunächst in einem Gedankenexperiment folgendermaßen bewerkstelligen: Man stellt das Parallelbündel zunächst vereinfacht durch mehrere einzelne Strahlen dar (Bild 4.15); dann kann man

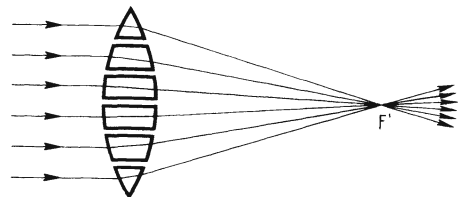


Bild 4.15 Fokussierung durch verschiedene Prismen

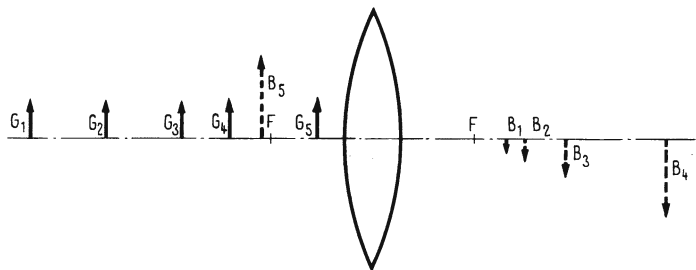
sich für jeden „Strahl“ einen Teil eines Prismas denken, jedes mit einem anderen brechenden Winkel α , sodass die verschiedenen Ablenkungswinkel δ gerade die Fokussierung im Brennpunkt F' ergeben. Gibt man nun die Vereinfachung der „einzelnen Strahlen“ auf und stellt sich ein kontinuierliches Bündel vor, dann müssen die einzelnen brechenden Winkel stetig ineinander übergehen; man erhält statt der einzelnen Prismenteile einen geschlossenen Körper, eine sog. Linse. Theoretisch ergeben sich dafür kompliziertere Begrenzungsflächen, die näherungsweise durch Kugelflächen mit bestimmten Krümmungsradien r_1 und r_2 ersetzt werden können. Aus Herstellungsgründen werden fast ausschließlich solche sphärischen Linsen verwendet. Der Abstand des oben genannten Brennpunktes F' von der Linse wird Brennweite f' genannt; der Kehrwert davon heißt Brechkraft $D = 1/f'$ (Einheit: 1 Dioptrie = 1dpt = 1/m). Beide Größen charakterisieren die wichtigste Eigenschaft einer Linse in einer bestimmten Umgebung; ihr Zusammenhang mit den Krümmungsradien r_1 , r_2 , mit der Linsendicke d und mit der Brechzahl n des Linsenmaterials gegen die Umgebung ist

$$\frac{1}{f'} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{(n-1)^2}{n} \frac{d}{r_1 r_2} \quad (4.6)$$

wie hier nicht hergeleitet werden soll. (Wegen des Vorzeichens s. S. 363)

□ **Versuch 3. Abbildung.** Das Licht eines beleuchteten oder selbstleuchtenden Gegenstandes („Objekt“) fällt z.T. auf eine Linse, die z.B. in der Mitte dicker ist als am Rand (Bild 4.16); eine solche Linse heißt Sammellinse¹⁾. Ist der Gegenstand sehr weit entfernt und hält man eine mattweiße Fläche – einen „Schirm“ – in der Nähe des Brennpunktes hinter der Linse in den Strahlengang, so entsteht auf dem Schirm ein verkleinertes, umgekehrtes Bild des Gegenstandes. Nähert man den Gegenstand der Linse, so entfernt sich das Bild von ihr, d.h. man muss den Schirm in größeren Abstand bringen, damit das Bild auf ihm scharf bleibt. Außerdem wird es dabei größer. Ist der Gegenstand doppelt so weit vor der Linse wie der Brennpunkt (doppelte Brennweite), so entsteht das Bild in der doppelten Brennweite hinter der Linse und ist genauso groß wie der Gegenstand (G_3 , B_3). Nähert man den Gegenstand noch mehr, so entfernt sich das Bild sehr schnell.

Bild 4.16 Die verschieden weit entfernten und verschieden großen Bilder $B_1 \dots B_5$ der verschieden weit entfernten Gegenstände $G_1 \dots G_5$



Nähert sich der Gegenstand dem Brennpunkt (Objektweite gleich Brennweite), so geht die Bildweite gegen unendlich. Bei noch geringerer Objektweite entsteht kein reelles Bild mehr, man sieht nur noch ein vergrößertes – jetzt aufrechtes – Bild B_5 , wenn man durch die Linse auf den Gegenstand G_5 blickt (virtuelles Bild). Verwendet man dagegen eine Linse,

¹⁾ Genau genommen sind auch durchsichtige Körper, die durch zwei parallele Kugelflächen begrenzt sind, die also überall gleich dick sind, Sammellinsen, da die beiden begrenzenden Flächen verschiedenen Krümmungsradien r_1 und r_2 haben (s. Gl. (4.6)).

die am Rand dicker ist als in der Mitte – eine sog. Zerstreuungslinse –, so entsteht in keinem Fall ein reelles Bild, sondern es ist immer nur ein virtuelles zu sehen. □

Mit Linsen, die die Divergenz eines Lichtbündels verringern – sog. Sammellinsen – können reelle Bilder erzeugt werden, mit solchen, die die Divergenz vergrößern – Zerstreuungslinsen – entstehen nur virtuelle Bilder.

Parallel zur optischen Achse einfallende Lichtstrahlen schneiden sich im Brennpunkt hinter der Sammellinse. Bei Zerstreuungslinsen scheinen sie vom Brennpunkt vor der Linse zu kommen (vgl. Abschn. 4.1.2).

Bildkonstruktion

Bild 4.17 zeigt in der Mitte eine sphärische Linse, d.h. einen Körper, z.B. aus Glas, der im Wesentlichen durch zwei Kugelflächen gegen das umgebende Medium, z.B. Luft, abgegrenzt ist. Für solche Zeichnungen ist vereinbart¹⁾, das Objekt links von der Linse zu zeichnen. Daher heißt diese Seite Objektraum, die Seite, auf der das Bild entsteht (hier rechts) heißt dagegen Bildraum. Die einander entsprechenden Größen und Punkte in diesen beiden Räumen erhalten gleiche Formelbuchstaben, jedoch im Objektraum teils mit Querstrich (z.B. \bar{f}), im Bildraum mit Strich (z.B. f'). Die Linsenflächen werden von links nach rechts nummeriert, im Beispiel Bild 4.17 von 1 bis 2; Punkte, die zu diesen Linsenflächen gehören, z.B. ihre Krümmungsmittelpunkte C , bekommen die jeweils gleichen Nummern als Indizes, also z.B. C_2 und C_1 . Die strichpunktiierte Gerade durch die Krümmungsmittelpunkte C_2 und C_1 der beiden Kugelflächen heißt optische Achse, sie schneidet die Kugelflächen in den Scheiteln S_1 und S_2 . Von jedem Punkt des Gegenstandes OP (Objekt) mit der Länge y geht nach allen Seiten Licht aus. Von dem Lichtbündel, das von der Spitze P ausgeht, sind einige Strahlen gezeichnet, darunter zwei ausgezogen: Strahl I verläuft zunächst im Objektraum bis A parallel zur optischen Achse, wird dort zum Lot hin gebrochen, geht bis A' , wird dort vom Lot weg gebrochen und verläuft dann geradlinig weiter. Sein Schnittpunkt mit der optischen Achse ist der bildseitige Brennpunkt F' (vgl. Bild 4.15). Der zweite ausgezogen gezeichnete Strahl II ist derjenige, der nach den beiden Brechungen im Bildraum parallel zur optischen Achse verläuft. Sein Schnittpunkt mit der optischen Achse heißt objektseitiger Brennpunkt \bar{F} (vgl. Bild 4.15 mit umgekehrter Strahlrichtung). Die beiden Strahlen I und II sowie alle anderen Strahlen vom Objektpunkt P , die durch die Linse gehen, schneiden sich im Punkt P' , den man daher den

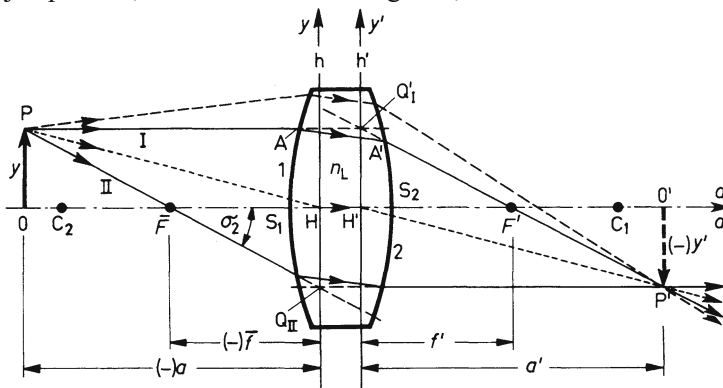


Bild 4.17 Bildkonstruktion bei einer sphärischen Linse mit den Hauptebenen h und h' . Wegen der eingeklammerten Minuszeichen $(-)$ s. Fußnote 1 der Seite 363.

¹⁾ Hierzu und zu den folgenden 4 Abschnitten vgl. DIN 1335.

Bildpunkt zu P nennt. Die gleiche Konstruktion lässt sich für alle anderen Objektpunkte durchführen, und man erhält so alle Bildpunkte, zusammen das (reelle) Bild $O'P'$.

Hauptebenen. Die obige Konstruktion des Bildes ist wegen der zweimaligen Brechung (anstelle der einmaligen Reflexion in Abschn. 4.1.1.2) recht umständlich. Sie lässt sich jedoch folgendermaßen vereinfachen: In Bild 4.17 ist der erste, achsenparallele Teil des Strahls I über A hinaus verlängert, außerdem ist der zweite, durch den Brennpunkt F' gehende Teil dieses Strahls nach rückwärts über A' hinaus verlängert, der Schnittpunkt dieser beiden Verlängerungen heißt Q_I' . Das Gleiche ist für den Strahl II durchgeführt: Die beiden Teile des Strahls, die außerhalb der Linse verlaufen, sind gerade verlängert, die Verlängerungen schneiden sich in Q_{II} . Ebenso kann man solche Hilfspunkte Q_i oder Q_i' für alle anderen Strahlen konstruieren. Entscheidend ist nun, dass bei Einhaltung von zwei Bedingungen alle diese Hilfspunkte auf zwei Ebenen h und h' , den sog. Hauptebenen, liegen (in Bild 4.17 als die beiden Geraden h und h' sichtbar). Die beiden Bedingungen sind:

1. Alle Neigungswinkel (z.B. σ_2 in Bild 4.17) der Strahlen, die zur Abbildung beitragen, müssen so klein sein, dass mit genügender Genauigkeit gilt: $\sin \sigma \approx \tan \sigma \approx \sigma$.
2. Alle Strahlen, die zur Abbildung beitragen, müssen (relativ zu den übrigen Abmessungen) kleine Abstände von der optischen Achse haben.

In Bild 4.17 sind beide Bedingungen aus Gründen der Anschaulichkeit keineswegs eingehalten. Die Schnittpunkte der optischen Achse mit den Hauptebenen heißen Hauptpunkte H und H' . Der Wert der Hauptebenen besteht darin, dass mit ihnen die Bildkonstruktion wesentlich einfacher wird: Der „Parallelstrahl“ von irgend einem Objektpunkt wird bis h' gezeichnet und dort so geknickt, dass er durch F' geht; der „Brennpunktstrahl“ vom gleichen Objektpunkt wird bis h gezeichnet und dort so geknickt, dass er parallel zur optischen Achse verläuft. Der Schnittpunkt beider „Strahlen“ ist der gesuchte Bildpunkt.

Da man hiernach die gekrümmten Grenzflächen gar nicht mehr braucht, werden sie meist auch gar nicht gezeichnet, sondern die Linse wird durch ihre beiden Hauptebenen dargestellt. Die Strahlen werden bis zur ersten Hauptebene gezeichnet, dort so gebrochen, dass sie zur nächsten Hauptebene achsenparallel verlaufen, und an dieser zweiten Hauptebene werden sie so gebrochen, dass sie durch den Bildpunkt gehen. In Bild 4.17 ist das für den punktierten Strahl bereits so durchgeführt. Wie man sieht, wird dieser durch die Hauptpunkte gehende Strahl im Ganzen gar nicht gebrochen, sondern nur parallel versetzt.

Bezeichnungen, Vorzeichen. Die beiden Hauptpunkte H und H' sollen gleichzeitig die Nullpunkte zweier Koordinatensysteme sein mit den positiven Achsen y bzw. y' senkrecht nach oben und a bzw. a' in Richtung der optischen Achse in Lichtrichtung, meist also nach rechts. Die Koordinaten eines jeden Punktes im Objektraum werden im Koordinatensystem $\{y; a\}$ angegeben, die im Bildraum im Koordinatensystem $\{y'; a'\}$. Der Objektpunkt P hat z.B. die Koordinaten y ($= OP = \text{Objektgröße}$) und $(-)a^{(1)}$ ($= HO = \text{Objektweite}$); der zugehörige Bildpunkt P' hat die Koordinaten $(-)y'^{(1)}$ ($= O'P' = \text{Bildgröße}$) und a' ($= H'O' = \text{Bildweite}$). Ebenso ergeben sich für den objektseitigen Brennpunkt \bar{F} die Koordinaten 0 und \bar{f} ($(-)f^{(1)}$) ($= H\bar{F} = \text{objektseitige Brennweite}$), für den bildseitigen Brennpunkt \bar{F} die Koordinaten 0 und f' ($= H'O' = \text{bildseitige Brennweite}$). Die Krümmungsradien r sind jeweils die gerichteten Strecken vom Scheitel S der betreffenden Linsenfläche zu ihrem Krümmungsmittelpunkt C im zugehörigen Koordinatensystem, also hier (Bild 4.17) $S_1C_1 = r_1$ und $S_2C_2 = (-)r_2^{(1)}$. Die Linsendicke wird als gerichtete Strecke $d = S_1S_2$ gezählt.

¹⁾ Die in Klammern gesetzten Minuszeichen sollen keine Rechenzeichen sein, sondern nur daran erinnern, dass die Zahlenwerte dieser Größen wegen der Wahl der Koordinatennullpunkte < 0 sind.

Falls das Medium im Objektraum die gleiche Brechzahl hat wie das im Bildraum, sind die Beträge der beiden Brennweiten gleich: $|\bar{f}| = |f'|$; ist auch noch die Linse symmetrisch, d.h. haben ihre beiden Krümmungsradien gleichen Betrag $|r_1| = |r_2|$, dann liegen die Hauptebenen symmetrisch zur Mittelebene der Linse wie in Bild 4.17. Bei sehr dünnen Linsen dieser Art ist der Abstand der Hauptebenen so klein, dass er vernachlässigt werden kann, d.h. dass man Brennweite, Objektweite und Bildweite von der Linsenmitte oder einem Scheitel aus messen kann. Bei unsymmetrischen Linsen, bei einer Linse in verschiedenen Medien (z.B. Augenhornhaut, s. Abschn. 4.2.1, Funktion) oder bei Linsensystemen (s. unten) können dagegen die Hauptebenen weit voneinander entfernt, außerhalb der Linsen, auch einseitig liegen wie z.B. bei der linken Linse in Bild 4.18. In diesen Fällen sind also die Hauptebenen unbedingt notwendig, um überhaupt Bezugspunkte für Brenn-, Objekt- und Bildweiten zu haben und um die Bildkonstruktion durchführen zu können.

Abbildungsgleichungen. Da in Bild 4.17 die Dreiecke OPH und O'P'H' ähnlich sind, gilt für das Verhältnis von Bildgröße y' zur Objektgröße y , den sog.

Abbildungsmaßstab

$$\beta' = y'/y = a'/a \quad (4.7)$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke H'Q_IF' und O'P'F' sowie HQ_{II} \bar{F} und OP \bar{F} ergeben sich mit Gl. (4.7) und nach einigen algebraischen Umformungen die sog.

Abbildungsgleichungen:

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{a'} - \frac{1}{a} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\bar{f}} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a'} \quad (4.8)$$

Diese Abbildungsgleichungen gelten auch für Zerstreungslinsen und ihre virtuellen Bilder, wenn man berücksichtigt, dass bei diesen der objektseitige Brennpunkt \bar{F} rechts von der Linse, der bildseitige Brennpunkt links von der Linse liegt, also $f' < 0$ und $\bar{f} > 0$ ist.

Kombination von Linsen

In Bild 4.18 sind zwei Linsen mit den Brennweiten $\bar{f}_a; f'_a$ und $\bar{f}_b; f'_b$ so angeordnet, dass sie eine gemeinsame optische Achse haben und der Abstand ihrer Hauptebenen h'_a und h_b gleich e ist. Dieses Linsensystem bildet auch ab, z.B. fokussiert es ein achsenparalleles Lichtbündel in einem gemeinsamen Brennpunkt F. Für die zugehörige Brennweite gilt

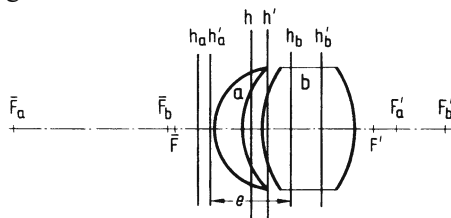


Bild 4.18 Linsensystem aus zwei Sammellinsen

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f'_a} + \frac{1}{f'_b} - \frac{e}{f'_a f'_b} \quad (4.9)$$

und entsprechend für die objektseitige Brennweite des Systems

$$\frac{1}{\bar{f}} = \frac{1}{\bar{f}_a} + \frac{1}{\bar{f}_b} - \frac{e}{\bar{f}_a \bar{f}_b} \quad (4.10)$$

und dementsprechend für die Brechkräfte D :

$$D' = D'_a + D'_b - e D'_a D'_b \quad \text{und} \quad \bar{D} = \bar{D}_a + \bar{D}_b - e \bar{D}_a \bar{D}_b$$

Falls e genügend klein ist, kann $e f'_a f'_b$ bzw. $e \bar{f}_a \bar{f}_b$ und $e D'_a D'_b$ bzw. $e \bar{D}_a \bar{D}_b$ vernachlässigt werden, sodass vereinfacht gilt: Die Brechkräfte von Linsen addieren sich zur gemeinsamen Brechkraft des Linsensystems.

Der Abstand der Hauptebene h des Systems von der Hauptebene h_a der ersten Linse ist

$$l = \bar{f} \frac{(\bar{f}_a + e - f'_a - \bar{f}_b) \bar{f}_a}{e - f'_a - \bar{f}_b}$$

und der Abstand der Hauptebene h' von h_b ist

$$l' = f' - \frac{(f'_b + e - f'_a - \bar{f}_b) f'_b}{e - f'_a - \bar{f}_b}$$

Wichtig! Die Gesamtbrennweiten gehen jeweils vom Brennpunkt zur zugehörigen Hauptebene.

Abbildungsfehler

Eine fehlerfreie Abbildung besteht darin, dass jedem Punkt eines Gegenstandes eindeutig ein Bildpunkt zugeordnet ist und dass die geometrische Anordnung der Bildpunkte der der Gegenstandspunkte geometrisch ähnlich ist. Wie am Anfang von Abschn. 4.1.2.3 schon erwähnt, bildet eine sphärische Linse nur näherungsweise nach dieser Bedingung ab. Die auftretenden Abweichungen von der idealen Abbildung nennt man Abbildungsfehler oder Linsenfehler; die wichtigsten sind: Der sphärische Fehler, auch „sphärische Aberration“ oder „Öffnungsfehler“ genannt, und der Astigmatismus. Außerdem sind noch zu nennen: Die mit dem Astigmatismus verknüpfte Bildfeldwölbung sowie die Koma und die Verzeichnung. Zu diesen durch die Geometrie der Linsen verursachten Fehlern kommt noch ein durch ihr Material bedingter: Die Brechzahl n einer Glassorte ist für verschiedenfarbiges Licht verschieden (vgl. Abschn. 5.2.6.2) und damit nach Gl. (4.6) auch die Brennweite einer Linse. Dies bewirkt den Farbfehler, die sog. chromatische Aberration.

Unter sphärischem Fehler versteht man folgendes: Ein Lichtbündel, das parallel zur optischen Achse auf eine Sammellinse trifft, sollte nach dem Durchgang durch die Linse eigentlich im Brennpunkt zusammenlaufen. Jedoch wird der achsennahe zentrale Teil des Bündels zu wenig, der äußere, randnahe Teil zu stark fokussiert (bei Zerstreuungslinsen: defokussiert), weil die Krümmung der Kugelschalen, die die Linse begrenzen, in der Mitte relativ zu schwach, am Rande relativ zu stark ist. Ganz ähnlich ist es beim sphärischen Konkavspiegel in Abschn. 4.1.1.2 und man sieht in Bild 4.3a auch die Auswirkung: Es gibt keinen exakten Brennpunkt, sondern nur einen „Verjüngungsbereich“. Während man bei Spiegeln zur Korrektur auf paraboloidförmige übergeht (Bild 4.3b), bleibt man bei Linsen fast immer bei kugelförmigen Oberflächen und korrigiert, indem man je eine Sammel- und eine Zerstreuungslinse kombiniert, beide mit gleichen Krümmungsradien aber aus Gläsern verschiedener Brechzahlen. Dadurch heben sich die sphärischen Fehler der beiden Linsen auf, aber nach Gl. (4.6), (4.9) und (4.10) ergibt sich eine gemeinsame Brechkraft der Kombination. Durch die Auswahl der beiden Glassorten kann man gleichzeitig den oben erwähnten Farbfehler erheblich abschwächen.

Die Wirkung¹⁾ des Astigmatismus, genauer gesagt des Astigmatismus schiefer Bündel, soll anhand von Bild 4.19 erläutert werden. In diesem Schrägbild ist ein Linsensystem (allerdings nur durch seine beiden Hauptebenen h und h') dargestellt. Der sphärische Fehler sei bereits korrigiert, spielt also keine Rolle. Auf der strichpunktierten optischen Achse AA ist ein Objekt OP . Die Ebene, die durch AA und OP aufgespannt wird, soll im Folgenden „Meridionalebene“ m heißen. Sie steht senkrecht auf den Hauptebenen h und h' und ist in allen Schnittbildern dieses Kapitels die Schnitt- und Zeichenebene.

Von der Spitze P des Objektes möge nach allen Seiten Licht ausgehen, gezeichnet ist nur das Bündel, das durch das Linsensystem geht. Die Kreise auf h und h' stellen die Bündelbegrenzungen auf diesen Ebenen dar. Sie können von einer eigenen Blende oder von den Rändern und Fassungen der Linsen herrühren. Das Lichtbündel selbst ist durch vier Randstrahlen und den Hauptstrahl (lang gestrichelt) dargestellt. Die beiden Randstrahlen PM_1 und PM_2 liegen in der Meridionalebene m , die beiden anderen PT_1 und PT_2 in einer dazu senkrechten Ebene. Der Hauptstrahl PH gehört beiden Ebenen an.

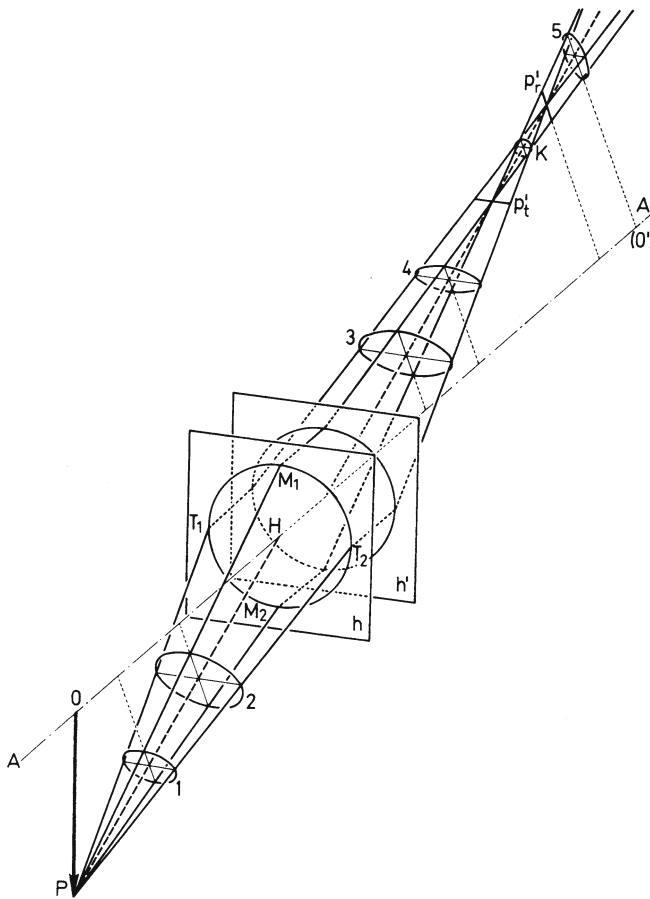


Bild 4.19 Astigmatismus eines schiefen Strahlenbündels

¹⁾ Die geometrisch-optische Begründung des Astigmatismus würde hier zu weit führen. Aus dem gleichen Grund muss hier auf die Beschreibung eines weiteren Abbildungsfehlers, der bei schiefen Bündeln auftritt, der Koma, verzichtet werden.

Wegen der Neigung des Bündels gegen h und h' ist der Bündelquerschnitt – senkrecht zum Hauptstrahl – elliptisch (1 und 2). Die kleinen Ellipsenachsen liegen in m , ihre punktierten Verlängerungen schneiden AA ; die Ellipsen vor dem Linsensystem sind einander alle geometrisch ähnlich. Anders dagegen – und das ist entscheidend – hinter dem Linsensystem: Die Querschnittsellipsen ändern jetzt mit zunehmendem Abstand von h' ihre Exzentrizität, werden im gezeichneten Fall immer flacher (3 und 4), entarten zu einem Strich senkrecht auf m – genannt „tangentialer Bildstrich P_t' “ – dann zum „kleinsten Zerstreungskreis K' “, dann zu einem Strich in der Meridionalebene m – genannt „radialer Bildstrich P_r' “ – um schließlich die Form einer aufgestellten Ellipse (5) anzunehmen.

Es entsteht also nirgends ein Bildpunkt (daher der Name Astigmatismus = Nichtpunktformigkeit). Nur wenn das Objekt die Länge Null hätte ($P \dots O$ auf der optischen Achse), würden P_t' , K' und P_r' zum weiter entfernten Bildpunkt (O') auf AA zusammenfallen.

Der Abstand $P_t'P_r'$ heißt „astigmatische Differenz“. Er wächst mit zunehmendem Winkel zwischen Hauptstrahl und optischer Achse, d.h. mit größer werdendem Objekt, während sich die Abstände von h' bis P_t' , K' und P_r' gleichzeitig (und ungleichmäßig) verkleinern.

Wenn also statt des einzelnen Objektpunktes P eine ganze Objektebene senkrecht zu AA vorliegt, so entsprechen ihr auf der Bildseite drei verschieden stark gewölbte, schalenförmige Flächen, die sich in (O') berühren: Die erste enthält alle tangentialen Bildstriche, die zweite alle kleinsten Zerstreungskreise und die dritte alle radialen Bildstriche. Diese Erscheinung nennt man Bildfeldwölbung.

Die Reihenfolge des tangentialen und des radialen Bildstriches hängt von der Linsenform ab. Z.B. ist sie bei einer Meniskuslinse (a in Bild 4.18) umgekehrt wie hier. Daher kann man durch Kombination von mindestens zwei, meist aber vier und mehr Linsen den Astigmatismus stark abschwächen und die drei Bildflächen fast zu einer, annähernd ebenen zusammenbringen. Die anderen oben genannten Abbildungsfehler lassen sich gleichzeitig korrigieren. Ein derartiges Linsensystem heißt dann „Anastigmat“.

4.2 Abbildende Systeme

4.2.1 Das Auge

Aufbau. Bild 4.20 zeigt die optisch interessierenden Einzelheiten in einem Schnitt durch das menschliche Auge. Die äußere Hülle ist auf der Vorderseite als Hornhaut 1 durchsichtig. Dahinter befindet sich eine Blende, die Iris 2 mit einer Öffnung mit veränderlichem Durchmesser, der Pupille. Dahinter liegt die bikonvexe Augenlinse 3 aus elastischem Material. Zwischen Hornhaut und Augenlinse befindet sich das sog. Kammerwasser. Das übrige Innere ist durch eine gallertartige durchsichtige Substanz, den sog. Glaskörper, ausgefüllt. Die hintere Innenseite ist von der Netzhaut oder Retina 4 bedeckt, die in den Sehnerv 5 – die Verbindung zum Gehirn – mündet. Die Retina besteht u.a. aus den rund 125 Millionen eigentlichen lichtempfindlichen Zellen, etwa 119 Millionen „Stäbchen“ und ca. 6 Millionen „Zäpfchen“. Die Stäb-

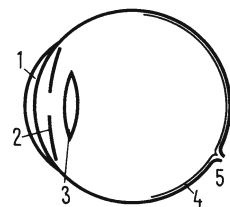


Bild 4.20 Schematischer Aufbau des Auges

chen sind für den Empfang sehr geringer Lichtmengen, also für das Sehen bei Dämmerung da; sie vermitteln keinen Farbeindruck. Die Zäpfchen dagegen dienen dem Lichtempfang bei stärkerer Beleuchtung, dem Tagsehen, und vermitteln auch den Eindruck der Farbe. Ihr Abstand ist in der Mitte der Netzhaut gegenüber der Linse am geringsten: etwa $4\ \mu\text{m}$.

Funktion. Das Abbildungssystem besteht aus der konvexen Hornhaut mit dem Kammerwasser dahinter und der Brechkraft von etwa $43\ \text{dpt}^{1)}$ und der bikonvexen Augenlinse mit einer Brechkraft von maximal $15\ \text{dpt}$. Dieses Abbildungssystem erzeugt von einem lichtaussendenden Objekt ein Bild. Damit es scharf ist, müssen die Abbildungsgleichungen (4.8) erfüllt sein. Darin sind hier die Brennweiten f' und \bar{f} voneinander verschieden, da das Medium vor dem Abbildungssystem (meist Luft) eine kleinere Brechzahl hat als das dahinter (praktisch Wasser); die Bildweite a' ist durch die Länge des Auges – normalerweise $22,8\ \text{mm}$ – vorgegeben. Für die Abbildung verschiedener Objekte mit unterschiedlichen Objektweiten \bar{a} wird die Gesamtbrennweite verändert. Dazu dienen Muskeln, die an der Augenlinse angreifen und ihre Krümmungsradien durch Zusammenziehen verkleinern können, sodass sich ihre Brennweiten nach Gl. (4.6) verkleinern²⁾. Dieses Einstellen – Akkommodieren genannt – wird unbewusst so gesteuert, dass das Objekt, das betrachtet werden soll, in der Mitte der Netzhaut scharf abgebildet ist. Das normale Auge kann so auf Objektweiten zwischen ∞ und etwa $100\ \text{mm}$ akkommodieren. Eine Objektweite von $250\ \text{mm}$ gilt als noch bequem einzustellende sog. deutliche Sehweite.

Die Iris stellt, ebenfalls unbewusst gesteuert, den Pupillendurchmesser so ein, dass die gesamte durchgelassene Lichtenergie pro Zeit der Empfindlichkeit der Retina entspricht. Diese Einstellung nennt man Adaption, oft auch Adaptation.

Auflösung. Zwei Punkte eines Objektes können dann noch getrennt wahrgenommen werden, wenn sie unter einem Sehwinkel $\varphi \geq 40''$ erscheinen, weil dann ihre beiden Bildpunkte auf der Netzhaut auf zwei verschiedene Empfängerelemente – die oben erwähnten Zäpfchen – treffen (s. auch Abschn. 5.2.6.4).

Augenfehler. Bei Kurzsichtigkeit ist meist die Länge des Auges größer als normal, sodass alle Bildpunkte schon vor der Netzhaut entstehen. Zur Korrektur wird eine Zerstreuungslinse vor dem Auge getragen³⁾.

Bei Übersichtigkeit (früher „Weitsichtigkeit“) ist dagegen die Augenlänge meist kürzer als normal und scharfe Bilder entstehen erst hinter der Netzhaut; dementsprechend muss zur Korrektur eine Sammellinse vor das Auge gebracht werden.

Alters- oder Weitsichtigkeit bedeutet, dass die Linse zunehmend unelastisch wird, sodass das Akkommodieren auf kleine Objektweiten nicht mehr gelingt. Die korrigierende Sammellinse kann und muss dann nur für das Nahsehen benützt werden.

Astigmatismus, d.h. nichtpunktförmige Abbildung (vgl. Abbildungsfehler in Abschn. 4.1.2.3), tritt beim Auge auf, wenn die Grenzflächen der Linse oder der Hornhaut nicht kugelförmig sind, sondern in verschiedenen Ebenen verschiedene Krümmungsradien haben. Zur Korrektur müssen auch nichtkugelförmige Linsen, z.B. Zylinderlinsen, getragen werden.

¹⁾ Diese hohe Brechkraft kommt zustande durch den großen Unterschied der Brechungsindizes von Luft und Hornhaut.

²⁾ Das System Hornhaut–Augenlinse wirkt wie ein „Zoom-Objektiv“ bei einer Kamera.

³⁾ Auch operative Verringerung des Krümmungsradius der Hornhaut ist eine Möglichkeit der Korrektur.

4.2.2 Optische Instrumente

Kamera

Die fotografische Kamera (Bild 4.21) ist sozusagen die technische Nachbildung des Auges. Ein Linsensystem – das Objektiv 1 – entwirft ein Bild auf der lichtempfindlichen Schicht 2 des Filmes, der Platte; oder der CCD-Oberfläche¹⁾ die pro Zeit eintretende Lichtenergie wird durch eine Lochblende mit veränderlichem Durchmesser („Irisblende“) 3 geregelt. Die Anpassung an verschiedene Objektweiten geschieht hier – im Gegensatz zum Auge – durch Veränderung der Bildweite. Die Helligkeit des Bildes ist der pro Zeit eintretenden Lichtenergie und damit dem Quadrat des wirksamen Blendendurchmessers d_B proportional und der Größe des Bildes und damit nach Gl. (4.7) und (4.8) dem Quadrat der Brennweite f umgekehrt proportional. Für die richtige Belichtung ist daher neben der Belichtungszeit der Quotient d_B/f' , die „relative Öffnung“, maßgebend. Meist wird der Kehrwert $f/d_B = k$, die Blendenzahl oder kurz „Blende“ angegeben; z.B. die Werte 22; 16; 11; 8 usw. Der Maximalwert von $1/k$, das sog. Öffnungsverhältnis, ist eine wichtige Kenngröße des Objektivs.

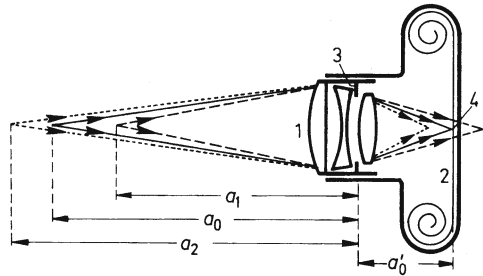


Bild 4.21 Fotografische Kamera

Schärfentiefe. Wenn das Kameraobjektiv – wie in Bild 4.21 gezeichnet – auf eine bestimmte Bildweite a'_0 eingestellt ist, werden nur Objektpunkte in einer bestimmten Objektweite a_0 als Punkte auf der Filmebene 2 abgebildet (ausgezogene Strahlen). Die Bilder von Objektpunkten mit geringerer Objektweite a_1 entstehen hinter der Filmebene (gestrichelte Strahlen), diejenigen von Punkten mit größerer Objektweite a_2 vor der Filmebene (punktierter Strahlen). In der Filmebene entsteht von diesen Objektpunkten statt eines Bildpunktes ein Bildfleck 4. Wenn dessen Durchmesser kleiner als ein Maximalwert – die maximale Unschärfe u – ist, sieht unser Auge den Fleck noch als Punkt. Dadurch wird statt der einen Objektweite a_0 ein ganzer Bereich von a_1 bis a_2 – die Schärfentiefe – (für unser Auge!) scharf abgebildet. Aus einfachen geometrischen Überlegungen ergibt sich mit Gl. (4.8), wie hier nicht ausgeführt werden soll,

$$\frac{1}{a_1} = \frac{1}{a_0} + \frac{u}{fd_B} \quad \text{und} \quad \frac{1}{a_2} = \frac{1}{a_0} - \frac{u}{fd_B}$$

Demnach ist bei vorgegebener maximaler Unschärfe u – z.B. $2 \cdot 10^{-5}$ m bei 35 mm-Filmen – die Schärfentiefe umso größer, je größer die eingestellte Objektweite a_0 , je kleiner die Brennweite f und je kleiner der Blendendurchmesser d_B ist.

Lupe

Ein kleiner Gegenstand, den man dem Auge auf 100 mm nähert, wird auf der Netzhaut 2,5mal größer abgebildet, als wenn er in der deutlichen Sehweite oder auch „Bezugssehweite“ 250 mm wäre. Eine stärkere Annäherung und damit eine noch größere (scharfe) Abbildung ist normalerweise nicht möglich, da die Brennweite der Augenlinse nicht stärker verkleinert werden kann. Durch Vorsetzen einer zweiten Sammellinse verkleinert sich jedoch nach Gl. (4.9) die gemeinsame Brennweite; also ist eine geringere Objektweite und damit eine größere Abbildung möglich. Man nennt eine zu diesem Zweck vor das Auge gehaltene Sammellinse eine Lupe.

¹⁾ CCD = Charged Coupled Device, ein sehr feines Raster aus lichtempfindlichen Halbleitern, sog. Pixeln.

Definition: Das Verhältnis des Schwinkels φ , unter dem man einen Gegenstand mit Hilfe eines optischen Instrumentes (z.B. Lupe) sieht, zum Schwinkel φ_0 , unter dem man ihn ohne Instrument sieht, heißt Vergrößerung Γ (Bild 4.22),

$$\Gamma = \varphi / \varphi_0 \quad (4.11)$$

Bringt man den Gegenstand in die Brennebene der Sammellinse, so entsteht ein virtuelles Bild, das man mit auf ∞ akkommodiertem, also entspanntem Auge betrachtet. Für den Schwinkel φ_L , unter dem man dann den Gegenstand sieht, ergibt sich mit der objektseitigen Brennweite f_L der Sammellinse und der Objektgröße y : $\tan \varphi_L = \frac{y}{f_L} \approx \varphi_L$, während für den Schwinkel bei unbewaffnetem Auge und Objektweite = Bezugssehweite = 250 mm gilt:

$$\tan \varphi_0 = \frac{y}{250 \text{ mm}} \approx \varphi_0.$$

Das Verhältnis beider Winkel ist nach Gl. (4.11) die Normvergrößerung der Lupe

$$\Gamma_L = \frac{250 \text{ mm}}{f_L} \quad (4.12)$$

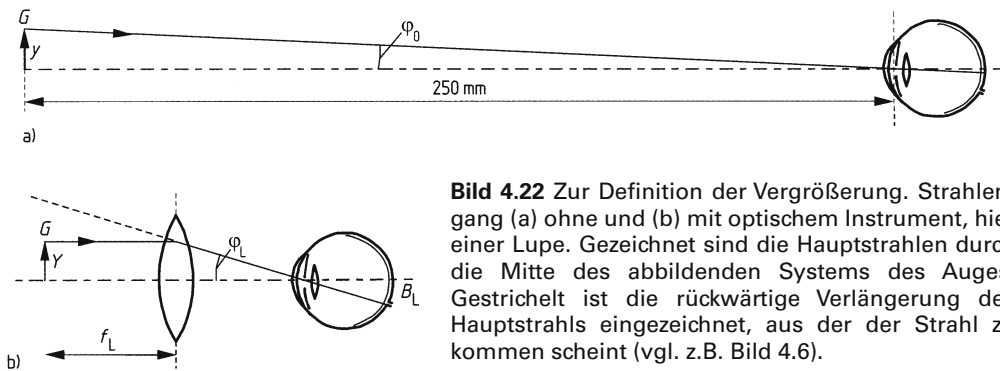


Bild 4.22 Zur Definition der Vergrößerung. Strahlen-gang (a) ohne und (b) mit optischem Instrument, hier einer Lupe. Gezeichnet sind die Hauptstrahlen durch die Mitte des abbildenden Systems des Auges. Gestrichelt ist die rückwärtige Verlängerung des Hauptstrahls eingezeichnet, aus der der Strahl zu kommen scheint (vgl. z.B. Bild 4.6).

Auf diese Weise kann man Vergrößerungen von maximal 10 bis 20 (je nach Anforderung an die Bildqualität) erreichen¹⁾. Für stärkere Vergrößerungen oder bessere Bildqualität braucht man ein Mikroskop.

Mikroskop

Dieses besteht im Prinzip aus zwei Linsen (Bild 4.23a): dem Mikroskopobjektiv 1 mit der Brennweite f_{ob} und dem Okular 2 mit der Brennweite f_{ok} . Das Objekt 3 wird bis nahe an den Brennpunkt des Objektivs 1 gebracht ($a \approx f_{ob}$). Dadurch entsteht im relativ großen Abstand a' ein reelles vergrößertes Bild 4. Dieses betrachtet man durch das als Lupe wirkende Okular. Das Bild 4 ist nach Gl. (4.7) um den Faktor $\beta' = a'/a \approx a'/f_{ob}$ vergrößert und erscheint dem Auge nach Gl. (4.12) unter der Vergrößerung $\Gamma_L = 250 \text{ mm}/f_{ok}$. Die Gesamtnormvergrößerung des Mikroskops ist also

¹⁾ Eine Kugel aus Flintglas mit 2,3 mm Radius ergäbe theoretisch eine Vergrößerung $\Gamma_L = 100$, aber sicher bei miserabler Bildqualität.

$$\Gamma_M = \beta' \Gamma_L = \frac{a' \cdot 250 \text{ mm}}{f_{\text{ob}} f_{\text{ok}}}$$

Darin ist a' durch die Länge des Rohres, das an seinen Enden Objektiv und Okular trägt, begrenzt.

Wegen des großen Öffnungswinkels des Lichtbündels oberhalb der Bildebene 4 (Bild 4.23a) muss das Okular einen großen Durchmesser haben; andernfalls wird das Gesichtsfeld und die Lichtstärke eingeschränkt. Dadurch kann aber die Brennweite f_{ok} nicht klein und folglich die Vergrößerung Γ_M nicht groß gemacht werden. Aus diesem Grund sind Mikroskopokulare praktisch immer wie (2) in Bild 4.23b aufgebaut: aus einer Feldlinse 6 und einer „Augenlinse“ 7. Die Feldlinse, dicht vor der Bildebene angeordnet, verkleinert das reelle Bild 4 nur unwesentlich, verringert aber die Divergenz des Bündels, sodass die „Augenlinse“ einen kleineren Durchmesser haben kann und bei Bedarf auch eine kleinere Brennweite und damit eine stärkere Vergrößerung.

Zur Korrektur der Abbildungsfehler bestehen die Objektive praktisch immer, die Okulare oft aus mehreren Linsen.

Bei den meisten Mikroskopen sind mehrere Objektive und Okulare mit verschiedenen Brennweiten auswechselbar. Jedes trägt als Bezeichnung den Zahlenwert von β' , bzw. Γ_L . Die Gesamtvergrößerung erhält man durch Multiplikation dieser Zahlen.

Wegen der Wellennatur des Lichtes sind Objektpunkte mit kleinerem Abstand als etwa 350 nm im Lichtmikroskop prinzipiell nicht mehr getrennt zu sehen (s. Abschn. 5.2.6.4). Daher liefert eine Steigerung der Vergrößerung auf über 2000 keine weiteren Einzelheiten mehr. Kleinere Einzelheiten erkennt man mit dem Elektronenmikroskop oder dem Raster-Tunnelmikroskop (s. Abschn. 6.1.3.2).

Fernrohr

Bei den bisher besprochenen Geräten konnten die Gegenstände beliebig nahe ans Auge, die Lupe oder das Mikroskopobjektiv hergebracht werden. Häufig ist jedoch die Objektweite

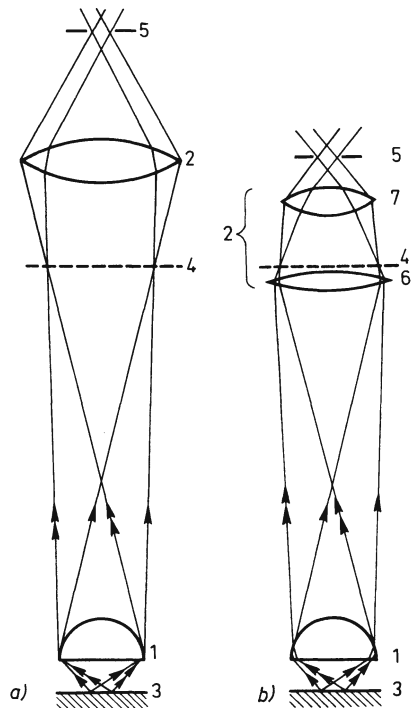


Bild 4.23 Mikroskop

a) mit einfacher Lupe als Okular

b) mit Feld- und „Augenlinse“.

Am Ende des Strahlengangs: Augenpupille 5

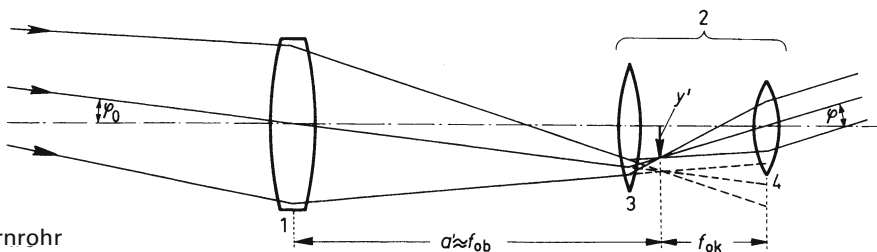


Bild 4.24 Fernrohr

fest vorgegeben. Will man dann ein Objekt vergrößert sehen, benützt man ein Fernrohr. Dieses besteht auch aus zwei korrigierten Linsensystemen, dem Fernrohrobjektiv 1, das in Bild 4.24 der Einfachheit halber als einfache Linse gezeichnet ist, und dem Okular 2. Von einem im Verhältnis zur Objektivbrennweite f_{ob} weit entfernten, nicht gezeichneten Objekt fällt von links Licht ins Objektiv, und es entstünde eigentlich (gestrichelter Strahlengang) in der Nähe des hinteren Objektivbrennpunktes ein reelles, umgekehrtes, verkleinertes Bild. Aus den gleichen Gründen wie oben beim Mikroskop ist jedoch auch hier das Okular aufgeteilt in Feldlinse 3 und Augenlinse 4. Es gilt der ausgezogene Strahlengang.

Für den Sehwinkel φ_0 ohne Fernrohr gilt: $y'/f_{ob} = \tan \varphi_0 \approx \varphi_0$ (kleiner Winkel!), dagegen für den Sehwinkel φ mit Fernrohr: $y'/f_{ok} = \tan \varphi \approx \varphi$ (kleiner Winkel!). Also ist die Vergrößerung nach Gl. (4.11)

$$\Gamma_F = \varphi/\varphi_0 \approx f_{ob}/f_{ok} \quad (4.13)$$

Die Helligkeit, die ein durch ein Fernrohr beobachtetes Objekt zu haben scheint, hängt ab

1. von der Helligkeit des Objektes selbst, 2. davon, welcher Anteil des vom Objekt ausgehenden Lichtes in das Fernrohr gelangt, also 2a) von der Objektweite und 2b) von der Eintrittsöffnung. Hiervon sind die Größen 1 und 2a) vorgegeben, und nur 2b) ist willkürlich veränderbar. Daher gibt man bei Fernrohren nicht nur die Vergrößerung nach Gl. (4.13) an, z.B. $8 \times$ („acht mal“), sondern auch den Durchmesser des Objektivs in mm. Man schreibt diesen Zahlenwert ohne Einheit direkt hinter die Vergrößerungsangabe, z.B. 8×24^1).

In Bild 4.25 fällt ein Parallellichtbündel in ein Fernrohrobjektiv 1. Das Bild der unendlich fernen Lichtquelle entsteht im Abstand der Objektivbrennweite f_{ob} . Der Abstand vom Bild zum Okular 2 ist gleich der Okularbrennweite f_{ok} , sodass das Licht das Fernrohr wieder als Parallelbündel verlässt.

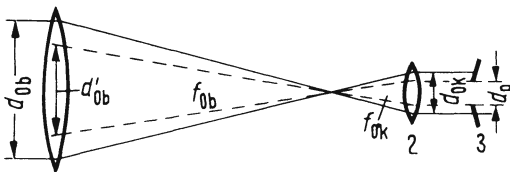


Bild 4.25 Zur wirksamen Objektivöffnung

Dadurch kann das Auge auf unendlich akkommodiert, also entspannt beobachten. Wenn der Durchmesser d_p der Augenpupille 3 – wie gezeichnet – kleiner ist als der Durchmesser d_{ok} des austretenden Lichtbündels, dann gelangt nur der gestrichelte Teil des Lichtbündels ins Auge. Für die Helligkeit ist daher nicht der ganze Objektivdurchmesser d_{ob} , sondern nur der Teil d'_{ob} wirksam. Aus dem geometrischen Strahlensatz und Gl. (4.13) ergibt sich

$$d'_{ob}/d_p = f_{ob}/f_{ok} = \Gamma_F \quad (4.14)$$

Beispiel 1. Der Pupillendurchmesser d_p beträgt bei geringer einfallender Lichtleistung etwa 7 mm. Wenn ein dafür gebautes Fernrohr, ein sog. Nachtglas, eine 8-fache Vergrößerung hat, ist nach Gl. (4.14) der wirksame Objektivdurchmesser 56 mm. Benützt man ein Fernglas nur bei Tageslicht, wenn die Pupille nur 2 bis 4 mm weit geöffnet ist, so genügt bei der gleichen Vergrößerung ein Objektivdurchmesser von etwa 24 mm.

Bei Fernrohren nach dem Prinzip von Bild 4.24 erscheinen alle damit betrachteten Gegenstände auf dem Kopf stehend und seitenverkehrt. Da das bei der Beobachtung von Sternen nicht stört, ändert man

¹⁾ Die Wurzel aus dem Produkt dieser beiden Zahlen nennt man Dämmerungszahl.

daran nichts und nennt solche Fernrohre astronomische. Bei ihnen ist in erster Linie ein großer wirk-samer Objektivdurchmesser wichtig. Bis etwa 1 m Durchmesser kann man Linsen als Objektive verwenden. Hohlspiegel erfüllen den gleichen Zweck und sind für größere Durchmesser leichter mit der nötigen Präzision herzustellen.

Bei der Beobachtung irdischer Gegenstände würden die auf dem Kopf stehenden und seitenverkehrten Bilder doch sehr stören; daher müssen sie umgekehrt werden. Dazu eignet sich z.B. zweimalige Spiegelung durch Totalreflexion in Prismen (Bild 4.26) (Prismenfernrohre, sog. Feldstecher).

Projektor

Ein Projektor dient dazu, von einem verhältnismäßig kleinen, ebenen Objekt – z.B. einer gezeichneten oder fotografierten Vorlage – ein stark vergrößertes, reelles Bild auf einer i. Allg. diffus reflektierenden Wand zu erzeugen. Damit dieses Bild hell ist, muss die Vorlage stark beleuchtet oder durchleuchtet werden, und möglichst viel von dem Licht, das von ihr ausgeht, muss durch das abbildende Objektiv gehen. Bild 4.27 zeigt das Prinzip eines Diaprojektors oder Diaskops, d.h. eines Gerätes zur Projektion durchsichtiger Vorlagen, meist fotografischer Positive, sog. „Diapositive“. Die Lichtquelle 1 steht fast im Krümmungsmittelpunkt des Hohlspiegels 2, der daher dicht neben der Lichtquelle ein Bild von ihr erzeugt. Dadurch gelangt auch das zunächst nach links abgestrahlte Lichtbündel (punktierte Randstrahlen) zur Projektion. Der Kondensator 3 – meist eine Kombination von zwei oder drei Linsen mit großem Durchmesser – erzeugt ein Bild der Lichtquelle und ihres Spiegelbildes in der Eintrittsöffnung des Objektivs 4; das Bündel ist durch die gestrichelten Randstrahlen begrenzt. Dabei geht das Licht durch das Diapositiv 5, das fast im Brennpunkt des Objektivs steht. Die ausgezogenen Randstrahlen begrenzen zwei Lichtbündel, die von zwei Punkten des Diapositivs ausgehen und auf der weiter entfernten Wand 6 fokussiert werden. Dort entsteht also das reelle, umgekehrte, vergrößerte Bild.

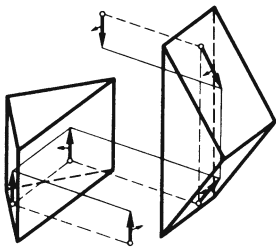


Bild 4.26 Bildumkehr durch zwei Prismen

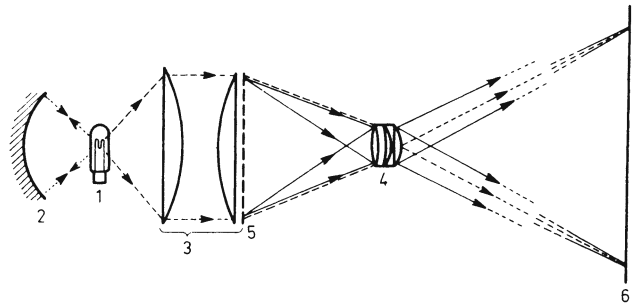


Bild 4.27 Diaskop

Um einen großen Anteil des von der Lichtquelle ausgehenden Lichtes zur Projektion auszunützen, könnte man prinzipiell auch ein Objektiv mit großem Durchmesser verwenden. Das wäre aber teuer, da es ein technisch hochwertiges, korrigiertes Linsensystem sein muss. Dagegen sind die Kondensatorlinsen trotz ihres großen Durchmessers viel billiger, da an ihre Abbildungsqualität niedrigere Anforderungen gestellt werden. Das Zusammenwirken von Kondensator und Objektiv ist vergleichbar mit dem von Feld- und Augenlinse beim Mikroskop- oder Fernrohrokular.

Zur Projektion undurchsichtiger Vorlagen dienen Episkope. In diesen wird das Objekt von der gleichen Seite, auf der auch das Objektiv ist, beleuchtet und reflektiert diffus nach allen Seiten. Nur der Teil des reflektierten Lichtes, der ins Objektiv fällt, dient zur Abbildung; ein Kondensator ist nicht anwendbar. Daher muss das Objektiv einen großen Durchmesser haben.

4.3 Lichtgeschwindigkeit

Bereits Galilei (1564 bis 1642) vermutete, dass sich das Licht mit endlicher Geschwindigkeit ausbreite. Dem Astronomen Olaf Römer (1644 bis 1710) gelang 1676 die erste Messung dieser Geschwindigkeit. Von den vielen Messmethoden soll hier die von Fizeau (1819 bis 1896) beschrieben werden.

In Bild 4.28 fokussiert eine Linse 2 das Licht einer Lampe 1 nach teilweiser Reflexion an einem halbdurchlässigen Spiegel 3 im Brennpunkt F einer zweiten Linse 5. Das so entstehende Parallellichtbündel trifft auf eine weitere Linse 6, die es in der Ebene eines Spiegels 7 fokussiert. Ist dieser genau senkrecht zur Bündelachse justiert, so kehrt das Licht auf dem gleichen Weg zurück, durchdringt zum Teil den halbdurchlässigen Spiegel 3 und kann bei 8 beobachtet werden.

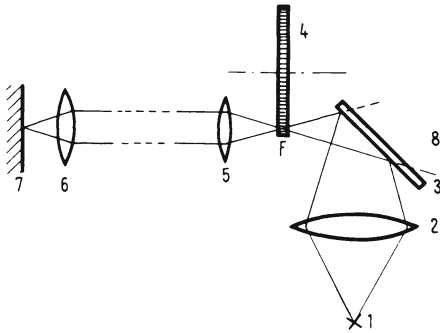


Bild 4.28 Lichtgeschwindigkeitsmessung nach Fizeau

Zahnrad N Zähne, dann ist $\Delta t = 1/(fN)$ und mit dem Abstand l zwischen Zahnrad 4 und Spiegel 7 ergibt sich die Lichtgeschwindigkeit

$$c = 2l/\Delta t = 2lfN$$

Bei der ersten Messung durch Fizeau (1849) war $l = 8,5$ km, und es ergab sich

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Bei modernen Messungen wird die mechanische periodische Unterbrechung des Lichtweges durch eine elektrische ersetzt (z.B. Kerrzelle).

Dadurch lässt sich die Frequenz wesentlich erhöhen, sodass entweder die Messstrecke verkürzt oder die Genauigkeit erhöht werden kann. Heute ist die Lichtgeschwindigkeit als exakte Naturkonstante festgelegt:

Lichtgeschwindigkeit im Vakuum

$$c_0 = 299792458 \text{ m/s}^{1)}$$

¹⁾ s. hierzu auch Physikalische Konstanten im Anhang sowie z.B. [35], Abschn. 1.1.1.1 sowie 8.2.

Aufgaben zu Abschn. 4

1. Man leite Gl. (4.1) anhand von Bild 4.4 her.
2. Wann entsteht durch einen Konkavspiegel ein virtuelles Bild?
3. Ein Lichtstrahl trifft die Grenzfläche zu einem optisch dünneren Medium ($n_2/n_1 = 0,8$). Man zeichne den Winkel ε_2 , den er mit dem Lot nach dem Grenzübertritt bildet, in Abhängigkeit vom Winkel ε_1 , den er mit dem Lot vorher bildet.
4. Ein Taucher blickt aus 1 m Tiefe senkrecht nach oben. Welchen Teil des Himmels über der Wasseroberfläche sieht er?
5. Eine Linse hat die Brennweite $f = 2$ cm. Ein Objekt der Größe $y = 1$ cm wird der Linse aus der Entfernung $a = \infty$ bis $a = 0$ genähert.
 - a) Man zeichne ein Diagramm der Bildweite a' und der Bildgröße y' in Abhängigkeit von der Objektweite a .
 - b) Wie nahe können sich reelles Bild und Objekt minimal kommen?
6. Von welcher Brennweite ab kann man eine Sammellinse sinnvoll als Lupe verwenden?

5 Schwingungs- und Wellenlehre

Schwingungen und Wellen haben sowohl inhaltlich als auch in ihrer formalen Behandlung viele Ähnlichkeiten. Deshalb ist ihre Behandlung hier unter einer Kapitelüberschrift zusammengefasst.

Die technische Bedeutung reicht von der Erzeugung und Vermeidung von Schwingungen in Maschinen über die Akustik, die Rundfunk- und Fernsehwellen bis zu den sog. Materiewellen, die nicht nur für das Verständnis der „Doppelnatur“ der Materie von Bedeutung sind, sondern auch unmittelbar in der Materialprüfung angewendet werden.

5.1 Schwingungen

In der Mechanik (Abschn. 1) werden vor allem zwei Arten der Bewegung von Massenpunkten ausführlich behandelt, die geradlinige und die kreisförmige Bewegung. Eine dritte wichtige Gruppe sind die periodisch hin- und hergehenden Bewegungen, die Schwingungen. Zu den Schwingungen gehören aber auch periodisch wechselnde Zustände von elektrischen Systemen, wobei keine Bewegung von Massenpunkten auftritt. All diese Schwingungen sollen hier unmittelbar nebeneinander behandelt werden. Welch vielfache Bedeutung Schwingungen in der Natur und vor allem in der Technik haben, sollte dabei klar werden.

5.1.1 Grundbegriffe

Der Begriff Schwingung muss so definiert werden, dass damit alles Wesentliche sowohl der mechanischen als auch der elektrischen Schwingung erfasst wird. Zur Veranschaulichung sollen zwei Experimente dienen.

□ **Versuch 1. Mechanische Schwingung.** In Bild 5.1 ist eine prismenförmige hohle Führungsschiene 1 gezeichnet. Auf ihr ruht ein dachförmiger Reiter 2 mit der Masse m .

Seine Enden sind mit der Schiene durch Schraubenfedern 3 verbunden. Schließt man das Schieneninnere an Pressluft an, so tritt diese durch viele feine Löcher in den oberen Flanken aus. Dadurch hebt der Reiter 2 etwas ab, ähnlich einem Luftkissenfahrzeug, und kann sich

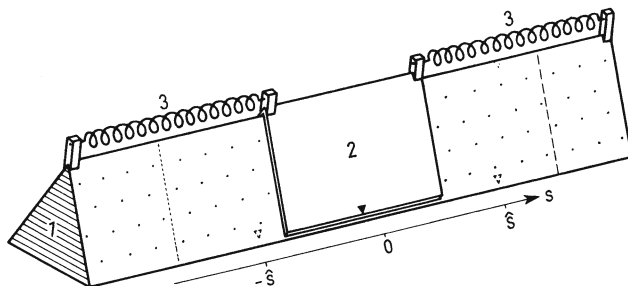


Bild 5.1 Horizontales Federpendel (auf Luftkissen) als schwingungsfähiges System

entlang der Schiene 1 mit verschwindend geringer Reibung bewegen. Verrichtet man an diesem System Spannarbeit, indem man den Körper 2 z.B. bis zur gestrichelten Endlage bewegt und lässt dann wieder los, so wird der Körper beschleunigt, wobei die potentielle Energie in kinetische umgewandelt wird. Bis zur Ruhelage bewegt sich der Körper positiv beschleunigt, von da bis zur punktierten entgegengesetzten Endlage negativ beschleunigt. In dieser Lage ist die kinetische Energie wieder in potentielle umgewandelt. Anschließend wiederholt sich der Vorgang in umgekehrter Richtung usw. Es entsteht eine Schwingung. □

□ **Versuch 2. Elektromagnetische Schwingung.** Um einen Kondensator aufzuladen, muss Arbeit aufgebracht werden, die dann als Energie des elektrischen Feldes gespeichert wird. Verbindet man einen derart geladenen Kondensator 1 (Bild 5.2a) mit den Enden einer Spule 2 zu einem Stromkreis, dann beginnt ein Strom zu fließen. Dadurch wird ein Magnetfeld aufgebaut, das seinerseits eine Gegenspannung induziert, sodass der Strom nicht beliebig schnell ansteigt, die Entladung des Kondensators also verzögert wird. Der Strom und damit die magnetische Erregung erreichen ihren Höchstwert \hat{i} , wenn der Kondensator gerade entladen ist (Bild 5.2b). Die Energie des elektrischen Feldes ist dann in die des magnetischen Feldes umgewandelt.

Obwohl der Kondensator jetzt entladen ist, fließt weiterhin Strom, verursacht durch die Spannung, die das zusammenbrechende Magnetfeld induziert. Dieser Strom lädt den Kondensator mit umgekehrter Polarität wieder auf, bis das Magnetfeld verschwunden ist und der Strom null wird (Bild 5.2c). Daraufhin wiederholt sich der Vorgang in umgekehrter Richtung (Bild 5.2d) usw., es entsteht eine Schwingung. Den Stromkreis (Bild 5.2) nennt man daher Schwingkreis. □

Die Vorgänge in Versuch 1 und 2 können wir auf fast alle Schwingungen verallgemeinern.

In einem schwingungsfähigen System kann die Energie zwei verschiedene Formen annehmen. Die Schwingung besteht darin, dass eine dem System von außen zugeführte Energie periodisch zwischen diesen möglichen Formen hin und her pendelt.

(Diese Aussage umfasst nicht die Kippschwingungen in Abschn. 5.1.7.2.)

An Hand von Diagrammen soll diese Aussage noch genauer erläutert werden.

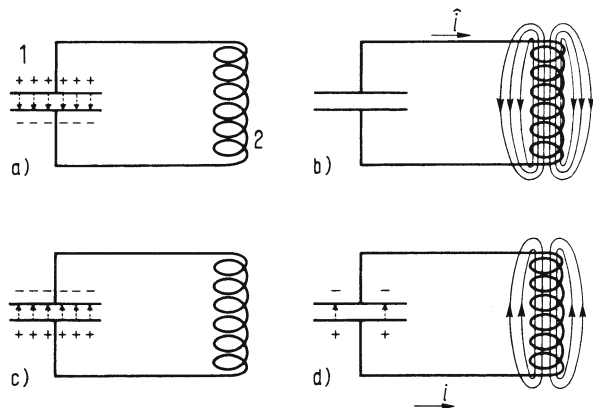


Bild 5.2 Elektromagnetische Schwingungen in einem Schwingkreis aus Kondensator und Spule

Bild 5.3a zeigt (ausgezogen) die Weg-Zeit-Kurve 1 des schwingenden Körpers (Bild 5.1) und dazu vergleichsweise (gestrichelt) Weg-Zeit-Kurven irgendeiner gleichförmigen (2) und einer gleichmäßig beschleunigten (3) Bewegung. Der Zeitpunkt, in dem man in Versuch 1 die zusammengedrückte Feder loslässt, ist der Zeitnullpunkt. Außerdem ist (strichpunktiert) die potentielle Energie W_{pot} , hier die elastische Energie der Feder, aufgetragen (4), die dem Quadrat der Auslenkung proportional ist: $W_{\text{pot}} = (1/2) D s^2$; (D = Federkonstante). Bild 5.3b zeigt (ausgezogen) das zugehörige Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm 1, dazu vergleichsweise (gestrichelt) Geschwindigkeit-Zeit-Diagramme irgendeiner gleichförmigen (2) und einer gleichmäßig beschleunigten (3) Bewegung, außerdem (strichpunktiert) die kinetische Energie W_{kin} (4) in Abhängigkeit von der Zeit. Immer wenn der Körper durch die in Bild 5.1 gekennzeichnete Ruhelage ($s = 0$) geht, ist die Feder entspannt, die potentielle Energie in unserem Bezugssystem also null. Gleichzeitig erreicht jeweils die Geschwindigkeit ein Extremum, die kinetische Energie somit ein Maximum. Dagegen hat im Moment der Bewegungsumkehr (bei $|s| = \hat{s}$ in Bild 5.1) die potentielle Energie immer ein Maximum, die kinetische Energie aber wird dabei – gleichzeitig mit der Geschwindigkeit – null.

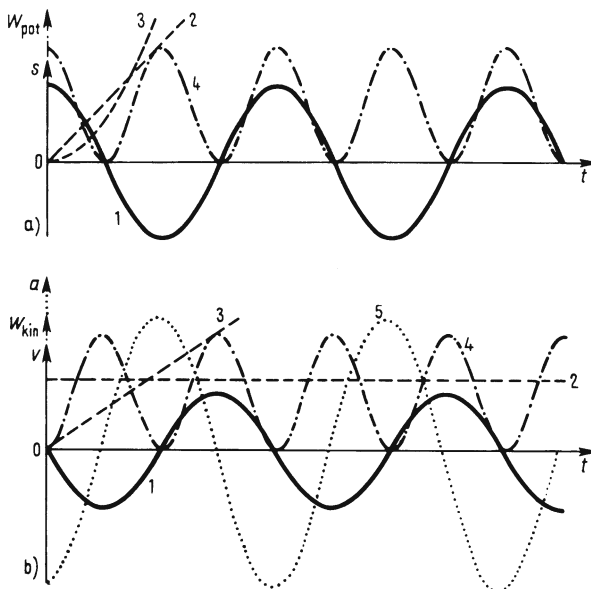


Bild 5.3 Oszillogramme des Federpendels von Bild 5.1

Von elektromagnetischen Schwingungen erhält man entsprechende Diagramme, wenn man statt des Weges die Ladung des Kondensators, statt der Geschwindigkeit den Strom, statt der potentiellen Energie die Energie des elektrischen Feldes und statt der kinetischen Energie die Energie des Magnetfeldes jeweils als Funktion der Zeit aufträgt (Bild 5.8).

Bei anderen Schwingungen, z.B. den Gasschwingungen in Abschn. 5.1.3.3 können auch andere physikalische Größen wie z.B. Druck und Dichte den „Zustand“ der Schwingung charakterisieren.

Definitionen: Man nennt den momentanen Zustand einer Schwingung Phase¹⁾. Dieser muss durch zwei Größen, z.B. Weg und Geschwindigkeit oder Spannung und Strom, gekennzeichnet sein. Kurven, die die Abhängigkeit dieser Größen von der Zeit darstellen, nennt man Oszillogramme (z.B. 1 in Bild 5.3), Vorrichtungen, die solche Kurven aufzeichnen, Oszillographen oder Oszilloskope.

Der Extremwert der sich periodisch ändernden Größe (kurz Schwingungsgröße) heißt Amplitude. Den zeitlichen Abstand zweier gleicher aufeinanderfolgender Phasen, z.B. zweier Maxima, zweier Minima oder zweier gleichsinniger Nulldurchgänge nennt man Schwingungsdauer T , ihren Kehrwert Frequenz

$$f = 1/T \quad (5.1)$$

Die Einheit für die Frequenz wird Hertz²⁾ genannt: 1 Hertz = 1 Hz = 1 s⁻¹

Die Frequenz, mit der ein System frei schwingt, wenn ihm einmal Energie zugeführt wurde, nennt man Eigenfrequenz f_0 .

Speziell bei mechanischen Schwingungen nennt man den momentanen Abstand von der Ruhelage auch Auslenkung, Ausschlag oder Elongation s .

Die Oszillogramme aller Schwingungen zeigen prinzipiell die periodische Aufeinanderfolge von Maximum, Nulldurchgang, Minimum, Nulldurchgang usw. Die Kurven können aber im Einzelnen unterschiedlich geformt sein (z.B. in Bild 5.10, 5.18, 5.19b, 5.20a, 5.21b, 5.22b usw.). Hier sollen zunächst jedoch nur Schwingungen der Form wie in Bild 5.3 behandelt werden.

5.1.2 Ungedämpfte elastische Sinusschwingungen

Die Amplitude eines einmal angestoßenen schwingungsfähigen Systems, z.B. eines Federpendels, nimmt im Lauf der Zeit ab, da die zugeführte Energie durch Reibung aufgezehrt wird. Diese gedämpften Schwingungen sind der Normalfall in der Natur. Wenn man jedoch bei möglichst kleinen Verlusten nur kurze Zeit beobachtet, darf man die wenigen Schwingungen vereinfachend als ungedämpft behandeln.

Werden die rückstellenden Kräfte oder Drehmomente, die die mechanischen Schwingungen ermöglichen, durch elastische Verformungen erzeugt, so spricht man von elastischen Schwingungen. Diese haben meistens einen Verlauf nach Bild 5.3, den man sinusförmig nennt, wie aus der mathematischen Behandlung in Abschn. 5.1.2.1 deutlich wird. Verwirklicht werden elastische Schwingungen durch jede Anordnung, bei der ein Körper mit der Masse m durch elastische Kräfte in einer bestimmten Ruhelage gehalten wird. Diese Kräfte müssen mit der Auslenkung aus der Ruhelage zunehmen und so gerichtet sein, dass sie den Körper in die Ruhelage zurückzustellen suchen (Rückstellkräfte).

Übt eine elastische Kraft auf einen drehbaren Körper ein rückstellendes Drehmoment aus, dann kann dieses System Drehschwingungen ausführen. Es tritt dann lediglich an

¹⁾ Siehe DIN 1311, Bl. 1, Schwingungslehre, Benennungen.

²⁾ Heinrich Hertz (1857 bis 1894).

die Stelle der Masse das Massenträgheitsmoment und an die Stelle der kinetischen Energie der Translation die der Rotation. Schwingungsgröße und Amplitude sind dann keine Längen (Abstand von der Ruhelage), sondern Winkel (Ausschlag aus der Ruhelage).

5.1.2.1 Schwingungsgleichung und lineares Kraftgesetz

Um die Bewegung des schwingenden Körpers mathematisch zu beschreiben, stellt man eine Gleichung auf, die den Ausschlag s als Funktion der Zeit t angibt. Zur Herleitung dieser Gleichung dient die Gleichgewichtsbedingung der Mechanik (vgl. Abschn. 1.3.3.4): In einem mechanischen System muss die Summe aller Kräfte (oder Drehmomente) jederzeit null sein. Die z.B. beim Federpendel (Bild 5.1) auftretenden Kräfte sind:

1. die Trägheitskraft

$$F_{\text{tr}} = -ma = -m d^2s/dt^2 = -m\ddot{s}^1)$$

2. die elastische Kraft (Rückstellkraft)

$$F_e = -Ds^1) \quad (5.2)$$

die proportional dem Ausschlag und diesem entgegen gerichtet ist (vgl. Abschn. 1.3.3.1). Für $F_{\text{tr}} + F_e = 0$ erhält man also $m d^2s/dt^2 + Ds = 0$ oder

$$\ddot{s} + \frac{D}{m}s = 0 \quad (5.3)$$

Die Form des Oszillogramms 1 in Bild 5.3a lässt vermuten, dass die Lösung dieser Differentialgleichung eine Funktion der Form

$$s = \hat{s} \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (5.4)$$

ist. Darin ist \hat{s} die in Abschn. 5.1.1 definierte Amplitude, d.h. der Extremwert des Ausschlages, der immer dann erreicht wird, wenn der Sinus die Werte 1 annimmt. Der Winkel φ_0 – Nullphasenwinkel genannt – hängt davon ab, welche Phase, d.h. welchen Zustand die Schwingung zur Zeit $t = 0$, also am Anfang des Oszillogramms, hat. In Bild 5.3a (1) z.B. ist $\varphi_0 = \pi/2$. Man kann natürlich mit dem Oszillogramm auch so beginnen, d.h. den Nullpunkt der Abszisse so legen, dass $\varphi_0 = 0$ wird. In diesem Fall erkennt man auch leicht die Bedeutung von ω_0 : Es ergeben sich die Nullstellen der Funktion in Gl. (5.4) für

$$t = 0; \quad \pi/\omega_0; \quad 2\pi/\omega_0; \quad 3\pi/\omega_0 \dots,$$

Maxima für

$$t = \frac{\pi/2}{\omega_0}; \quad \frac{5\pi/2}{\omega_0}; \quad \frac{9\pi/2}{\omega_0}; \dots$$

Minima für

$$t = \frac{3\pi/2}{\omega_0}; \quad \frac{7\pi/2}{\omega_0}; \dots$$

Also immer, wenn t um das Zeitintervall $\Delta t = 2\pi/\omega_0$ fortgeschritten ist, hat die Funktion wieder den gleichen Wert, d.h. die Schwingung ist wieder in der gleichen Phase. Demnach ist dieses Δt nichts anderes als die Schwingungsdauer T_0 (Index 0, weil die Schwingung ungedämpft sein soll).

¹⁾ Kommen bei Vektoren nur zwei entgegengesetzte Richtungen vor, so ist es üblich, die Vektorpfeile wegzulassen.

Definition: Man nennt $\omega_0 = 2\pi/T_0$ die Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems zum Unterschied von der Eigenfrequenz f_0 des ungedämpften Systems. Nach Gl. (5.1) ist

$$\omega_0 = 2\pi f_0 \quad ^1)$$

Dass Gl. (5.4) tatsächlich eine Lösung von Gl. (5.3) ist, kann man durch zweimaliges Differenzieren und Einsetzen prüfen:

$$-\hat{s} \omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) + (D/m) \hat{s} \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = 0$$

und daraus

$$\omega_0 = \sqrt{D/m} \quad (5.5)$$

d.h. wenn Gl. (5.5) erfüllt ist, ist Gl. (5.4) eine Lösung der Differentialgleichung. Physikalisch wesentlich daran ist Folgendes:

Die Schwingungsdauer, die Eigenfrequenz oder die Eigenkreisfrequenz ist eine dem Schwingungssystem eigene Größe, die bei dem besprochenen mechanischen System nur von der Federkonstante D und der Masse m abhängt (nicht von der Amplitude!)

Eigenkreisfrequenz

$$\omega_0 = \sqrt{D/m} \quad (5.6)$$

Eigenfrequenz

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} = \sqrt{D/m} \quad (5.7)$$

Schwingungsdauer

$$T_0 = 2\pi\sqrt{m/D} \quad (5.8)$$

Für eine Drehschwingung erhält man formal die gleichen Ergebnisse, es tritt lediglich an die Stelle der Masse m das Massenträgheitsmoment J und an die Stelle der linearen Federkonstante D (Dimension: Kraft/Länge) die entsprechende Drehgröße, die Winkelrichtgröße D^* (Dimension: Drehmoment/Winkel = Kraft \times Länge). So erhält man für die

Schwingungsdauer einer Drehschwingung

$$T_0 = 2\pi\sqrt{J/D^*} \quad (5.9)$$

Die entscheidende Annahme bei der Aufstellung von Gl. (5.3) ist, dass die Rückstellkraft proportional und entgegengerichtet der Auslenkung ist. Man kann daher verallgemeinern:

Wesentlich für das Zustandekommen einer sinusförmigen Schwingung ist ein lineares Kraftgesetz

$$F = -Ds \quad ^2) \quad (5.10)$$

¹⁾ Die Einheit s^{-1} für die Kreisfrequenz wird nach DIN 1311 im Gegensatz zu der Frequenz nicht Hertz genannt.

²⁾ s. Fußnote 1) S. 380.

Da dies für alle mechanischen Schwingungen gilt, erhält die Konstante des linearen Kraftgesetzes einen allgemeingültigen Namen: Richtgröße D für eindimensionale Schwingungen und Winkelrichtgröße D^* für Drehschwingungen.

5.1.2.2 Geschwindigkeit – Beschleunigung – Schwingungsenergie

Differenziert man Gl. (5.4) nach der Zeit, so erhält man den Verlauf der Geschwindigkeit

$$\frac{ds}{dt} = v = \omega_0 \hat{s} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (5.11)$$

darin ist der Faktor vor dem Kosinus offensichtlich die Geschwindigkeitsamplitude

$$\hat{v} = \omega_0 \hat{s} \quad (5.12)$$

Der Verlauf ist in Bild 5.3b ausgezogen dargestellt.

Nochmaliges Differenzieren von Gl. (5.11) ergibt die Beschleunigung

$$\frac{d^2s}{dt^2} = a = -\omega_0^2 \hat{s} \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = -\hat{a} \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Ihr Höchstwert \hat{a} ist also proportional ω_0^2 ! Der Verlauf von a ist in Bild 5.3b punktiert (5) dargestellt.

Die kinetische Energie eines schwingenden Systems, z.B. des Pendels (Bild 5.1), ist in jedem Augenblick $W_{\text{kin}} = (1/2) m v^2$, seine potentielle Energie ist $W_{\text{pot}} = (1/2) D s^2$. Beide schwanken periodisch mit der Zeit (Bild 5.3), ihre Summe muss jedoch konstant gleich dem anfänglich zugeführten Energiebetrag sein, wenn keine Verluste auftreten, also das System ungedämpft schwingt.

$$W_{\text{kin}} + W_{\text{pot}} = W = \text{const.} \quad (5.13)$$

An den Umkehrpunkten, also wenn $s = \hat{s}$ ist, liegt dieser gesamte Energiebetrag als elastische Energie $(1/2)D\hat{s}^2$ vor. Beim Nulldurchgang dagegen, wenn die Geschwindigkeit ihren Maximalwert \hat{v} hat (Geschwindigkeitsamplitude), ist $W = (1/2) m\hat{v}^2$.

Aus dieser letzten Gleichung erhalten wir mit Gl. (5.12) schließlich noch einen dritten Ausdruck: $W = (1/2)m\omega_0^2 \hat{s}^2$. Fassen wir zusammen:

Die Schwingungsenergie W einer ungedämpften Schwingung ist unabhängig von der Zeit

$$W = \frac{1}{2} D \hat{s}^2 = \frac{1}{2} m \hat{v}^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 \hat{s}^2 \quad (5.14)$$

Aufgaben zu Abschn. 5.1.2

1. Zwei Federpendel schwingen mit den gleichen Amplituden $\hat{s}_1 = \hat{s}_2 = 5 \text{ cm}$, das erste mit der Eigenfrequenz 3 Hz, das zweite mit 2 Hz. Zur Zeit $t = 0$ ist das erste Pendel gerade an seinem oberen, das zweite an seinem unteren Umkehrpunkt. a) Man zeichne die beiden Ausschläge in Abhängigkeit von der Zeit. Nach welcher Zeit t_a

haben beide Pendel gleichzeitig extreme negative Auslenkung?

b) Stellen Sie die Gleichungen dieser beiden Schwingungen auf. Wie groß sind die beiden Nullphasenwinkel φ_{01} und φ_{02} ?

2. Eine Schraubenfeder ist mit ihrem einen Ende an einem festen Punkt befestigt und hängt

vertikal nach unten. Befestigt man an ihrem anderen Ende einen Körper mit der Masse 1 kg, so wird sie dadurch um 9,81 cm verlängert. Welche Eigenkreisfrequenz hat das dadurch entstandene Federpendel?

3. Um die Unruh einer Uhr (bei ausgehängtem Anker) um eine Viertelumdrehung aus der Ruhelage zu drehen, braucht man das Drehmoment $4,9 \cdot 10^{-6}$ Nm. Ihre Eigenfrequenz ist 2 Hz. Welches Massenträgheitsmoment hat die Unruh?

4. Ein Kraftfahrzeug hat die Masse 760 kg, die sich auf die Vorder- bzw. Hinterachse wie 2:3 verteilt. Bei ausgebauten Stoßdämpfern kann

man Schwingungen anregen. Man misst für je 5 Schwingungen vorn 5 s, hinten 6 s. Wie groß sind die vier Federkonstanten?

5. Der Ausschlag s eines Federpendels mit der Eigenfrequenz f_0 hängt sinusförmig von der Zeit ab.

Mit welcher Frequenz ändert sich die kinetische Energie des Pendels mit der Zeit?

6. Eine horizontale ebene Platte schwingt vertikal sinusförmig mit der Amplitude $\hat{s} = 1$ mm. Wie groß darf die Frequenz dieser Schwingung höchstens sein, damit ein Körper, der frei auf der Platte liegt, nicht von ihr abhebt?

5.1.3 Quasielastische Schwingungen

Das lineare Kraftgesetz Gl. (5.10) muss nicht immer durch die elastische Verformung eines Festkörpers zustande kommen. Auch die Gravitation oder z.B. der Druck eines Gases können eine derartige rückstellende Kraft in einem System bewirken. Schwingungen, bei denen das lineare Kraftgesetz auf diese Weise zustande kommt, nennt man „quasielastisch“. Die wichtigsten Beispiele hierfür sollen im Folgenden behandelt werden.

5.1.3.1 Flüssigkeitsschwingungen

In der Ruhelage haben die Flüssigkeitssäulen in den Schenkeln eines U-Rohres nach Bild 5.4 gleiche Höhe. Drückt man die eine Säule um ein Stück x tiefer, so steigt die andere um den gleichen Betrag, falls die Querschnitte A in beiden Schenkeln gleich sind.

Die Höhendifferenz ist dann $2x$, der Druck $p = 2x\rho g$ ($\rho =$ Dichte), die rückstellende Kraft also

$$F = -pA = -2A\rho g x \quad (5.15)$$

(Minuszeichen, weil x und F entgegengesetzte Richtungen haben). Es liegt also ein lineares Kraftgesetz vor. Das bedeutet:

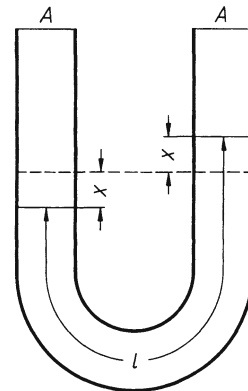


Bild 5.4 Flüssigkeitsschwingungen

Die Flüssigkeit in einem kommunizierenden Rohrsystem mit konstanten Querschnitten kann sinusförmige Schwingungen ausführen.

Setzt man die Richtgröße von Gl. (5.15) $2A\rho g = D$ in Gl. (5.8) ein, so erhält man $T_0 = 2\pi \sqrt{m/(2A\rho g)}$, oder mit $\rho = m/V$ und (bei konstantem Querschnitt $A = Al$ (Bild 5.4)) $T_0 = 2\pi \sqrt{l/(2g)}$ (vgl. Gl. (5.18)).

Dieser Modellfall lässt sich auf beliebig geformte flüssigkeitsgefüllte Gefäße verallgemeinern, allerdings sind dann die Schwingungen im Allgemeinen nicht mehr sinusförmig.

Anwendungen. Unerwünschte Schwingungen des Kraftstoffes z.B. bei Dieselmotoren sowie der Flüssigkeit in Tankfahrzeugen und -schiffen.

5.1.3.2 Schwerependel

Während das lineare Kraftgesetz im vorigen Abschnitt mit Gl. (5.15) streng erfüllt ist, gilt es in diesem und dem nächsten Abschnitt nur näherungsweise.

□ **Versuch 3. Physisches Pendel** (Bild 5.5). Ein starrer Körper ist an einem Punkt A , der nicht sein Schwerpunkt S ist, drehbar aufgehängt. Um ihn um den Winkel ε aus seiner Ruhelage zu drehen, muss man den Schwerpunkt um den Betrag h anheben, dem System also Energie zuführen. Gibt man den Körper dann wieder frei, so führt er Pendelschwingungen aus. □

Diese Schwingung lässt sich folgendermaßen berechnen: Der Körper (Bild 5.5) soll für den Aufhängepunkt A das Massenträgheitsmoment J haben. Der Abstand zwischen A und dem Schwerpunkt sei l . Die Gewichtskraft $F_G = mg$ greift im Schwerpunkt an und übt das Drehmoment

$$M = -lmg \sin \varepsilon \quad (5.16)$$

auf den Körper aus. (Minuszeichen, weil M rückstellendes Drehmoment ist.) Beschränkt man sich auf kleine Ausschläge, also kleine Werte von ε , so ist $\sin \varepsilon \approx \varepsilon$ (z.B. ist der relative Fehler dieser Näherung bei 30° nur 4,76 %). Dadurch vereinfacht sich Gl. (5.16) zu

$$M = -lmg\varepsilon$$

Das ist kein lineares Kraft-, sondern ein lineares Drehmomentgesetz, d.h. das rücktreibende Drehmoment M ist dem Auslenkungswinkel ε proportional.

Das bedeutet:

Das physische Pendel führt bei kleinen Ausschlägen sinusförmige Drehschwingungen aus

$$\varepsilon = \hat{\varepsilon} \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

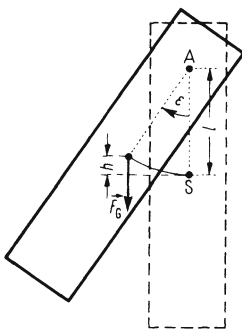


Bild 5.5 Beliebiger – hier rechteckiger – Körper als Schwerependel

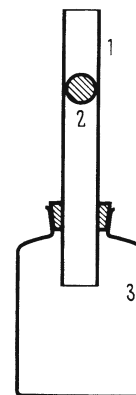


Bild 5.6 Gasschwingungen

Die Winkelrichtgröße ist $D^* = l m g$ und somit die Schwingungsdauer nach Gl. (5.9)

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D^*}} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{lmg}} \quad (5.17)$$

Nimmt man vereinfachend an, dass die ganze Masse des Pendels im Schwerpunkt S vereinigt ist, dann ist das Massenträgheitsmoment einfach $J = m l^2$ und damit vereinfacht sich Gl. (5.17) zu

$$T'_0 = 2\pi \sqrt{l/g} \quad (5.18)$$

Die Schwingungsdauer dieses streng nicht herstellbaren Pendels – daher mathematisches Pendel genannt – ist also nur von seiner Länge, nicht von seiner Masse abhängig.

Eine Blei- oder Stahlkugel an einem leichten Faden stellt eine gute Annäherung des „mathematischen Pendels“ dar. Trotzdem weicht dessen Schwingungszeit etwas vom idealen Wert nach Gl. (5.18) ab, hauptsächlich, weil sich die Länge des dünnen und damit leicht dehnbaren Fadens während der Schwingung ändert.

Anwendungen. Bestimmung von Massenträgheitsmomenten; Uhren; Gravimeter.

5.1.3.3 Gasschwingungen

□ **Versuch 4** (Bild 5.6). In einem kalibrierten Glasrohr 1 kann eine Stahlkugel 2 mit sehr kleinem Spiel hin- und herrollen, wenn die Enden des Rohres offen sind. Steckt man dagegen das untere Ende dicht in den Hals der Flasche 3, dann wird die Kugel durch das „Gaspolster“ nahezu festgehalten. Bringt man die Kugel z.B. durch einen Stoß vorübergehend aus der Ruhelage, so schwingt sie danach längere Zeit auf und ab. □

Die Kugel 2 wird von dem eingeschlossenen Gas mit dem Volumen V_0 und dem Druck p_0 in der Ruhelage gehalten. Bei jeder Auslenkung herrscht dagegen der Druck p , und das Volumen ist V . Findet während einer Bewegung kein Wärmeaustausch mit der Umgebung statt, z.B. weil die Bewegung schnell verläuft, so gilt die Adiabatangleichung (2.47)

$$p = \frac{p_0 V_0^\kappa}{V^\kappa}$$

Durch Differenzieren erhält man allgemein

$$\frac{dp}{dV} = -\kappa \frac{p_0 V_0^\kappa}{V^{\kappa+1}} \quad \text{oder} \quad \frac{dp}{dV} = -\kappa \frac{p_0 V_0^\kappa}{V^{\kappa+1}} dV$$

und speziell für kleine Abweichungen von der Ruhelage, d.h. für $V \approx V_0$ (und mit $dV = A dx$)

$$dp|_{V_0} = -\kappa \frac{p_0}{V_0} A dx$$

Diese Druckänderung, multipliziert mit dem Querschnitt A , ist dann die rückstellende Kraft:

$$dp A = F = -\kappa \frac{p_0}{V_0} A^2 dx$$

d.h. die rückstellende Kraft ist in der Nähe der Ruhelage der Auslenkung dx proportional; bei entsprechendem Anstoß schwingen die Kugel und das Gas sinusförmig.

Anwendungen. Ein großer Teil der akustischen Schwingungen (vgl. Abschn. 5.2.5.3), Schwingungen des Luft-Treibstoffgemisches und Schwingungen der Auspuffgase bei Verbrennungsmotoren sind Anwendungsbeispiele.

5.1.3.4 Elektromagnetische Schwingungen

Zur mathematischen Beschreibung elektromagnetischer Schwingungen (s. auch Abschn. 5.1.1) in einem Schwingkreis – bestehend aus einem Kondensator mit der Kapazität C und einer Spule mit der Induktivität L (Bild 5.7) – kann man z.B. die Zeitabhängigkeit der Spannung u_C am Kondensator untersuchen. Man geht davon aus, dass in dem Stromkreis (Bild 5.7) die Summe aller Spannungen stets null sein muss (vgl. Abschn. 3.2.2.6). Die Spannung am Kondensator ist $u_C = q/C$ (Gl. (3.18) (jedoch schreiben wir hier ein kleines q , weil die Ladung zeitlich veränderlich ist), die Spannung an der Spule $u_L = L di/dt$ (Gl. (3.83)). Da außerdem $i = dq/dt$ (Gl. (3.36)) und somit $di/dt = d^2q/dt^2$ ist, erhält man für $u_L + u_C = 0$ die Gleichung

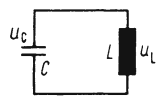


Bild 5.7 Elektrischer Schwingkreis

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0$$

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC} q = 0 \quad (5.19)$$

Die formale Ähnlichkeit dieser Differentialgleichung mit Gl. (5.3) erlaubt folgende Analogiebetrachtungen, die die Grundlage der Analogrechentechnik sind:

So wie sich in der Mechanik die Masse jeder Änderung der Geschwindigkeit sozusagen widersetzt, so „widersetzt“ sich die Induktivität in der Elektrizität jeder Änderung des Stromes. Die beiden Größen sind also – jede in ihrem System – die trägen Elemente. Die rückstellende Kraft eines mechanischen Systems ist bei gegebenem Ausschlag umso größer, je größer die Richtgröße D ist. Im elektrischen System ist sie umso größer, je kleiner die Kapazität ist, da die Spannung am Kondensator (bei konstanter Ladung) der Kapazität C umgekehrt proportional ist.

Als Lösung für Gl. (5.19) ergibt sich analog wie für Gl. (5.3) für die Ladung q als Funktion der Zeit

$$q = \hat{q} \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (5.20)$$

mit der Amplitude \hat{q} , dem Nullphasenwinkel φ_0 und der Eigenkreisfrequenz ω_0 , für die man auf die gleiche Weise wie bei Gl. (5.3) findet

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (5.21)$$

Die Eigenfrequenz wird also auch hier nur durch die Kenngrößen des Systems, hier L und C , bestimmt. Vgl. hierzu Gl. (3.106), (3.84), (3.20) und (3.34).

Die Schwingungsgröße und die Amplitude sind in Gl. (5.20) die momentane und die maximale Ladung auf dem Kondensator. Dividiert man durch die Kapazität C , so erhält man die gesuchte Spannung als Funktion der Zeit:

$$\frac{q}{C} = u = \frac{\hat{q}}{C} \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Darin ist $\hat{q}/C = \hat{u}$ die Spannungsamplitude oder der Scheitelwert (vgl. Abschn. 3.3.6.4), und u der Momentanwert der Spannung.

$$u = \hat{u} \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (5.22)$$

Differenziert man Gl. (5.20) nach der Zeit, so ergibt sich

$$dq/dt = i = \hat{q} \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \hat{q} \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi/2)$$

Bezeichnet man darin mit $\hat{i} = \hat{q} \omega_0$ die Stromamplitude (Scheitelwert) und mit

$$\varphi'_0 = \varphi_0 + \frac{\pi}{2} \quad (5.23)$$

den Nullphasenwinkel des Stromes, dann erhält man

$$i = \hat{i} \sin(\omega_0 t + \varphi'_0) \quad (5.22)$$

Aus den vorstehenden Gleichungen ergeben sich für eine elektromagnetische Schwingung die Oszillogramme in Bild 5.8 analog zu Bild 5.3. Allerdings ist hier der Zeitnullpunkt so gewählt, dass $\varphi_0 = -\pi/4$ ist. Wie Gl. (5.23) zeigt, ist der Strom i gegen die Spannung u am Kondensator um eine Viertelperiode phasenverschoben (vgl. Abschn. 3.3.6.4).

Wir fassen die Ergebnisse dieses Abschnittes zusammen:

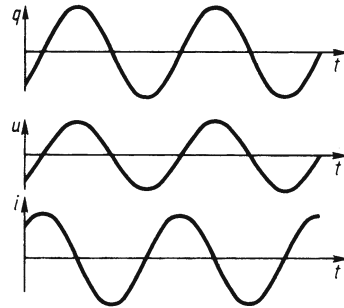


Bild 5.8 Oszillogramme elektromagnetischer Schwingungen

Die Ladung q und die Spannung u eines Kondensators in einem elektrischen Schwingkreis sowie der Strom i in diesem ändern sich (nach geeigneter Anregung) periodisch mit der Zeit nach einer Sinusfunktion. Daher nennt man diese Änderungen elektromagnetische Sinusschwingungen. Der Verlauf des Stromes i ist gegen den der Spannung um $\pi/2$ phasenverschoben.

Die am Anfang dieses Abschnittes erwähnte Analogie zwischen mechanischen und elektrischen Größen lässt sich auf Grund der obigen Ergebnisse weiter ausdehnen. In Tafel 5.9 sind die einander entsprechenden Größen aufgeführt.

Die elektromagnetische Schwingungsenergie erhält man nun leicht, indem man die Gl. (5.14) mit Hilfe von Tafel 5.9 „übersetzt“ und berücksichtigt, dass $\hat{q}/C = \hat{u}$ und $\omega_0^2 = 1/(LC)$ ist:

$$W = \frac{1}{2} C \hat{u}^2 = \frac{1}{2} L \hat{i}^2 \quad (5.24)$$

(vgl. Abschn. 3.1.2.8 und 3.3.4.3).

Tafel 5.9

Mechanische Größe	s	$\dot{s} = v$	$\ddot{s} = a$	m	F	D	$b^1)$
entsprechende elektrische Größe	q	$\dot{q} = i$	$\ddot{q} = di/dt$	L	u	$1/C$	$R^2)$

Anwendungen. Vor allem in der Nachrichtentechnik spielt die Erzeugung ungedämpfter elektromagnetischer Schwingungen bekanntlich eine wichtige Rolle. In den Schwingungserzeugern (Oszillatoren) wird dem Schwingkreis in jeder Periode die als Joulesche Wärme oder z.B. vom Antennenkreis entzogene Energie wieder zugeführt (s.auch Abschn. 5.1.4.2).

Aufgaben zu Abschn. 5.1.3

1. Eine Uhr mit Schwerependel geht am Äquator genau richtig.
 - a) Wie ändert sich ihre Zeitanzeige gegenüber dem mittleren Sonnentag, wenn sie nach Norden transportiert wird?
 - b) Welche mechanischen Schwingungssysteme zeigen diesen Effekt nicht?
2. Ein Schwingkreis besteht aus einer Spule und einem Kondensator, dessen Kapazität zwischen 20 und 200 pF veränderbar ist. Welche Induktivität muss die Spule haben, damit die Eigenfrequenz des Schwingkreises zwischen 2,5 und 7,9 MHz eingestellt werden kann?

3. Unter welchen Voraussetzungen sind a) mechanische und b) elektrische Schwingungen sinusförmig?
4. Welcher prinzipielle Unterschied besteht zwischen Flüssigkeitsschwingungen (z.B. in einem U-Rohr) und Pendelschwingungen?
5. Ein „Schwerependel“, das mit ausreichender Genauigkeit als „mathematisches“ angesehen werden kann, ist 1 m lang. Es schwingt in einem Raum, der sich senkrecht zur Erdoberfläche in deren Nähe gleichmäßig beschleunigt bewegt, mit einer Schwingungsdauer von 4 s. Mit welcher Beschleunigung bewegt sich besagter Raum?

5.1.4 Gedämpfte Schwingungen

5.1.4.1 Mechanische Systeme

Wird einem schwingenden System pro Schwingung ein merklicher Teil seines Energieinhalts entzogen, z.B. durch Reibung, so unterscheidet sich sein Oszillogramm (Bild 5.10) wesentlich von Bild 5.3 und 5.8: Nicht nur die Auslenkung s , sondern auch deren Höchstwerte, die Amplituden \hat{s} , sind von der Zeit abhängig, und zwar nehmen die Amplituden ab. Man sagt, die Schwingung sei gedämpft. Meist kommt die Dämpfung durch innere Reibung zustande (vgl. Abschn. 1.6.3.2).

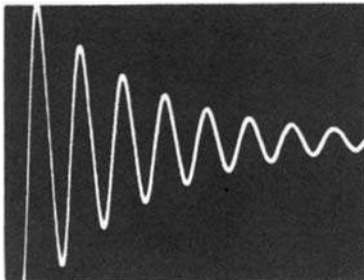


Bild 5.10 Oszillogramm einer gedämpften Schwingung. Ordinate: Ausschlag s ; Abszisse: Zeit t .

Dann stellt man am Oszillogramm fest, dass das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Amplituden \hat{s}_i und \hat{s}_{i+1} konstant ist, die Zahlenwerte der Amplituden also eine geometrische Folge bilden.

$$\hat{s}_i / \hat{s}_{i+1} = \text{const.} \quad (5.25)$$

Zum gleichen Ergebnis kommt man auch theoretisch, wenn man eine Energiebilanz aufstellt: Im Moment des i -ten Extremums ist der Ausschlag gleich der i -ten Amplitude \hat{s}_i und die Geschwindigkeit null; die Energie ist also ausschließlich potentielle und nach Gl. (5.14) $W_i = (1/2) D \hat{s}_i^2$. Für das nächste, das $(i+1)$ -te Extremum ergibt sich ebenso $W_{i+1} = (1/2) D \hat{s}_{i+1}^2$.

¹⁾ S. Abschn. 5.1.4.1

²⁾ S. Abschn. 5.1.4.2

Die Differenz dieser beiden Werte ist als Reibungsarbeit auf der Strecke $\hat{s}_i + \hat{s}_{i+1}$ mit einer Reibungskraft F_R abgegeben worden. Da wir innere Reibung haben, ist diese Reibungskraft proportional der Geschwindigkeit v (vgl. Abschn. 1.6.3.2), also $F_R = kv$, worin k ein für das schwingende System konstanter Geometriefaktor ist, z.B. $k = 6\pi\eta r$ für eine Kugel nach Stokes Gl. (1.56); für v setzen wir $(\hat{s}_i + \hat{s}_{i+1})/(T/2)$. Damit ergibt die oben angekündigte Energiebilanz:

$$W_i - W_{i+1} = F_R (\hat{s}_i + \hat{s}_{i+1}) = kv (\hat{s}_i + \hat{s}_{i+1})$$

Setzen wir hier für die Geschwindigkeit v einen Mittelwert (mit $T_d =$ Schwingungsdauer des gedämpften Systems) $\bar{v} =$ zurückgelegte Strecke/halbe Schwingungsdauer $= (\hat{s}_i + \hat{s}_{i+1})/(T_d/2)$ ein, so erhalten wir

$$\frac{1}{2} D (\hat{s}_i^2 - \hat{s}_{i+1}^2) = k \frac{2}{T_d} (\hat{s}_i + \hat{s}_{i+1}) \quad \text{oder} \quad \frac{\hat{s}_i + \hat{s}_{i+1}}{\hat{s}_i - \hat{s}_{i+1}} = \text{const, wenn auch } T_d \text{ konstant ist.}$$

Die gleiche Herleitung kann man natürlich auch für zwei andere aufeinanderfolgende Amplituden machen, z.B. für \hat{s}_{i+1} und \hat{s}_{i+2} erhält entsprechend

$$\frac{\hat{s}_{i+1} + \hat{s}_{i+2}}{\hat{s}_{i+1} - \hat{s}_{i+2}} = \text{const, also}$$

$$\frac{\hat{s}_i + \hat{s}_{i+1}}{\hat{s}_i - \hat{s}_{i+1}} = \frac{\hat{s}_{i+1} + \hat{s}_{i+2}}{\hat{s}_{i+1} - \hat{s}_{i+2}} \quad \text{und daraus durch algebraische Umformungen schließlich}$$

$$\frac{\hat{s}_i}{\hat{s}_{i+1}} = \frac{\hat{s}_{i+1}}{\hat{s}_{i+2}} \quad \text{oder}$$

$$\hat{s}_i / \hat{s}_{i+1} = \text{const} \tag{5.25}$$

Mit anderen Worten: Jede Amplitude ist jeweils um den gleichen Prozentsatz kleiner als die vorige. Wegen Gl. (5.14) wird demnach pro Schwingung immer der gleiche Prozentsatz der gerade noch vorhandenen Schwingungsenergie in Reibungsarbeit umgesetzt; also nehmen die Amplituden exponentiell mit der Zeit ab.

Schwingungsgleichung. Zur Herleitung muss man in dem Ansatz, dass die Summe aller Kräfte jederzeit null ist, nun auch die Reibungskraft F_R berücksichtigen. Diese ist bei innerer Reibung in erster Näherung proportional der Geschwindigkeit v (s. z.B. Gl. (1.55) oder (1.56)) und dieser entgegengesetzt gerichtet, also mit der sog. Dämpfungskonstanten b

$$F_R = -bv = -b ds/dt \tag{5.26}$$

Für $F_{tr} + F_R + F_e = 0$ (vgl. Abschn. 5.1.2.1) erhält man also

$$m d^2s/dt^2 + b ds/dt + Ds = 0$$

oder, nach Division durch m , die

$$\ddot{s} + (b/m) \dot{s} + (D/m) s = 0 \tag{5.27}$$

Auf Grund der Oszillogramme und der obigen Überlegungen zu diesen ist als Lösung dieser Differentialgleichung eine periodische Funktion der Zeit zu erwarten, deren Amplitude mit einem Anfangswert \hat{s}_0 beginnt und exponentiell mit der Zeit abnimmt:

$$s = \hat{s}_0 e^{-\delta t} \sin(\omega_d t + \varphi_0) \quad (5.28)$$

Darin sind die Abklingkonstante δ und die Kreisfrequenz des gedämpften Systems ω_d zunächst allgemein eingeführte Konstanten, φ_0 ist der Nullphasenwinkel. Zweimaliges Differenzieren von Gl. (5.28) und Koeffizientenvergleich mit Gl. (5.27) zeigt, dass Gl. (5.28) dann eine Lösung von Gl. (5.27) ist, wenn $2\delta = b/m$ und $\omega_d^2 + \delta^2 = \omega_0^2$ ist, wobei $\omega_0^2 = D/m$ das Quadrat der Eigenkreisfrequenz des sonst gleichen aber ungedämpften Systems ist, also

$$\delta = b/(2m) \quad \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad (5.29)$$

Bei einer durch innere Reibung, d.h. mit geschwindigkeitsproportionaler Reibungskraft gedämpften Schwingung nimmt die Amplitude exponentiell mit der Zeit ab; die Eigenkreisfrequenz ist kleiner als die des ungedämpften, aber sonst gleichen Systems.

Setzt man außerdem Gl. (5.29) in die Gl. (5.27) ein und schreibt statt der speziellen Variablen s verallgemeinernd y , so erhält man die

Allgemeine Form der Differentialgleichung der geschwindigkeitsproportional gedämpften Schwingung

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = 0 \quad (5.30)$$

Für Drehschwingungen gelten die analogen Gleichungen mit der Winkelrichtgröße D^* anstelle der Richtgröße D und dem Massenträgheitsmoment J anstelle der Masse m sowie der Konstanten $b^* = M_{\text{Reib}}/\omega$ anstelle von b (ω ist hier die Winkelgeschwindigkeit).

Abklingkonstante. Aus Gl. (5.25) und (5.28) ergibt sich für das konstante Verhältnis aufeinanderfolgender Amplituden

$$\frac{\hat{s}_i}{\hat{s}_{i+1}} = \frac{e^{-\delta t_i}}{e^{-\delta t_{i+1}}}$$

oder – da der zeitliche Abstand zweier aufeinanderfolgender Amplituden $t_{i+1} - t_i$ die Schwingungsdauer T_d ist:

$$\frac{\hat{s}_i}{\hat{s}_{i+1}} = e^{\delta T_d}$$

Den Exponenten δT_d nennt man logarithmisches Dekrement

$$A = \delta T_d = \ln \left(\frac{\hat{s}_i}{\hat{s}_{i+1}} \right)$$

Bei elektromagnetischen Schwingungen (s. Abschn. 5.1.4.2) ist entsprechend $A = \ln(\hat{u}_i/\hat{u}_{i+1})$. In der Nachrichtentechnik verwendet man aber meist $\pi/A = Q = \omega_d/(2\delta)$, den „Gütefaktor“ eines Schwingkreises. Bei geringer Dämpfung ist $\delta \ll \omega_0$, also $\omega_d \approx \omega_0$ und folglich $Q \approx \omega_0/(2\delta) = \omega_0 L/R$ (s. Abschn. 5.1.5.2).

Da Λ und T_d unabhängig voneinander aus dem Oszillogramm einer gedämpften Schwingung gewonnen werden können, erhält man so die Abklingkonstante δ und mit Gl. (5.29) die Eigenkreisfrequenz ω_0 des ungedämpften Systems. Ist dann noch eine der charakteristischen Größen des Systems b , D oder m bekannt, so lassen sich die beiden anderen errechnen.

Entdämpfung. Bei einigen technischen Anwendungen, z.B. bei mechanischen Uhren, soll eine Schwingung über lange Zeit mit konstanter Amplitude verlaufen. Dazu muss aus einem großen Energievorrat, z.B. hochgezogenen Gewichtsstücken oder gespannten Schneckenfedern, während jeder Periode eine Energieportion an das Schwingungssystem übertragen werden, und zwar genau so viel, wie durch Reibung verbraucht wird. Dies wird durch die Schwingungsgröße selbst gesteuert, man spricht von Selbsterregung (s. auch Abschn. 5.1.5). Der dazu nötige Mechanismus wird bei Uhren „Hemmung“ genannt.

Aperiodische Dämpfung. Vergrößert man den Energieverlust pro Periode, z.B. indem man die Schwingung in immer zäherem Medium ablaufen lässt, so erreicht man schließlich eine Grenze, von der ab keine eigentliche Schwingung mehr zustande kommt. Das System geht nach dem Anstoß asymptotisch in die Ruhelage zurück. Die genannte Grenze ist erreicht, wenn die Wurzel in Gl. (5.29) null wird, d.h. wenn $\omega_0^2 = \delta^2$, oder mit Gl. (5.6) und (5.29), wenn

$$b^2 = 4 D m \quad (5.31)$$

wird. Man nennt dies den aperiodischen Grenzfall. Für noch größeres b wird die Wurzel in Gl. (5.29) imaginär. Man spricht dann vom Kriechfall. Beide Fälle sind in Bild 5.11 oszillographiert.

Anwendungen. Bei vielen mechanischen Systemen ist eine Schwingung zwar möglich, aber unerwünscht, z.B. bei Messwerken von elektrischen Instrumenten oder bei gefederten Fahrzeugen. Man bringt dann eine Öl-, Luft- oder Wirbelstromdämpfung an, die so bemessen ist, dass sie etwa den aperiodischen Grenzfall verwirklicht.

Geschwindigkeitsunabhängige Dämpfung

Wenn eine Schwingung hauptsächlich durch äußere Reibung, die annähernd geschwindigkeitsunabhängig ist (vgl. Abschn. 1.3.3.2), gedämpft wird, dann treten in dem System folgende Kräfte auf: die Trägheitskraft, $F_{tr} = -m\ddot{s}$, die rückstellende, z.B. elastische Kraft $F_e = -D s$ und die dem Betrag nach konstante Reibungskraft, die aber positives oder negatives Vorzeichen hat, je nachdem ob die Geschwindigkeit $v = \dot{s} > 0$ oder < 0 ist; also $F_R = -\mu F_N \operatorname{sgn}(\dot{s})$ ¹⁾.

Die Summe dieser Kräfte ist $0: m\ddot{s} + \mu F_N \operatorname{sign}(\dot{s}) + Ds = 0$. Man muss die Phasen mit positivem v und die mit negativem v getrennt behandeln. Zunächst der Fall $v > 0$: Die Differentialgleichung lautet:

$$m\ddot{s} + \mu F_N + Ds = 0 \quad (5.32)$$

Da $\mu F_N = \text{const}$ ist, kann man es formal gleich Ds_0 setzen, d.h. z.B. wie eine konstante Vorspannung der Feder behandeln: $\mu F_N = D s_0$ oder $s_0 = \mu F_N / D$. Damit wird Gl. (5.32) $m\ddot{s} + D(s + s_0) = 0$ oder $\ddot{s} + (D/m)(s + s_0) = 0$. Substituiert man $s + s_0 = y$ und somit $\ddot{s} = \ddot{y}$, so erhält man formal die gleiche Differentialgleichung (5.3) wie bei ungedämpften Schwingungen

¹⁾ $\operatorname{sgn}(\dot{s})$ zu lesen „signum von \dot{s} “ heißt Vorzeichen von \dot{s} .

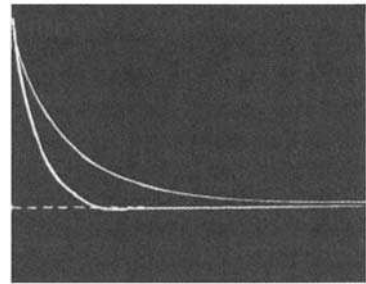


Bild 5.11 Kriechfall (obere Kurve) und aperiodischer Grenzfall (untere Kurve) oszillographiert, gestrichelte Nulllinie nachträglich eingezeichnet.

Ordinate: Ausschlag s , Abszisse: Zeit t

$$\ddot{y} = (D/m) = 0$$

die bekanntlich durch die Gleichung der ungedämpften Sinusschwingung $y = \hat{y} \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$ gelöst wird, wobei $\omega_0 = \sqrt{D/m}$ (wie ohne Dämpfung) ist. Rücksubstituieren ergibt schließlich

$$s = (\hat{s} + s_0) \sin(\omega_0 t + \varphi_0) - s_0 \quad (5.33)$$

Für den anderen Fall, $v < 0$, lautet die Differentialgleichung

$$m\dot{s} - \mu F_N + Ds = 0$$

Auf ganz analoge Weise wie oben erhält man wieder mit $\mu F_N = Ds_0$ schließlich

$$s = (\hat{s} + s_0) \sin(\omega_0 t + \varphi_0) + s_0 \quad (5.34)$$

Gl. (5.33) und (5.34) lassen sich anhand von Bild 5.12 verstehen: Die Schwingung möge z.B. an einem Umkehrpunkt (negativer Extremwert) beginnen. Bis zum nächsten Umkehrpunkt (positiver Extremwert) ist $v > 0$, also gilt Gl. (5.33): eine normale ungedämpfte Sinusschwingung, jedoch nicht symmetrisch zu $s = 0$, sondern zur unteren gestrichelten Geraden $s = -s_0$. Am Umkehrpunkt wechselt die Geschwindigkeit ihr Vorzeichen, es gilt jetzt Gl. (5.34), d.h. es beginnt eine Sinusschwingung um die Gerade $s = +s_0$. Natürlich kann bei diesem Übergang von $-s_0$ nach $+s_0$ der schwingende Körper und die zugehörige s - t -Kurve keinen Sprung um $2s_0$ machen, sondern Bewegung und Kurve müssen stetig weitergehen. Daher ist in der einsetzenden zweiten Hälfte der Schwingung die Amplitude um $2s_0 = 2\mu F_N/D$ kleiner.

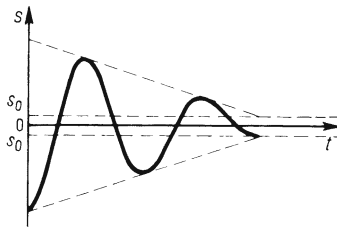


Bild 5.12 Oszillogramm einer geschwindigkeitsunabhängig gedämpften Schwingung

Das geschieht an jedem Umkehrpunkt, d.h. die Zahlenwerte aufeinanderfolgender Amplituden bilden nicht wie oben eine geometrische, sondern eine arithmetische Folge, nicht ihr Verhältnis, sondern ihre Differenz ist konstant gleich $4s_0$. Schließlich – in Bild 5.12 beim dritten negativen Extremum – wird die neue Amplitude null, d.h. das System kommt zur Ruhe, und zwar außerhalb des Nulldurchgangs! Das ist für viele schwingungsfähige Systeme von Bedeutung, da ihre Dämpfung zu einem (wenigstens anfangs) geringen Anteil durch äußere Reibung zustande kommt. Dieser Anteil überwiegt gegen Ende der Schwingung, weil dann die Geschwindigkeit und damit die geschwindigkeitsabhängigen Reibungskräfte immer kleiner werden. Bei Zeigermessinstrumenten bewirkt dies einen statistisch schwankenden Einstellfehler.

5.1.4.2 Elektrische Systeme

Analog zu Abschn. 5.1.3.4 ergibt sich die Differentialgleichung einer gedämpften elektromagnetischen Schwingung, wenn man den Spannungsabfall am Wirkwiderstand des Schwingkreises $u_R = Ri = R dq/dt$ berücksichtigt (Bild 5.13). Dann muss $u_L + u_R + u_C = 0$ sein, und analog zu Gl. (5.27) wird die

Differentialgleichung der gedämpften elektromagnetischen Schwingung

$$\ddot{q} + \frac{R}{L} \dot{q} + \frac{1}{LC} q = 0 \quad (5.35)$$

Sie gleicht formal den Gleichungen (5.27) und (5.30); daher ist eine zu Gl. (5.28) analoge Lösung (für den „Schwingfall“):

$$q = \hat{q}_0 e^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \tag{5.36}$$

mit der Maximalamplitude \hat{q}_0 , dem Nullphasenwinkel φ_0 , der Abklingkonstanten $\delta = R/2L$ und der Eigenkreisfrequenz

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \tag{5.37}$$

Eine Schwingungsgleichung für Momentanspannung u und -strom i erhält man aus Gl. (5.36) ebenso wie in Abschn. 5.1.3.4.

Aperiodische Dämpfung eines Schwingkreises (Bild 5.13) erhält man durch Erhöhen des Wirkwiderstandes R . Da hier $\delta = R/(2L)$ und $\omega_0^2 = 1/(LC)$ ist, ergibt sich die Bedingung für den aperiodischen Grenzfall aus Gl. (5.37) analog zum mechanischen Fall – Gl. (5.31) – $R^2 = 4L/C$.

Wenn $R^2 > 4L/C$ ist, erfolgt die Annäherung an den Ruhezustand noch langsamer (Kriechfall).

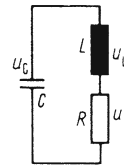


Bild 5.13 Elektrischer Schwingkreis mit Wirkwiderstand

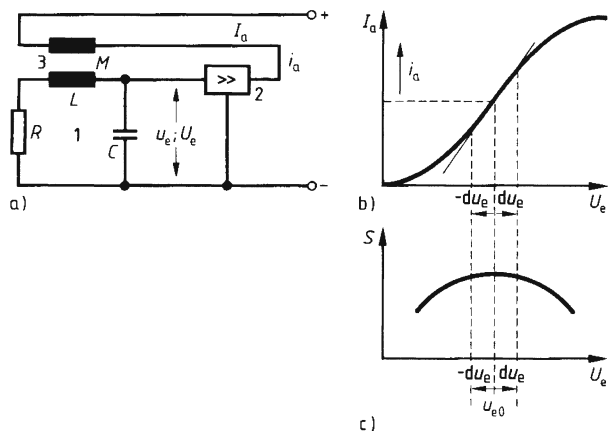
5.1.5 Selbsterregte Schwingungen

In gewissem Sinn das Gegenteil der gedämpften Schwingungen des vorigen Abschnittes sind die entdämpften, die als selbsterregte Schwingungen auftreten. Da die Verhältnisse bei elektrischen Systemen besonders übersichtlich sind, beschränken wir uns hier auf deren Beschreibung. Die Erscheinungen sind im Prinzip jedoch bei mechanischen Systemen analog.

Zur Entdämpfung ist der Gesamtwiderstand eines Schwingkreises und damit die Dämpfungskonstante $\delta \leq 0$ zu machen (vgl. Abschn. 5.1.4.2). Da der Wirkwiderstand R

Bild 5.14

- a) Schwingkreis 1 aus R , L und C ; Verstärker 2 mit Eingangsgröße u_e und Ausgangsgröße i_a ; „Transformator“ 3 mit der Gegeninduktivität M
- b) Kennlinie $I_a(U_e)$ des Verstärkers 2 im Teilbild a) mit der Steilheit $S = dI_a/dU_e$
- c) Verlauf der Steilheit S aus Teilbild b)



immer ≥ 0 ist, muss zusätzlich ein „negativer Widerstand R_{neg} “ eingefügt werden; dieser „negative Widerstand“ ist immer eine elektronische Schaltung, die dem Schwingkreis während jeder Schwingung aus einem unbegrenzten Energievorrat soviel Energie zuführt, wie auf andere Weise – z.B. durch Joulesche Wärme – verloren gegangen ist. Wenn die Schwingungsgröße selbst diesen „Zuschaltvorgang“ steuert, spricht man von Rückkopplung. Bild 5.14a zeigt ein Schaltungsbeispiel.

Ganz ähnlich wie zu Gl. (5.35) setzen wir nach Kirchhoff an, dass die Summe der Spannungen im Kreis null ist; diese sind hier die gleichen wie in Gl. (5.35) sowie jetzt zusätzlich die durch den „Transformator 3“, das sog. Rückkopplungsglied $M di_a/dt^1)$ mit entgegengesetzter Phase induzierte Spannung, also

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + (1/C)q - M di_a/dt = 0 \quad (5.38)$$

Dabei ist Bild 5.14 zu entnehmen: Die Steilheit $S = dI_a/dU_e = di_a/du_e$ hat den größten Wert S_0 bei U_{e0} , dem sog. Arbeitspunkt.

Für das „Rückkopplungsglied“ lässt sich noch überlegen, dass einerseits aus $u_e = q/C$ folgt: $du_e = dq/C$, und dass andererseits hiermit

$$\frac{di_a}{dt} = \frac{di_a}{du_e} \frac{du_e}{dt} = \frac{1}{C} \frac{di_a}{du_e} \frac{dq}{dt} = \frac{1}{C} S \dot{q}$$

wird. Einsetzen in Gl. (5.38) und Zusammenfassen der Glieder mit \dot{q} ergibt schließlich:

$$L\ddot{q} + (R - MS/C) \dot{q} + (1/C)q = 0 \quad (5.39)$$

Darin ist der Klammerausdruck vor \dot{q} der Gesamtwiderstand des Kreises, bestehend aus dem Wirkwiderstand R und dem oben geforderten „negativen Widerstand“ $R_{\text{neg}} = MS/C$. Letzterer ist aber wegen $S = f(u_e)$ nicht konstant!

Angenommen, der Verstärker arbeite bei seinem Arbeitspunkt u_{e0} mit der Steilheit $S_0 = S_{\text{max}}$, dann ergibt sich aus Gl. (5.39), in der der Gesamtwiderstand $R - MS/C \leq 0$ sein muss, mit der Gegeninduktivität M die sog.

$$\text{Anschwingbedingung } MS_0 \geq RC$$

Die Abhängigkeit der Steilheit von der Spannung ist natürlich in jedem System anders; da sie aber stets über einen Maximalwert in die Sättigung geht, kann man im Arbeitspunkt immer mit guter Näherung eine quadratische Funktion (umgedrehte Parabel s. Bild 5.14c) annehmen: $S = S_0 - a u_e^2$ oder wegen $u_e = q/C$ auch $S = S_0 - b q^2$ wobei dann $b = a/C^2$ ist.

¹⁾ Vgl. Abschn. 3.3.4.4

Damit ergibt sich (nach Division durch L) die

Van der Pol'sche Differentialgleichung für selbsterregte Schwingungen

$$\ddot{q} + \left(\frac{R}{L} - \frac{M S_0}{LC} + \frac{M}{LC} b q^2 \right) \dot{q} + \frac{1}{LC} q = 0$$

(wegen des q^2 in der Klammer eine nichtlineare Differentialgleichung). Ersetzt man darin die spezielle Variable q verallgemeinernd durch y und die speziellen Koeffizienten durch allgemeine, so lautet sie

$$\ddot{y} + (\alpha - \beta y^2) \dot{y} + \omega^2 y = 0$$

die allgemein, also auch für andere, z.B. mechanische Schwingungen, gültig ist.

Koeffizientenvergleich mit Gl. (5.30) zeigt, dass der Klammerausdruck hier $(\alpha - \beta y^2) = 2\delta$ ist (mit der Abklingkonstanten δ). Bei stabilem Arbeitspunkt, z.B. $2\delta = 0$, nach obiger „Anschwingbedingung“ also mit der Gegeninduktivität $M = R C/S_0$ schwingt das System mit der

$$\text{Eigenkreisfrequenz } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega_0 \quad \text{wie beim ungedämpften System}$$

im Gegensatz zum Verhalten bei „erzwungenen Schwingungen“ des nächsten Abschnittes.

5.1.6 Erzwungene Schwingungen

Von erzwungenen Schwingungen spricht man, wenn auf ein mechanisches oder elektrisches schwingungsfähiges System über eine mehr oder weniger feste Verbindung (Kopplung) von außen eine periodisch veränderliche Kraft oder Spannung einwirkt und das System zum Mitschwingen zwingt. Das Wesentliche erkennt man an einem mechanischen Modell.

5.1.6.1 Mechanische Systeme

Bild 5.15 zeigt als ein mögliches Beispiel ein einfaches Federpendel, das bei 1 an einer Schubstange 2 hängt. Die Schubstange wird über einen verstellbaren Exzenter 3 und ein Übersetzungsgetriebe von einem Elektromotor auf und ab bewegt¹⁾. Die Drehzahl des Motors kann verändert werden. Der Pendelkörper taucht in ein Gefäß 4 ein, das mit verschiedenen Dämpfungsflüssigkeiten gefüllt werden kann.

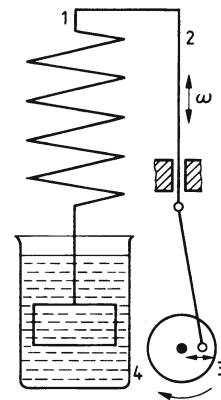


Bild 5.15 Demonstration erzwungener Schwingungen

¹⁾ Bei anderer Anordnung des Anlenkpunktes 1, der Feder, der trägen Masse und der Dämpfung beobachtet man etwas andere Frequenzgänge als in den Versuchen 5 und 6; siehe [12], Bd. 3.

□ **Versuch 5. Erzwungene Schwingungen ohne Dämpfung.** Zunächst bestimmt man bei stehendem Motor und leerem Gefäß 4 die Eigenkreisfrequenz ω_0 des annähernd ungedämpften Federpendels. Lässt man dann den Motor bei sehr kleiner Kreisfrequenz ω_1 ($\omega_1 \ll \omega_0$) laufen, so beobachtet man Folgendes: Nach einer anfänglichen Einschwingzeit mit unregelmäßiger Bewegung des Federpendels stellt sich ein stationärer Zustand ein: Das Federpendel bewegt sich mit der gleichen Frequenz und Amplitude \hat{s}_a wie die Schubstange und durchläuft auch gleichzeitig und gleichsinnig die Ruhelage bzw. die Umkehrpunkte. Es hat also gegen die äußere Schwingung keine Phasenverschiebung ($\Delta\varphi = 0$).

Eine Vergrößerung des Hubes der Schubstange 2 bewirkt eine Verkürzung der Einschwingzeit und eine Vergrößerung der Anfangsamplitude \hat{s}_a .

Erhöht man die Motorkreisfrequenz auf ω_2 , so braucht das Federpendel wieder eine Einschwingzeit, bis es sich auf die andere Schwingung eingestellt hat und mit der neuen Kreisfrequenz ω_2 schwingt. Weitere schrittweise Erhöhungen der Motorkreisfrequenz auf ω_3 , ω_4 , ... zeigen Folgendes: Die Amplituden des Federpendels im stationären Zustand nehmen mit jeder Erhöhung der Motorfrequenz zunächst zu (Kurve 1 in Bild 5.16a). Nähert man sich der Eigenfrequenz ω_0 , so werden sie sogar häufig größer, als es Aufhängung und Befestigung des Federpendels zulassen. Man muss dann doch eine zusätzliche Dämpfung (außer der Luftreibung) anbringen. Kurz vor Erreichen der Eigen-Kreisfrequenz ω_0 (beim gänzlich ungedämpften System genau bei ω_0) werden die Amplituden am größten (beim gänzlich ungedämpften System unendlich groß). Erreger und System sind in Resonanz.

Weiteres Erhöhen der Motorkreisfrequenz bewirkt ein Absinken der Amplituden, bis sie schließlich null werden, wenn $\omega \gg 0$ wird.

Die Phasenverschiebung $\Delta\varphi$ zwischen der Bewegung der Schubstange und der des Pendels ändert sich gleichzeitig vom anfänglichen Wert null auf $\pi/2$, wenn $\omega = \omega_0$ ist, und nähert sich schließlich asymptotisch π , wenn $\omega \gg \omega_0$ wird (Kurve 1 in Bild 5.16b). □

□ **Versuch 6. Erzwungene Schwingungen mit Dämpfung.** Füllt man das Gefäß 4 in Bild 5.15 mit einer zähen Flüssigkeit, z.B. Glycerin, und wiederholt das schrittweise Erhöhen der Motorkreisfrequenz, so beobachtet man folgende Unterschiede gegenüber Versuch 5: Mit zunehmender Kreisfrequenz ω steigen die Amplituden langsamer an (Kurven 2 und 3 in Bild 5.16a). Das Resonanzmaximum ist wesentlich flacher und wird bereits bei einer niedrigeren Kreisfrequenz $\omega = \omega_r$ erreicht (im Bild durch Pfeilspitzen ν markiert). Diese Resonanzkreisfrequenz ω_r ist auch niedriger als die Eigenkreisfrequenz ω_d des gedämpften Systems.

Weniger deutlich unterscheidet sich der Verlauf der Phasenverschiebung (Kurven 2 und 3 in Bild 5.16b) vom Verlauf in Versuch 5 (Kurve 1). Sie beginnt schon bei kleineren Kreisfrequenzen merklich von null verschieden zu werden, erreicht jedoch auch bei $\omega = \omega_0$ den Wert $\pi/2$ und nähert sich – etwas zögernder – dem Wert π , wenn $\omega \gg \omega_0$ wird.

Ein weiterer Unterschied gegenüber Versuch 5 besteht darin, dass hier die Einschwingzeiten kürzer sind. □

Die Beobachtungen der Versuche 5 und 6 lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

Ein schwingungsfähiges System, auf das eine sich mit der Zeit sinusförmig ändernde Kraft ausgeübt wird, schwingt im stationären Zustand mit der Frequenz dieser Erregerkraft. Die Amplituden der Schwingung hängen vom Verhältnis dieser Frequenz zur Eigenfrequenz des Systems ab. Sie erreichen – je nach Dämpfung – ein mehr oder weniger hohes Resonanzmaximum, wenn dieses Verhältnis ungefähr gleich eins wird (Amplitudenresonanz).

Die Phasenverschiebung zwischen erregender Kraft und erzwungener Schwingung ändert sich mit wachsender Frequenz von 0 bis π ; genau bei $\omega = \omega_0$ ist sie $\pi/2$ (Phasenresonanz).

Frequenzgang. Die oben beschriebene Abhängigkeit der Amplitude \hat{s}_s und der Phasenverschiebung des an die starre Sinusbewegung gekoppelten Systems von der Frequenz oder Kreisfrequenz nennt man Frequenzgang des Systems.

Bild 5.16 zeigt einige solche Frequenzgänge für verschieden starke Dämpfungen. Speziell der Frequenzgang der Amplitude (Bild 5.16a) wird Resonanzkurve genannt.

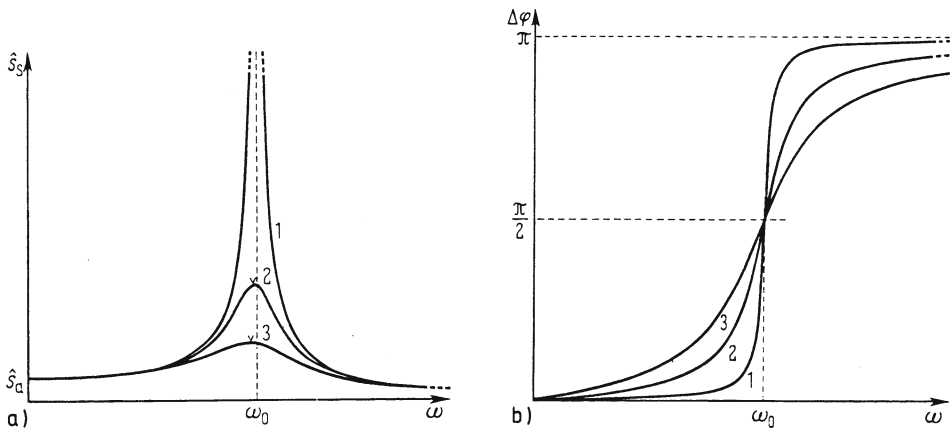
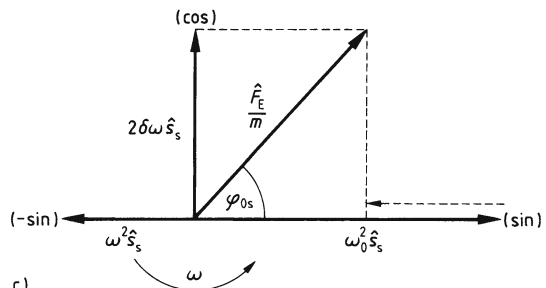


Bild 5.16

- a) Frequenzgang der Amplitude (Maxima der Kurven 2 und 3 bei ν)
- b) Frequenzgang der Phasenverschiebung
- c) Zeigerdiagramm zur Lösung der Gl. (5.40) c)



Resonanz. Der Effekt der Resonanz ist von sehr großer Bedeutung. Fast jedes mechanische System ist schwingungsfähig und kann durch – unter Umständen sehr kleine – äußere periodische Kräfte zu Schwingungen angeregt werden. Geschieht das in Resonanz, so werden die Amplituden sehr groß, und das System ist von der sog. Resonanzkatastrophe

bedroht. Zur Abwehr muss entweder die Einwirkung einer periodischen Kraft prinzipiell verhindert werden (z.B. durften früher militärische Marschkolonnen über Brücken nicht im Gleichschritt marschieren), oder die Eigenfrequenzen der Systeme müssen deutlich andere Werte haben als die Frequenzen der möglichen periodischen Kräfte (eine häufige Maßnahme z.B. im Motoren- und Fahrzeugbau). Lässt sich eine Resonanz nicht verhindern, so kann man ihre Auswirkung begrenzen, entweder, indem die periodische Erregerkraft nur kurzzeitig die Resonanzfrequenz hat, kürzer als die Einschwingzeit (z.B. schnelles „Hochfahren“ und Abbremsen von Turbinen u.ä.), oder, indem man bewusst dämpfende Elemente anbringt.

Zur Erzeugung von Schall, insbesondere in Musikinstrumenten und beim Formen der Vokale unserer Sprache, nützt man dagegen die Resonanz von Festkörpern (Saiten, Membranen etc.) und Lufträumen aus, um bestimmte Frequenzen mit hoher Amplitude zu erzeugen.

Schwingungsfähige Systeme haben häufig nicht nur eine Eigenfrequenz, sondern mehrere, d.h. sie können auf mehrere Arten schwingen. Das kompliziert einerseits die unerwünschten Auswirkungen der Resonanz, ist aber andererseits z.B. für die praktische Ausführung von Musikinstrumenten äußerst wichtig (vgl. Abschn. 5.2.4).

5.1.6.2 Differentialgleichung der erzwungenen Schwingung

Man setzt zur Herleitung die Summe aus Trägheitskraft F_{tr} , Reibungskraft F_R und rückstellender Kraft F_e nicht mehr gleich null – das ergab in Abschn. 5.1.4.1 die homogene Differentialgleichung (5.27) –, sondern gleich der von außen einwirkenden Erregerkraft, die sinusförmig von der Zeit abhängt: $F_E = \hat{F}_E \sin \omega t$ mit der Maximalkraft \hat{F}_E und der Erregerkreisfrequenz ω . Für $F_{tr} + F_R + F_e = F_E$ erhält man also die Differentialgleichung der erzwungenen Schwingung (vgl. Abschn. 5.1.4.1)

$$\ddot{s} + \frac{b}{m}\dot{s} + \frac{D}{m}s = \frac{\hat{F}_E}{m} \sin \omega t \quad (5.40)$$

Das ist eine inhomogene Differentialgleichung (vgl. z.B. [1]). Die Lösung für den stationären, den eingeschwungenen Zustand, der hier nur interessiert, findet man durch einen Ansatz, der das experimentelle Ergebnis berücksichtigt, dass das System dann mit der gleichen Frequenz ω wie die Störkraft schwingt, jedoch mit der Systemamplitude \hat{s}_S und dem Systemnullphasenwinkel φ_{0S} :

$$\begin{aligned} s &= \hat{s}_S \sin(\omega t - \varphi_{0S}) \\ \dot{s} &= \omega \hat{s}_S \cos(\omega t - \varphi_{0S}) \\ \ddot{s} &= -\omega^2 \hat{s}_S \sin(\omega t - \varphi_{0S}) \end{aligned} \quad (5.41)$$

Einsetzen dieser Gleichungen in Gl. (5.40) unter Berücksichtigung von Gl. (5.6) $D/m = \omega_0^2$ und Gl. (5.29) $b/m = 2\delta$ ergibt:

$$-\omega^2 \hat{s}_S \sin(\omega t - \varphi_{0S}) + 2\delta \omega \hat{s}_S \cos(\omega t - \varphi_{0S}) + \omega_0^2 \hat{s}_S \sin(\omega t - \varphi_{0S}) = (\hat{F}_E/m) \sin(\omega t)$$

Dies ist im Zeigerdiagramm Bild 5.16c dargestellt. Man liest daraus ab:

$$(\hat{F}_E/m)^2 = (2\delta\omega\hat{s}_S)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2 \hat{s}_S^2$$

Daraus ergibt sich dann:

$$\varphi_{0S} = \arctan \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad \hat{s}_S = \frac{\hat{F}_E/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2/\omega^2}}$$

Das Resonanzmaximum (Bild 5.16a) erhält man durch Differenzieren und Nullsetzen bei der Resonanzfrequenz

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \quad (5.42)$$

Die Höhe des Resonanzmaximums, die Resonanzamplitude \hat{s}_r , erhält man aus der Gleichung für \hat{s}_s mit $\omega = \omega_r$ zu

$$\hat{s}_r = \hat{F}_E / \left(m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_r^2)^2 + 4\delta^2 \omega_r^2} \right)$$

und mit Gl. (5.42) nach einigen Umformungen

$$\hat{s}_r = \hat{F}_E \omega_0 / \left(m \omega_0^2 \delta^2 \sqrt{1 - (\delta/\omega_0)^2} \right)$$

Berücksichtigt man noch, dass wegen des linearen Kraftgesetzes die Anfangsamplitude $\hat{s}_a = \hat{F}_E/D$ und nach Gl. (5.5) $D = m\omega_0^2$ ist, so wird

$$\hat{s}_r = \hat{s}_a \omega_0 / \left(2\delta \sqrt{1 - (\delta/\omega_0)^2} \right)$$

und das Verhältnis der Resonanzamplitude zur Anfangsamplitude, die sog. Resonanzüberhöhung,

$$\frac{\hat{s}_r}{\hat{s}_a} = \frac{\omega_0}{2\delta} \frac{1}{\sqrt{1 - (\delta/\omega_0)^2}}$$

Bei geringer Dämpfung ist $\delta^2 \ll \omega_0^2$, also $\delta^2/\omega_0^2 \ll 1$ und die Resonanzüberhöhung

$$\frac{\hat{s}_r}{\hat{s}_a} \approx \frac{\omega_0}{2\delta} \approx Q^1)$$

Dieses Ergebnis liefert eine bequeme Methode zur Messung des Gütefaktors Q .

5.1.6.3 Erzwungene elektromagnetische Schwingungen

An einem elektrischen Schwingkreis (Bild 5.17) kann man erzwungene elektromagnetische Schwingungen ebenso gut beobachten wie mechanische in Abschn. 5.1.6.1. Die Schwingungsgröße sei hier $u_s = f(t)$, die Spannung am Kondensator.

Ihr zeitlicher Verlauf kann z.B. durch ein Oszilloskop sichtbar gemacht werden. Von außen aufgebracht werde die Erregergröße

$$u_E = \hat{u}_E \sin(\omega t + \varphi_{0E})$$

mit der Erregeramplitude \hat{u}_E , der Erregerkreisfrequenz ω und dem Erregernullphasenwinkel φ_{0E} . Auch andere Ankopplungen wie z.B. über das elektrische Feld in einem Kondensator oder über elektromagnetische Wellen (s. Abschn. 5.2.5.4) sind möglich. Bei der hier gezeichneten Anordnung beobachtet man den gleichen Frequenzgang wie in Abschn. 5.1.6.1)²⁾. Im stationären Zustand – das ist nach Ablauf der Einschwingzeit – ändert sich die Spannung u_s im Schwingkreis mit der gleichen Fre-

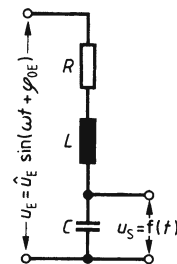


Bild 5.17 Erzeugung erzwungener elektromagnetischer Schwingungen

¹⁾ vgl. die entsprechende Bemerkung auf S. 390.

²⁾ Siehe auch Fußnote 1 auf S. 395.

quenz wie die Erregung, jedoch mit der Systemamplitude \hat{u}_s und dem Systemnullphasenwinkel φ_{0s} . Amplitude und Phasenverschiebung zeigen die gleiche Abhängigkeit von ω wie die entsprechenden mechanischen Größen in Bild 5.16. Auch die Herleitung einer Differentialgleichung und ihre Lösung ist ganz analog wie im vorigen Abschnitt, braucht also hier nicht wiederholt zu werden.

Was in der Fußnote auf S. 395 schon angedeutet ist, soll hier nochmals nachhaltig ausgesprochen werden:

Bei erzwungenen Schwingungen muss genau festgelegt sein, welche Größe als Erregergröße betrachtet wird, wie sie auf das System einwirkt und von welcher Größe des Systems die Frequenzgänge betrachtet werden sollen.

Nur dann ist eine Messung oder Berechnung und ein Vergleich mit anderen Messungen oder Berechnungen sinnvoll. Die Behandlung aller Variationsmöglichkeiten würde hier zu weit führen. Wegen der großen Bedeutung für Mechanik und Elektrizität sei aber nochmals auf weiterführende Literatur, z.B. [1] und [12] hingewiesen.

Anwendungen. Die Resonanz elektrischer Schwingkreise bei erzwungener Schwingung spielt in der ganzen Rundfunk- und Nachrichtentechnik eine sehr wichtige Rolle. Wenn es notwendig ist, aus einem vielfältigen Frequenzgemisch eine bestimmte Frequenz auszuwählen, um sie getrennt von allen anderen z.B. weiter zu verstärken, verwendet man „Resonanzkreise“.

Nichtlineare schwingungsfähige Systeme wie z.B. mechanische mit nichtlinearem Verlauf der rückstellenden Kraft (besondere Federn) oder elektrische mit spannungsabhängigen Kapazitäten o.ä. zeigen z.T. erheblich komplizierteres Resonanzverhalten: Der Frequenzgang der Amplitude wird abhängig von der Erregeramplitude.

Bei kleinen Erregeramplituden zeigt sich noch keine Besonderheit. Das System schwingt im stationären Zustand mit der gleichen Frequenz wie der Erreger, die Amplitude verläuft nach einer der Kurven von Bild 5.16a.

Erhöht man die Erregeramplitude, reagiert das System zunächst so, dass es in der Nähe der Resonanzfrequenz von Periode zu Periode abwechselnd zwei verschiedene Amplituden durchläuft. Bild 5.18a zeigt das Oszillogramm einer derartigen Schwingung. Der Unterschied zwischen den beiden Amplituden hängt vom Frequenzabstand zur ursprünglichen Resonanzfrequenz und von der Dämpfung ab.

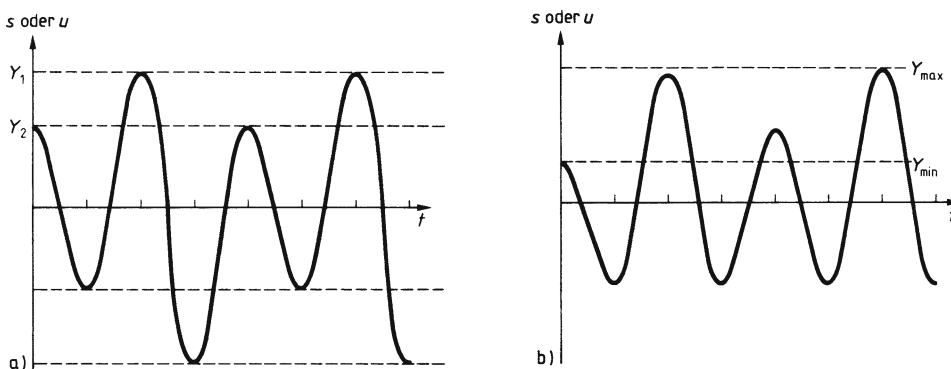


Bild 5.18 Oszillogramme eines nicht linearen Systems, das von einem sinusförmig schwingenden Erreger mit verschiedenen Amplituden zu erzwungenen Schwingungen angeregt wird.

Erhöht man die Erregeramplitude weiter, so antwortet das System chaotisch, d.h. in der Nähe der ursprünglichen Resonanzfrequenz kann unvorhersehbar jede beliebige Amplitude zwischen Y_{\max} und Y_{\min} auftreten (Bild 5.18b). Dieses sog. „chaotische Gebiet“, d.h. der Amplitudenbereich $\Delta Y = Y_{\max} - Y_{\min}$, der vorkommen kann, und der Frequenzbereich Δf in der Nähe der ursprünglichen Resonanzfrequenz, bei der dies möglich ist, wächst mit steigender Erregeramplitude.

5.1.6.4 Parametrisch angeregte Schwingungen

Man kann Schwingungen auch dadurch anregen, dass man eine der charakteristischen Größen des Systems – z.B. die Länge eines Schwerependels, die Kapazität oder Induktivität eines elektrischen Schwingkreises – allgemein einen der frequenzbestimmenden Parameter eines Systems, periodisch ändert. Das Wesentliche erkennt man wieder leicht im folgenden

□ **Versuch 7. Parametrisch angeregte mechanische Schwingung.** Ein Körper mit der Masse m hängt an einem Faden und bildet so ein Schwerependel (Bild 5.19a). Der Faden ist oben jedoch nicht festgemacht, sondern läuft über eine Rolle 1 und wird bei 2 am einfachsten mit der Hand gehalten. Man kann dem Pendel durch periodisches Hinundherbewegen der Hand in Richtung des Doppelpfeiles unter folgenden Bedingungen Energie zuführen:

1. Das Pendel muss zu Beginn des Versuches schwingen, wenn auch nur mit kleiner Amplitude.
2. Die Frequenz der Handbewegung – die sog. Pumpfrequenz – muss gleich der doppelten Eigenfrequenz des Pendels sein.
3. Die Phasenverschiebung zwischen der periodischen Handbewegung und der Pendelschwingung muss einen bestimmten Wert haben.

Nach leichtem Anstoß des Pendels (Bedingung 1) erreicht man schnell durch rein gefühlsmäßiges Probieren die Erfüllung der 2. und 3. Bedingung. Man kann somit dem Pendel Energie zuführen, sodass es mit kräftiger Amplitude zu schwingen beginnt. □

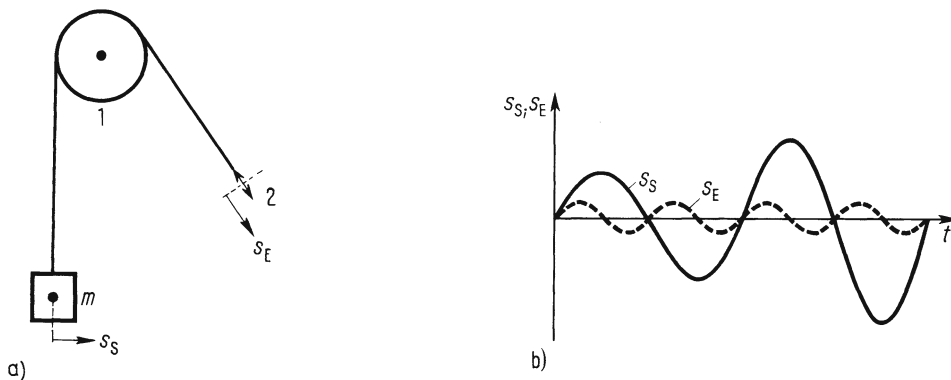


Bild 5.19 a) Parametrische Anregung einer Pendelschwingung

b) Auslenkung des Pendels (s_S ausgezogen) und der parametrischen Erregung (s_E gestrichelt) in Abhängigkeit von der Zeit

Erklärung: Die Kraft, mit der der Pendelkörper an seinem Faden zieht, schwankt aus zwei Gründen:

1. Der Pendelkörper bewegt sich bei der Schwingung kreisförmig mit periodisch wechselnder Geschwindigkeit. Dementsprechend schwankt die Zentrifugalkraft und wird natürlich in den Umkehrpunkten null.
2. Von der Gewichtskraft des Körpers wirkt nur die Komponente in Fadenrichtung als Zugkraft auf den Faden. Diese Komponente schwankt mit dem Winkel gegen die Vertikale, also mit dem Ausschlag. Sie hat wie die Zentrifugalkraft ihren Maximalwert bei jedem Nulldurchgang, ihren Minimalwert in den Umkehrpunkten.

Die Fadenkraft schwankt also um einen Mittelwert mit einer Frequenz doppelt so hoch wie die des Pendels. Das periodische Verkürzen und Verlängern des Pendelfadens in Versuch 7 muss dann ebenfalls mit der doppelten Pendelfrequenz erfolgen. Das ist die oben genannte Pumpfrequenz. Erfolgt das Ziehen (Weg s_E von $-\hat{s}_E$ bis $+\hat{s}_E$), während die Fadenkraft größer als ihr Mittelwert ist, d.h. um den Nulldurchgang der Pendelbewegung herum, das Nachlassen (Weg s_E von $+\hat{s}_E$ bis $-\hat{s}_E$) während der verringerten Fadenkraft, also um den Umkehrpunkt der Pendelbewegung herum, so wird dem System beim Ziehen mehr Energie zugeführt, als es beim Verlängern abgibt. Somit steigt der Energieinhalt, die Amplituden nehmen zu, wir haben eine Art Resonanz. Bild 5.19b zeigt den Verlauf der Pendelschwingung s_S und der parametrischen Erregung s_E in Abhängigkeit von der Zeit. Fassen wir zusammen:

Um ein System mit der Eigenfrequenz f_0 parametrisch zu Schwingungen anzuregen, muss die Erregung mit dem gleichen Nullphasenwinkel wie die Systemschwingung beginnen und eine Pumpfrequenz $f_p = 2 f_0$ haben.

Diese Aussage gilt nur für den hier behandelten sog. „Entartungsfall“. Das Gebiet der parametrischen Schwingungen ist erheblich umfangreicher; siehe hierzu z.B. [41].

Parametrisch angeregte elektromagnetische Schwingungen sind ebenfalls möglich. In erster Linie kommt hierfür eine Änderung der Kapazität des Schwingkreises in Frage. Man kann z.B. den Abstand der Platten eines Kondensators mit der Pumpfrequenz ändern, oder im Schwingkreis statt eines Kondensators eine sog. Kapazitätsdiode verwenden (s. Abschn. 7.4.3.3). Deren Kapazität hängt von der anliegenden Spannung ab, kann also mit der Pumpfrequenz geändert werden.

Anwendungen. Eine mechanische Anwendung ist das Schaukeln, z.B. in den sog. Schiffschaukeln auf Jahrmärkten o.ä. Dabei wird durch periodisches Beugen und Strecken der Knie der Abstand des Schwerpunktes vom Drehpunkt, also die wirksame Pendellänge, geändert. Zur besonders rauscharmen Verstärkung sehr kleiner elektrischer Signale dienen sog. parametrische Verstärker.

Aufgaben zu Abschn. 5.1.4. bis 5.1.6

1. Das in Aufgabe 3, Abschn. 5.1.2, beschriebene Drehpendel (Uhrenunruh) wird mit einer Maximalamplitude $\hat{\varepsilon}_0 = \pi/2$ angestoßen. Nach 3 Schwingungen ist die Amplitude $\hat{\varepsilon}_3$ nur noch der e-te Teil von $\hat{\varepsilon}_0$ a) Wie groß ist das logarithmische Dekrement? b) Wie groß ist die zweite Amplitude $\hat{\varepsilon}_1$? c) Wie groß ist die Abklingkonstante δ ? d) Welche Energie muss pro Schwingung zugeführt werden, damit die Amplitude immer $\pi/2$ bleibt? e) Welcher Teil der in der Antriebsfeder der zugehörigen Uhr gespeicherten Energie wird demnach von der Unruh verbraucht, wenn man die Uhr alle 24 Stunden mit dem mittleren Drehmoment $2 \cdot 20^{-2} \text{ Nm}$ und 5 Umdrehungen aufziehen muss?

2. Ein elektrischer Schwingkreis für 1 MHz hat die Kapazität 1 nF. Durch welchen Wirkwiderstand wird der Kreis gerade aperiodisch gedämpft?
3. Welche Dämpfungskonstanten b müssten die 4 Stoßdämpfer des in Aufgabe 4, Abschn. 5.1.2, behandelten Fahrzeugs haben, damit sich die

Federung des Aufbaus gegen das Fahrgestell gerade aperiodisch verhält? Wie ändert sich dieses Verhalten, wenn das Fahrzeug beladen wird?

4. Man berechne die Leistung P als Funktion der Zeit, die einem erzwungen schwingenden System bei Phasenresonanz zugeführt wird. Welche Konsequenz hat das?

5.1.7 Andere Schwingungsformen

Bei den bisher besprochenen Schwingungen haben wir uns ausdrücklich auf solche beschränkt, denen ein lineares Kraftgesetz zugrunde liegt. Dieses ergibt in allen Fällen sinusförmige Schwingungen, die häufig auch harmonische Schwingungen genannt werden. Viele Schwingungen in Natur und Technik sind jedoch nicht sinusförmig.

5.1.7.1 Nichtlineares Kraftgesetz

Dieses ist der häufigste Grund für nichtsinusförmige Schwingungen. Jedoch schon bei einigen quasielastischen Schwingungen (Abschn. 5.1.3) war die Linearität nur eine Näherung. Jedoch auch rein elastische Systeme können z.B. durch sog. progressive Federn nichtlinear sein. Außerdem sind alle Systeme, bei denen Anziehungskräfte des magnetischen, des elektrischen oder des Gravitationsfeldes eine Rolle spielen und bei denen sich die wirksamen Abstände r während der Schwingung ändern, nichtlinear, da diese Anziehungskräfte proportional $1/r^2$ sind. Bei elektrischen Schwingkreisen ergeben insbesondere Spulen mit ferromagnetischem Kern einen nichtlinearen Verlauf, da die Induktivität solcher Spulen stromabhängig ist (vgl. Abschn. 3.3.4.3 und 3.3.5.3). Auch Kondensatordielektrika mit spannungsabhängiger Dielektrizitätszahl bewirken in einem Schwingkreis nicht sinusförmige Schwingungen.

Schwingungen von Systemen mit nichtlinearem Kraftgesetz sind nicht sinusförmig.

Auch zusätzliche Bauelemente, z.B. amplitudenbegrenzende Vorrichtungen, können ganz erhebliche Verformungen der Oszillogramme bewirken.

Trotz dieser vielfältigen Möglichkeiten anderer Schwingungsformen hat man mit der Behandlung der sinusförmigen doch bereits fast alles erledigt. Nach Euler und Fourier¹⁾ kann nämlich jede periodische Funktion durch eine Summe von (u.U. unendlich vielen) sinus- oder kosinusförmigen Gliedern dargestellt werden. Die Frequenzen in diesen Gliedern sind alle ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz. Vgl. hierzu z.B. [1].

Demnach ist jede nichtsinusförmige Schwingung ein Gemisch aus sinusförmigen Teilschwingungen verschiedener Frequenzen, wie auch umgekehrt die Überlagerung verschiedenfrequenter Sinusschwingungen eine nichtsinusförmige Schwingung ergibt.

¹⁾ Leonhard Euler (1707 bis 1783); Jean-Baptiste Joseph Baron de Fourier (1768 bis 1830).

Statt der mathematischen Zerlegung nach Fourier kann man eine nichtsinusförmige Schwingung auch physikalisch analysieren. Man koppelt z.B. die zu untersuchende Schwingung auf ein leicht gedämpftes schwingungsfähiges System, dessen Eigenfrequenz in einem bestimmten Bereich kontinuierlich verändert werden kann. Bei jeder eingestellten Eigenfrequenz, die auch im zu analysierenden Gemisch enthalten ist, tritt dann eine Resonanzamplitude auf, die der Erregeramplitude proportional ist. Ein Diagramm der so ermittelten Amplituden in Abhängigkeit von der Frequenz nennt man ein Spektrum. Bild 5.20a zeigt das Oszillogramm einer nichtsinusförmigen Schwingung und darunter (b) das Spektrum dieser Schwingung. Es besteht aus drei Linien bei $f=3$ Hz, 5 Hz und 10 Hz. Die Länge dieser Linien gibt die Amplitude an, die die jeweilige sinusförmige Teilschwingung hat. Ein Spektrum ist also eine einfachere Darstellungsform einer Schwingung als das Oszillogramm. Es enthält keine Angabe über die Nullphasenwinkel der Teilschwingungen oder Phasenverschiebungen zwischen diesen, obwohl diese für die Form der nichtsinusförmigen Schwingungen wesentlich sind. Oft ist jedoch die Kenntnis des Spektrums ausreichend (s. Abschn.5.2.5.3 und 5.2.5.5).

5.1.7.2 Kippschwingungen

Eine andere Art von Schwingungen, die auch nichtsinusförmig sind, also hierher gehören, die aber anders entstehen, sind die Kippschwingungen. Das Typische ihrer Entstehung sieht man an folgendem

□ **Versuch 8. Mechanische Kippschwingungen.** Bild 5.21a zeigt ein Wassergefäß 1 mit einem dauernden Zufluss 2 aus der Wasserleitung und einem Abfluss 3 mit größerem Querschnitt als 2. Das zufließende Wasser füllt zunächst den Behälter bis zur Höhe h_1 .

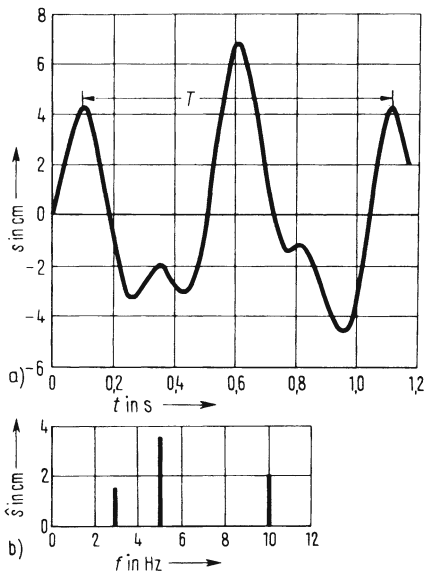


Bild 5.20 a) Oszillogramm einer nichtsinusförmigen Schwingung b) deren Spektrum

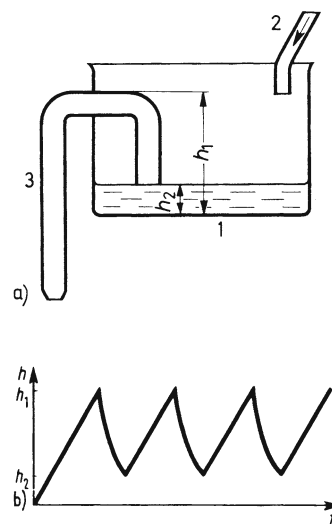


Bild 5.21 Entstehung (a) und Oszillogramm (b) einer mechanischen Schwingung

Dann beginnt das Wasser abzufließen. Füllt sich dabei das Abflussrohr ganz mit Wasser, so wirkt es als Saugheber und entleert den Behälter bis zur Höhe h_2 . Darauf beginnt wieder die Füllung bis h_1 usw. Bild 5.21b zeigt den Verlauf der Wasserhöhe in Abhängigkeit von der Zeit, also ein Oszillogramm der Kippschwingung. □

Wie in Abschn. 5.1.1 ausgeführt wurde, ist für eine Schwingung typisch, dass sich ein bestimmter Energiebetrag periodisch von einer Form in eine andere umwandelt. Die Kippschwingungen dagegen sind anders geartet: Aus einem unbegrenzten Energievorrat wird ein Energiespeicher kontinuierlich aufgefüllt, aber diskontinuierlich und periodisch entleert.

□ **Versuch 9. Elektrische Kippschwingungen** erhält man, wenn man einen Kondensator C (Bild 5.22a) aus einer Batterie 1 auflädt (wobei die Ladegeschwindigkeit durch einen Widerstand begrenzt wird) und über eine Glimmlampe 2 (vgl. Abschn. 3.2.6.2) entlädt. Wenn die Kondensatorspannung die Zündspannung U_Z überschreitet, wird die Gasstrecke leitfähig, und die Entladung des Kondensators setzt ein. Dadurch sinkt jedoch seine Spannung u . Unterschreitet sie die Löschspannung U_L , so verliert die Gasstrecke ihre Leitfähigkeit, die Entladung wird unterbrochen, und der Kondensator kann sich wieder aufladen. Bild 5.22b zeigt das Oszillogramm dieser Kippschwingung. □

Anwendungen. Die in Versuch 8 geschilderten mechanischen Kippschwingungen werden zur periodischen selbsttätigen Wasserspülung von Toilettenanlagen benutzt. Elektrische Kippschwingungen dienen z.B. zur Erzeugung der Ablenkspannung für Oszilloskope.

Allerdings werden meist sowohl statt der Glimmlampe als auch statt des Ladewiderstandes R Halbleiterbauelemente verwendet. Damit lassen sich wesentlich höhere Frequenzen der Kippschwingung und ein linearer Anstieg der Spannung erzielen.

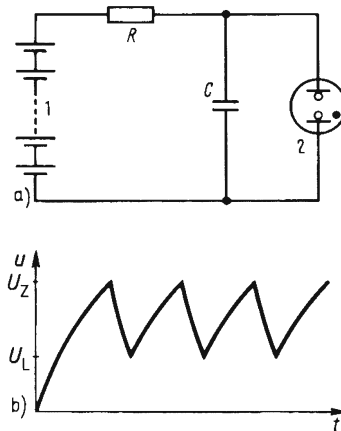


Bild 5.22 Entstehung (a) und Oszillogramm (b) einer elektrischen Kippschwingung

5.1.8 Überlagerung von Schwingungen

Unter dem Begriff „Überlagerung von Schwingungen“ versteht man Folgendes: Zwei (oder mehrere) schwingungsfähige Systeme können unabhängig voneinander schwingen. Ihre Schwingungsgrößen – z.B. ihre Auslenkungen oder Spannungen – verändern gemeinsam über irgend eine Vorrichtung eine dritte Größe, z.B. die Lage eines Punktes, eines Lichtflecks oder die Spannung an einem Kondensator etc. Diese veränderte dritte Größe ist dann ein Bild der vektoriellen Summe der beiden Schwingungsgrößen. Sie ist im Allgemeinen wieder eine periodische Funktion der Zeit.

5.1.8.1 Parallele Überlagerung

Bild 5.23 zeigt eine mechanische Anordnung, mit der das Wesentliche erläutert werden kann. Die folgenden Beobachtungen und Überlegungen lassen sich jedoch ohne weiteres auch auf alle anderen Schwingungsarten, insbesondere auf elektromagnetische übertragen.

Die Versuchsanordnung (Bild 5.23) enthält zwei schwingungsfähige Systeme 1 und 2, bestehend aus je einer Blattfeder und je einem Spiegel¹⁾ an deren oberem Ende. Sowohl Schwingungen des Systems 1 als auch des Systems 2 bewegen den Lichtfleck (von der Lampe 3) auf der Wand 5 in y -Richtung. Eine Rotation des Polygonspiegels 4 dagegen bewegt ihn in x -Richtung. Diese soll als Zeitachse dienen, d.h. auf der Wand 5 wird ein Oszillogramm geschrieben.

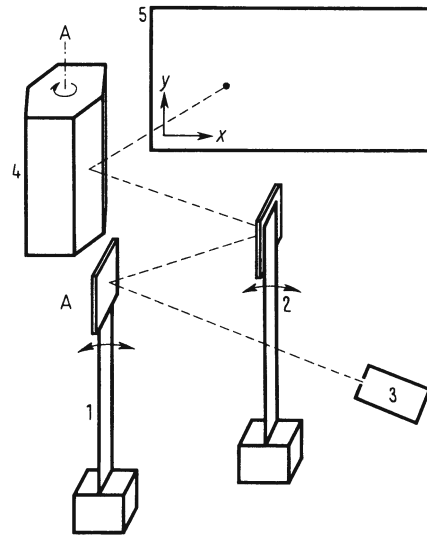


Bild 5.23 Überlagern und Oszillographieren zweier mechanischer Schwingungen

□ **Versuch 10. Überlagerung bei gleichen Eigenfrequenzen.** Beide schwingungsfähigen Systeme werden so justiert (Länge der Blattfeder oder Masse), dass sie gleiche Eigenfrequenz haben. Schwingt entweder das eine System 1 oder das andere 2 und rotiert der Polygonspiegel 4, so erscheint jeweils die gleiche Sinuslinie auf der Wand 5. Auch wenn beide Systeme gleichzeitig schwingen, erscheint eine Sinuslinie gleicher Frequenz. Ihre Amplitude hängt jedoch von den Amplituden der Einzelschwingungen und von der Phasenverschiebung $\Delta\varphi$ zwischen diesen ab. Bei der Phasenverschiebung $\Delta\varphi = 0$ addieren sich die Beträge der Einzelamplituden, bei $\Delta\varphi = \pi$ subtrahieren sie sich. Falls also beide Teilamplituden den gleichen Betrag haben und $\Delta\varphi = \pi$ ist, erscheint im zweiten Fall nur ein Strich in x -Richtung. □

□ **Versuch 11. Überlagerung bei verschiedenen Eigenfrequenzen.** Verlängert man in der Anordnung nach Bild 5.23 eine der Blattfedern oder bringt man an einem der Systeme eine Zusatzmasse an, so haben die beiden Systeme verschiedene Eigenkreisfrequenzen ω_1 und ω_2 . Man hat im Wesentlichen drei Fälle zu unterscheiden:

I. Die Frequenzen der beiden Schwingungen unterscheiden sich nur wenig voneinander ($\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega$; $\Delta\omega \ll \omega_1$); die Amplituden sind gleich. Dann entsteht ein Oszillogramm wie in Bild 5.24a, genannt eine „reine Schwebung“.

II. Die Frequenzen unterscheiden sich ebenfalls nur wenig; aber die Amplituden sind nicht gleich. Es entsteht ein Oszillogramm wie in Bild 5.24b, genannt eine „unreine Schwebung“.

III. Die beiden Frequenzen unterscheiden sich deutlich voneinander ($\omega_2 = N \omega_1$; $N > 2$); die Amplituden sind gleich. Dadurch entsteht ein Oszillogramm wie in Bild 5.24c. □

Mathematisch bedeutet die Überlagerung eine Addition der beiden Auslenkungen mit gleichen Frequenzen $s = \hat{s} \sin(\omega_0 t + \varphi_{01})$ und $s^* = \hat{s}^* \sin(\omega_0 + \varphi_{02})$ zu der gemeinsamen Auslenkung

$$s_{\text{ges}} = s + s^* = \hat{s}_{\text{ges}} \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

¹⁾ beide mit gleichen Massen

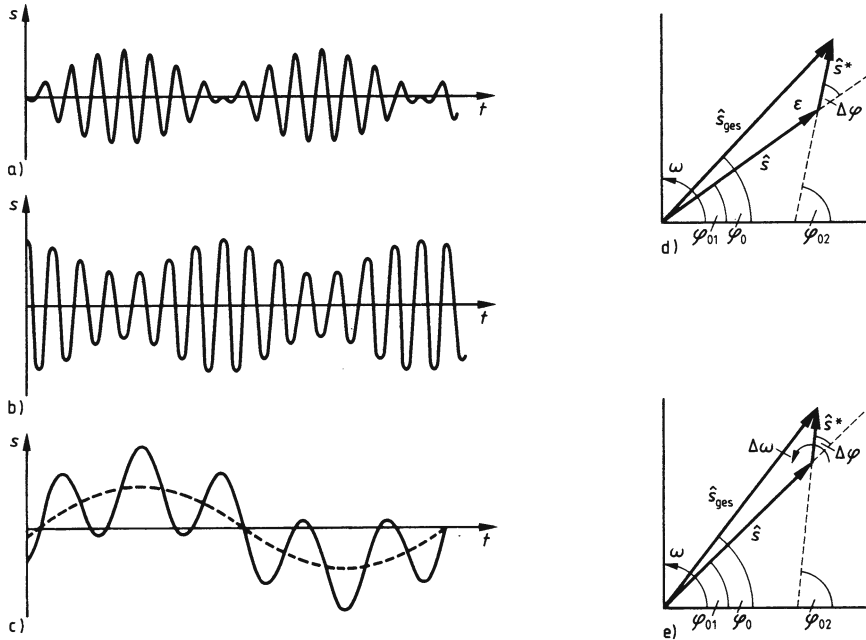


Bild 5.24 Oszillogramme zweier überlagerter Schwingungen

- a) Geringer Frequenzunterschied; gleiche Amplituden: Reine Schwebung.
 b) Geringer Frequenzunterschied; ungleiche Amplituden: Unreine Schwebung.
 c) Größerer Frequenzunterschied: Die Schwingung des schnelleren Systems ist nicht symmetrisch zur t -Achse, sondern zu der gedachten (im Bild gestrichelten) Linie, die durch das langsamere System allein aufgezeichnet würde.
 d) Zeigerdiagramm zu Versuch 10.
 e) Zeigerdiagramm zu Versuch 11.

Die in Abschn. 3.3.8.4 eingeführte Darstellungsweise von Wechselstromgrößen mit Hilfe von Zeigern lässt sich natürlich für beliebige periodisch veränderliche Größen wie z.B. hier unsere Schwingungsgrößen anwenden¹⁾.

Bild 5.24d ist eine solche Zeigerdarstellung für den Fall gleicher Eigenfrequenzen. Mit Hilfe des Kosinussatzes lässt sich ablesen:

$$\hat{s}_{\text{ges}}^2 = \hat{s}^2 + \hat{s}^{*2} - 2\hat{s}\hat{s}^* \cos \varepsilon \text{ und (weil } \varepsilon = 180^\circ - \Delta\varphi \text{ und } \Delta\varphi = \varphi_{02} - \varphi_{01} \text{ ist):}$$

$$\hat{s}_{\text{ges}} = \sqrt{\hat{s}^2 + \hat{s}^{*2} + 2\hat{s}\hat{s}^* \cos \Delta\varphi} \quad (5.43)$$

Durch parallele Überlagerung von zwei sinusförmigen Teilschwingungen gleicher Frequenz entsteht wieder eine sinusförmige Schwingung der gleichen Frequenz. Ihre Amplitude hängt von den Amplituden der Teilschwingungen und von der Differenz ihrer Nullphasenwinkel ab.

Sind speziell die beiden Einzelamplituden einander gleich, also $\hat{s} = \hat{s}^*$, so ergibt sich

$$\hat{s}_{\text{ges}} = \sqrt{2\hat{s}^2(1 + \cos \Delta\varphi)}, \text{ das sich vereinfachen lässt zu: } \hat{s}_{\text{ges}} = 2\hat{s} \cos [1/2 (\varphi_{01} - \varphi_{02})].$$

¹⁾ Vgl. z.B. [1] und Abschn. 3.4.3

Bild 5.24e schließlich ist die Zeigerdarstellung für den Fall verschiedener Eigenfrequenzen ω_1 und ω_2 , wobei $\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega$ sei. Jetzt ist $\Delta\varphi = \Delta\omega t + \Delta\varphi_0$, d.h. Zeiger 2 kreist um die Spitze von Zeiger 1 mit der Kreisfrequenz $\Delta\omega$. Der Zeiger der resultierenden Schwingung ist dadurch auf zweierlei Weise veränderlich:

1. Mit dem Ergebnis von Bild 5.23b ergibt sich die resultierende Amplitude zu

$$\hat{s}_{\text{ges}} \sqrt{\hat{s}^2 + \hat{s}^{*2} + 2\hat{s}\hat{s}^* \cos(\Delta\omega t + \Delta\varphi_0)} \quad (5.44)$$

dies bedeutet eine Amplitudenmodulation; wenn $\Delta\omega \ll \omega$ ist, nennt man dies eine Schwebung¹⁾.

2. Die Frequenz der resultierenden Schwingung schwankt zwischen $\omega + \Delta\omega$ (beim Höchstwert von \hat{s}_{ges}) und $\omega - \Delta\omega$ (beim kleinsten Wert von \hat{s}_{ges}), d.h. wir haben auch eine Frequenzmodulation.

Sind speziell die beiden Einzelamplituden einander gleich, also $\hat{s} = \hat{s}^*$, so verschwindet die Frequenzmodulation und der kleinste Wert von \hat{s}_{ges} wird null (Bild 5.24a, „reine Schwebung“):

Bei der parallelen Überlagerung zweier sinusförmiger Schwingungen gleicher Amplitude \hat{s} und wenig unterschiedlicher Frequenzen f_1 und f_2 entsteht eine Schwingung mit der sog. Mittenfrequenz $f_M = 1/2(f_1 + f_2)$, deren Amplitude mit der sog. Schwebungsfrequenz f_S zwischen Null und $2\hat{s}$ schwankt. Da diese Schwebungsfrequenz definiert ist als der Kehrwert des Zeitintervalls zwischen zwei aufeinanderfolgenden Amplitudennullstellen ergibt sich

$$f_S = f_2 - f_1$$

Da über die Schwebungen immer sehr genaue Frequenzvergleiche möglich sind, gehören Frequenzmessungen neben Wägungen zu den genauesten Messmethoden.

Anwendungen. Das Auftreten von relativ langsamen Schwebungen wird in der Akustik ausgenützt, um den geringen Frequenzunterschied zweier Systeme, z.B. eines Musikinstrumentes und einer geeichten Stimmgabel, festzustellen. Falls die Eigenfrequenz eines Systems justierbar ist, kann man auf diese Weise die Differenz sehr genau zu null machen („Stimmen“). Zur Erzeugung von Tönen, d.h. Schwingungen zwischen 16 Hz und 18 kHz, dienen in der Elektroakustik häufig sog. Schwebungssummer. Dieser Name ist aber irreführend, denn durch „Schwebung“, d.h. durch lineares Überlagern nach dem Prinzip des Versuches 11 entsteht aus zwei Schwingungen keine dritte; d.h. wenn man das Spektrum der Überlagerung aufnimmt, findet man nur die beiden Frequenzen f_1 und f_2 , nicht aber die Schwebungsfrequenz $f_S = f_1 - f_2$. (Dazu ist die sog. Mischung von zwei Schwingungen notwendig, d.h. nichtlineares oder multiplikatives Überlagern, wobei sich im Spektrum dann die beiden Frequenzen $f_1 - f_2$ und $f_1 + f_2$ finden.) Vgl. hierzu z.B. [13], Bd. 1.

Auch die Zwischenfrequenz in Rundfunkempfängern, sog. Überlagerungs- oder Superheterodynempfängern, entsteht nicht durch einfache Überlagerung, sondern durch Mischung.

5.1.8.2 Senkrechte Überlagerung

□ **Versuch 12.** Wenn man in der Anordnung von Bild 5.23 eines der schwingungsfähigen Systeme, z.B. Blattfeder 1 mit Spiegel, nicht – wie gezeichnet – in dem kubischen Fuß befestigt, sondern so, dass die Längsachse der Blattfeder senkrecht zu der des Systems 2 und

¹⁾ Dem An- und Abschwellen der Amplituden entspricht bei Akustischen Schwingungen ein Lauter- und Leiserwerden des Tones, davon stammt die Bezeichnung „Schwebung“.

senkrecht zur Zeichenebene steht, so bewegt eine Schwingung des Systems 1 den Lichtfleck auf der Wand 5 nun in x -Richtung, während eine Schwingung des Systems 2 weiterhin Auslenkung in y -Richtung ergibt. (Der Polygonspiegel 5 ist nun überflüssig.) Schwingen beide Systeme, so haben wir in der Bewegung des Lichtflecks eine senkrechte Überlagerung der Schwingungsgrößen, es werden Figuren gezeichnet von der Art wie in Bild 5.25 wiedergegeben, die man Lissajous-Figuren nennt¹⁾. □

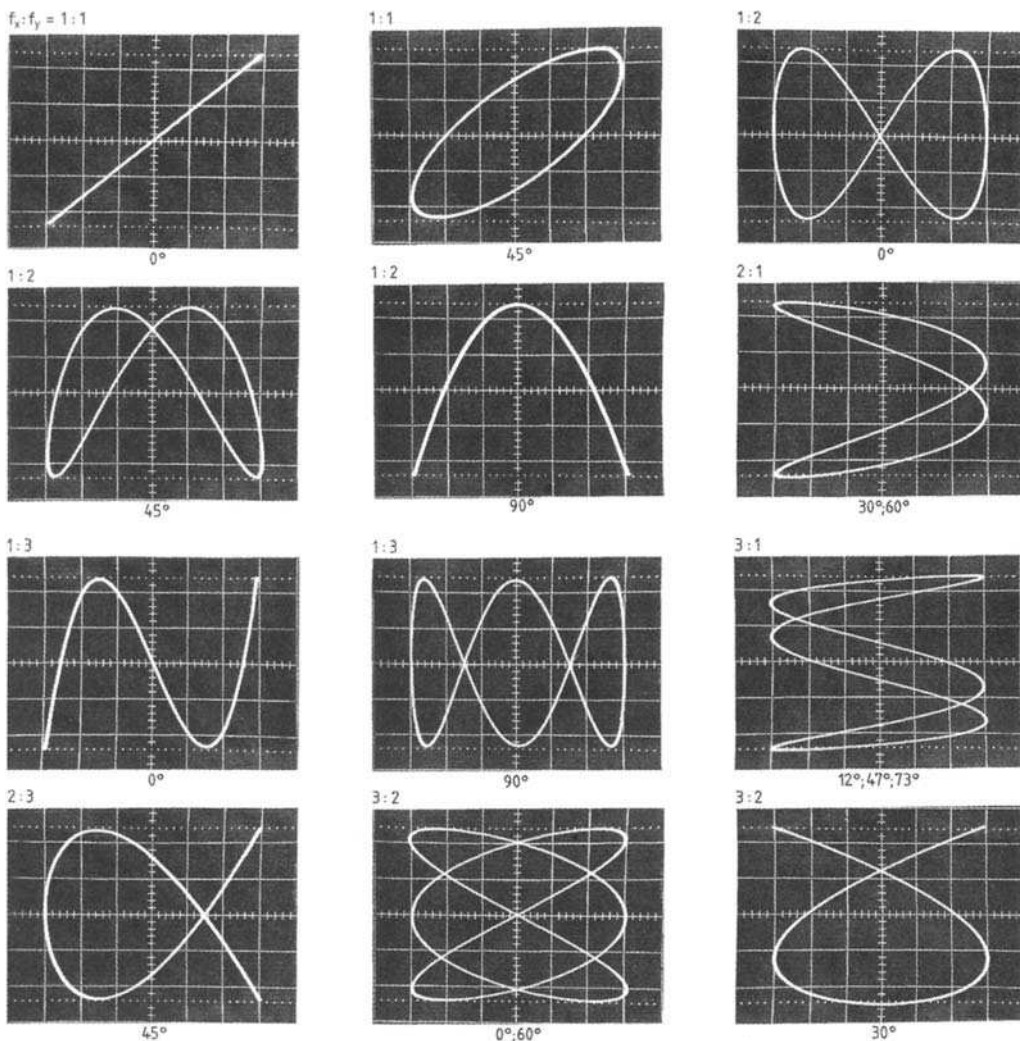


Bild 5.25 Beispiele von Lissajous-Figuren. Das Amplitudenverhältnis beträgt in allen Beispielen $A_x : A_y = 30 : 23$; die Frequenzverhältnisse $f_x : f_y$ sind links oberhalb jeder Figur angeschrieben; der Nullphasenwinkel φ_{0x} der Schwingung in x -Richtung ist willkürlich = 0 gesetzt; die Nullphasenwinkel φ_{0y} der Schwingung in y -Richtung, bei denen die dargestellten Figuren auftreten, sind unterhalb jeder Figur angeschrieben.

¹⁾ Jules Antoine Lissajous (1822 bis 1880).

□ **Versuch 13.** Wesentlich bequemer darzustellen ist die senkrechte Überlagerung elektromagnetischer Schwingungen mit einem Oszilloskop, indem man die zu beiden Schwingungen gehörenden Wechselspannungen an die beiden Ablenkplattenpaare (für x - und y -Richtung) der Braunschen Röhre legt. So sind auch die Lissajous-Figuren von Bild 5.25 entstanden. □

Die Form der Lissajous-Figuren hängt ab vom Verhältnis der Frequenzen $f_x : f_y$ und vom Verhältnis der Amplituden $A_x : A_y$ der beiden überlagerten Schwingungen sowie von der Differenz ihrer beiden Nullphasenwinkel $\Delta\varphi$. Ist das Frequenzverhältnis rational und die Phasenverschiebung konstant, so ist die Lissajous-Figur geschlossen und auf dem Bildschirm stabil. Die Lissajous-Figuren erscheinen in ein Rechteck eingeschrieben, dessen Seitenverhältnis gleich dem Verhältnis der Amplituden ist. Nennt man die Anzahl der Schnittpunkte mit der x -Achse entlang einer geschlossenen Lissajous-Figur N_x , die mit der y -Achse N_y so gilt:

$$f_x : f_y = N_y : N_x.$$

Der Quotient aus dem Ausschlag in y -Richtung an der Stelle $x = 0$ (d.i. $y(0)$) und dem Maximalausschlag in y -Richtung (d.i. \hat{y}) ist gleich dem Sinus der Phasenverschiebung $\Delta\varphi$.

$$y(0)/\hat{y} = \sin \Delta\varphi$$

Anwendung. Die Analyse von Lissajous-Figuren kann zur Analyse von Schwingungen herangezogen werden; dies ist deshalb messtechnisch interessant, weil sich die Analyse der Lissajous-Figuren in bestimmten Fällen automatisieren lässt.

5.1.9 Gekoppelte Schwingungssysteme

In Abschn. 5.1.6 wird ein schwingungsfähiges System beschrieben, das an eine starre Sinusbewegung, sozusagen an eine Sinusschwingung mit unerschöpflichem Energievorrat, gekoppelt ist; dabei zeigen sich die Erscheinungen der „erzwungenen Schwingungen“ und der Resonanz. In Abschn. 5.1.8 werden die Bewegungen zweier schwingungsfähiger Systeme linear überlagert, ohne dass sich die Systeme gegenseitig beeinflussen; dabei beobachtet man die „Schwebungen“. Eine dritte Möglichkeit der Kombination besteht darin, zwei schwingungsfähige Systeme mit ungefähr gleichem Energieinhalt zu koppeln, wodurch sie sich gegenseitig beeinflussen. Die Erscheinungen sollen zunächst an einem mechanischen Beispiel beschrieben werden.

5.1.9.1 Mechanische Systeme

Bild 5.26 zeigt zwei Schwerependel 1 und 2 mit gleichen Eigenfrequenzen f_0 . Sie sind über eine schwache Schraubenfeder 3 elastisch miteinander gekoppelt. Die Stärke der Kopplung hängt von der Härte der Feder 3 und von der Lage ihrer Befestigung entlang der Pendellänge ab. Die Masse der Feder 3 soll vernachlässigbar klein sein gegen die Massen der Pendel 1 und 2.

□ **Versuch 14. Gekoppelte Pendel.** Bei gelöster Kopplung wird zunächst gleiche Eigenfrequenz f_0 justiert und gemessen. Dann wird mit Kopplung das Pendel 1 durch einmalige Zufuhr eines Energiebetrages zu einer Schwingung mit maximaler Amplitude angestoßen. Dabei überträgt es jedoch über die Feder 3 Energie an das Pendel 2, das dadurch mit zunächst kleiner Amplitude zu schwingen beginnt. Die Energieübertragung läuft so lange

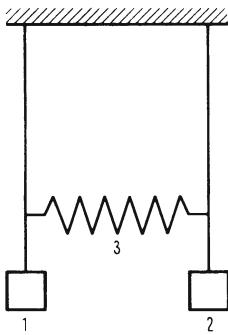
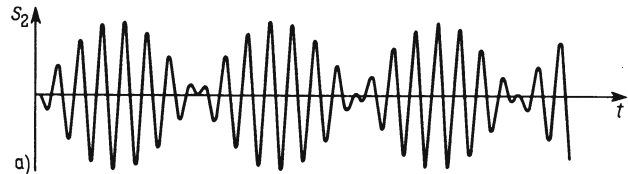
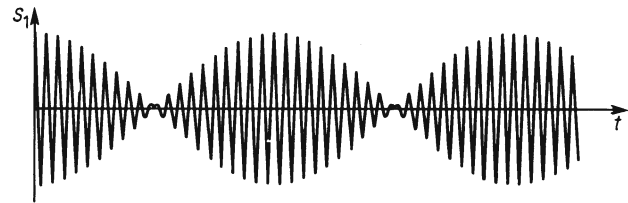


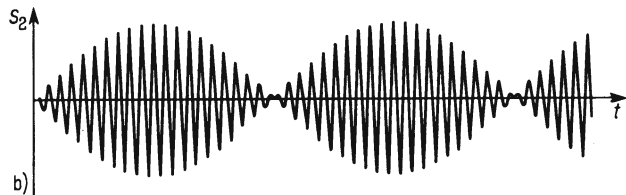
Bild 5.26 Gekoppelte Schwerependel



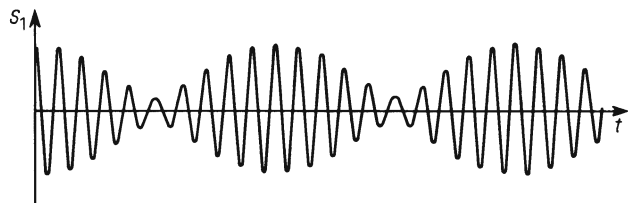
a)

s₁

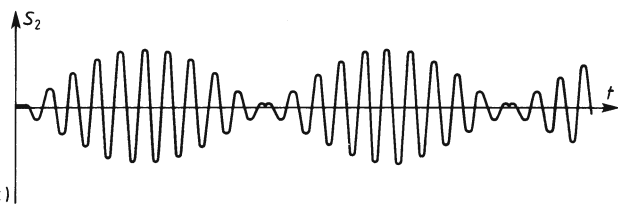
t



b)

s₁

t

s₂

t

Bild 5.27 Oszillogramme der gekoppelten Pendel von Bild 5.26
 a) starke Kopplung, gleiche Eigenfrequenzen
 b) schwächere Kopplung, gleiche Eigenfrequenzen
 c) verschiedene Eigenfrequenzen

in dieser Richtung, bis die ganze anfänglich zugeführte Energie auf das Pendel 2 übertragen ist, d.h. bis das Pendel 2 mit maximaler Amplitude schwingt und das Pendel 1 zur Ruhe gekommen ist. Das entspricht aber fast dem Ausgangszustand, mit dem Unterschied, dass Pendel 1 und 2 ihre Rollen vertauscht haben. Daher beginnt der Energiefluss in umgekehrter Richtung usw.

Stärkere Kopplung bewirkt einen stärkeren Energiefluss, d.h. schnelleren Wechsel; bei schwächerer Kopplung verläuft das Wechselspiel entsprechend langsamer. In Bild 5.27 sind Oszillogramme der Pendel 1 und 2 bei stärkerer (a) und schwächerer Kopplung (b) wiedergegeben.

Haben die beiden Pendel etwas verschiedene Eigenfrequenzen f_{01} und f_{02} , so verläuft der Energieaustausch nicht vollständig. Der Energiefluss kehrt sich bereits um, bevor alle Energie vom Pendel 1 zum Pendel 2 übergegangen ist. Je stärker die Kopplung ist, umso schwächer wirken sich kleine Eigenfrequenzunterschiede in dieser Beziehung aus. Bild 5.27c zeigt die Oszillogramme der beiden etwas verschiedenen Pendel. \square

\square **Versuch 15. Fundamentalschwingungen.** Wenn die beiden gekoppelten Pendel (Bild 5.26) gleiche Eigenfrequenzen f_0 haben, gibt es zwei Möglichkeiten, beide gleichzeitig und gleichstark anzustoßen, ohne dass ein Energieaustausch zwischen ihnen stattfindet: Man stößt sie entweder mit einer Phasenverschiebung $\Delta\varphi = \pi$, also im Gegentakt oder mit $\Delta\varphi = 0$, also im Gleichtakt an. In beiden Fällen schwingen die Pendel mit konstanter Amplitude (abgesehen von Reibungsverlusten), im ersten Fall immer gegeneinander mit einer Frequenz f_1 , im zweiten Fall immer parallel zueinander mit einer Frequenz f_2 . Frequenzmessungen ergeben, dass f_1 etwas größer und f_2 etwas kleiner als f_0 ist.

Definition: Schwingungen von gekoppelten Systemen, bei denen keine Energie zwischen den Einzelsystemen ausgetauscht wird, nennt man Fundamentalschwingungen.

Die Erhöhung der Frequenz f_1 gegenüber f_0 beim Gegeneinanderschwingen wird durch die zusätzliche rückstellende Kraft verursacht, die die Kopplungsfeder in diesem Fall liefert; die Erniedrigung von f_2 gegenüber f_0 beim Gleichtakt kommt von der zusätzlichen Masse der Kopplungsfeder. Je stärker die Kopplung ist, umso mehr unterscheiden sich die Frequenzen der Fundamentalschwingungen voneinander und umso schneller wechselt die Schwingungsenergie bei einseitigem Anstoß (Versuch 14) zwischen den Systemen hin und her. Es liegt daher nahe, den Unterschied $W_1 - W_2$ zwischen der Schwingungsenergie W_1 beim Gegeneinanderschwingen und der Schwingungsenergie W_2 beim Gleichtaktsschwingen als Maß für den Grad der Kopplung einzuführen. Aus Dimensionsgründen nimmt man besser den relativen Unterschied, indem man diese Differenz noch durch die mittlere Schwingungsenergie $(W_1 + W_2)/2$ dividiert. Bei gleichen Amplituden und gleichen Massen sind diese Schwingungsenergien nach Gl. (5.14) nur noch den Quadraten ihrer Frequenzen proportional. Daher gilt folgende

Definition: Kopplungsgrad K zweier gleicher schwingungsfähiger Systeme:

$$K = 2 \frac{W_1 - W_2}{W_1 + W_2} = 2 \frac{f_1^2 - f_2^2}{f_1^2 + f_2^2}$$

(S. auch Bild 5.30.)

Frequenzgang. Die Oszillogramme (Bild 5.24a) und (Bild 5.27a) sind einander gleich. Gleichen Kurven müssen aber gleiche mathematische Funktionen zugrunde liegen und damit auch analoge physikalische Tatbestände. Demnach kommt die Bewegung zweier gekoppelter Pendel zustande durch die Überlagerung zweier Schwingungen mit wenig voneinander verschiedenen Eigenkreisfrequenzen (wohlgemerkt: auch bei vollständig gleichen Eigenfrequenzen f_0 der beiden Einzelpendel!). Diese beiden Eigenfrequenzen sind die der Fundamentalschwingungen des gekoppelten Systems f_1 und f_2 . Die Frequenz, mit der der Energietransport hin und her wechselt, ist gleich der Differenzfrequenz

zwischen diesen beiden. Bei stärkerer Kopplung (schnellerer Wechsel!) unterscheiden sich die beiden Frequenzen demnach stärker.

Erregung von erzwungenen Schwingungen, d.h. eine Wiederholung von Versuch 5 in Abschn. 5.1.6.1 müsste mit einem gekoppelten System von zwei gleichen Federpendeln statt des einen (Bild 5.16a) demnach zwei nahe benachbarte Resonanzmaxima ergeben. Allerdings erhält man dieses Ergebnis nur bei relativ starker Kopplung und sehr sorgfältiger Messung. Viel leichter ist dieser Effekt bei den elektrischen Schwingkreisen des nächsten Abschnittes festzustellen, weil dort die notwendige hohe Messgenauigkeit leichter zu erreichen ist.

5.1.9.2 Elektrische Schwingkreise

Zwei elektrische Schwingkreise kann man z.B. dadurch koppeln, dass man ihre beiden Spulen nebeneinander anordnet, sodass das magnetische Feld der einen die andere durchsetzt (Bild 5.28). Dieses gekoppelte elektrische System aus zwei Schwingkreisen mit gleichen Eigenfrequenzen verhält sich genauso wie das mechanische im vorigen Abschnitt.

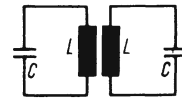


Bild 5.28 Elektrische Schwingkreise, induktiv gekoppelt

Wird die Schwingung z.B. durch Aufladen eines der Kondensatoren C angeregt, so pendelt die Schwingungsenergie zwischen den beiden Einzelsystemen hin und her. Zur Beobachtung dient ein Oszilloskop. Damit kann auch das Verhalten bei erzwungener Schwingung beobachtet werden. Bild 5.29 zeigt zwei dabei gemessene Resonanzkurven mit je zwei Maxima, ausgezogen mit verhältnismäßig starker Kopplung (z.B. geringer Spulenabstand) und gestrichelt mit schwacher Kopplung, wobei die Kurve zwischen den Maxima praktisch nicht mehr absinkt; man nennt das kritische Kopplung.

Das wichtigste Ergebnis dieses und des vorigen Abschnittes ist:

Ein System aus zwei gleichen, gekoppelten, schwingungsfähigen Teilsystemen besitzt zwei Eigenfrequenzen, die sich umso weniger voneinander unterscheiden, je schwächer die Kopplung ist.

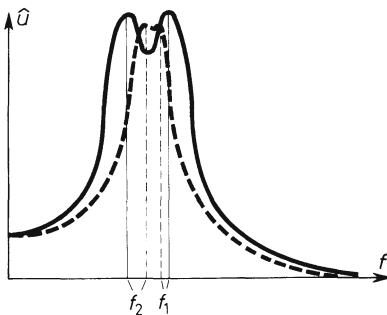


Bild 5.29 Resonanzkurven eines Systems aus zwei gekoppelten, gleichfrequenten elektrischen Schwingkreisen bei verschiedener starker Kopplung (gestrichelt: schwächere Kopplung)

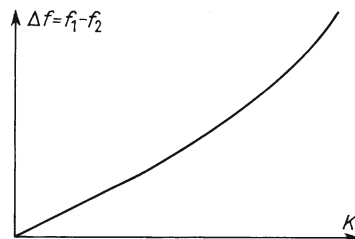


Bild 5.30 Aufspaltung: Differenz Δf zwischen den beiden Fundamentalfrequenzen f_1 und f_2 mit steigendem Kopplungsgrad K

Bild 5.30 zeigt die zunehmende „Aufspaltung“ der einheitlichen Eigenfrequenz f_0 mit steigendem Kopplungsgrad K für $\Delta f \ll f_1$ und f_2 .

In der Nachrichtentechnik nennt man ein System, das nicht nur durch eine bestimmte Frequenz, sondern durch ein ganzes Frequenzband zu amplitudenstarkem Mitschwingen erregt wird, ein Bandfilter. Verwirklicht wird ein derartiges System z.B. durch zwei gekoppelte Schwingkreise mit ihrer verbreiterten Resonanzkurve (Bild 5.29).

Man kann die obigen Überlegungen verallgemeinern:

Koppelt man nicht zwei, sondern N schwingungsfähige Einzelsysteme gleicher Eigenfrequenz f_0 miteinander, so gibt es für das Gesamtsystem N Fundamentalschwingungen; d.h. f_0 spaltet in die Frequenzen f_1, f_2, \dots, f_N auf, umso stärker, je stärker der Kopplungsgrad ist (s.a. Abschn. 5.2.4 und 7.3).

Anwendungen. In den meisten Rundfunkempfängern wird nicht nur die Resonanz von einfachen Schwingkreisen, sondern auch die von Bandfiltern ausgenützt (vgl. Anwendungen in Abschn. 5.1.6.3), weil meist nicht eine bestimmte Frequenz, sondern ein Frequenzband ausgewählt werden muss.

Aufgaben zu Abschn. 5.1.7 bis 5.1.9

1. Bild 5.31 zeigt das Spektrum einer nicht sinusförmigen Schwingung. Man zeichne das zugehörige Oszillogramm von $t = 0$ bis $t = 1$ s mit allen Nullphasenwinkeln $\varphi_{01} = \varphi_{02} = \varphi_{03} = 0$. Bei welcher Zeit t_1 ($0 < t_1 < 1$ s) hat dieses Oszillogramm einen Nulldurchgang? Wieviele Minima und Maxima hat es zwischen $t = 0$ und t_1 ?

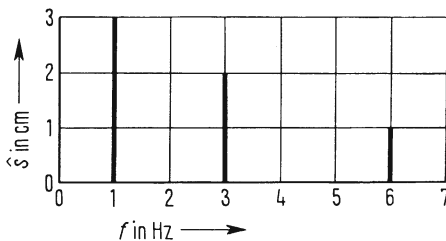


Bild 5.31 Spektrum zu Aufgabe 1

2. Eine Kippschwingungsschaltung ähnlich der in Bild 5.22a enthält einen Ladewiderstand, der automatisch während der Aufladung so geändert wird, dass die Spannung am Kondensator linear mit der Neigung 100V/s ansteigt. Die Zündung erfolgt bei 90 V , die Entladung bis zur Löschspannung 20 V dauert $0,1\text{ s}$. Welche Frequenz hat die entstehende sägezahnförmige Kippschwingung?
3. Zwei gleiche Elektromotoren laufen ungefähr mit der Drehzahl 3000 Umdrehungen pro Minute. Der Ton, den man von beiden zusammen hört, wird pro Sekunde zweimal lauter und leiser. Um wieviel Prozent differieren demnach die Drehzahlen?
4. Zwei gleiche Schwingkreise sind gekoppelt. Wird der erste einmal angeregt, dann schwingt der zweite $1\text{ }\mu\text{s}$ später mit Maximalamplitude. Welchen Frequenzabstand haben die beiden Maxima der gemeinsamen Resonanzkurve?

5.2 Wellen

Die logische Erweiterung der in Abschn. 5.1 behandelten Schwingungen ist die Untersuchung ihrer räumlichen Ausbreitung, wie sie sich im vorigen Teilabschnitt 5.1.9 „Gekoppelte Schwingungssysteme“ bereits andeutet. Diese Phänomene heißen allgemein Wellen. Entsprechend den mechanischen und den elektromagnetischen Schwingungen gibt es auch mechanische und elektromagnetische Wellen. Wir behandeln aber wieder – soweit dies möglich ist – beide parallel, um Ähnlichkeiten und Unterschiede deutlich zu machen. Die Frequenzen, die Wellen haben können, reichen über rund 24 Zehnerpotenzen; entsprechend vielfältig sind die Erscheinungsformen, die praktisch fast jedes Teilgebiet der Physik, der

Technik und der Natur berühren. Wie in den Abschnitten 5.3 und 6 gezeigt wird, besitzen erstaunlicherweise auch materielle Teilchen, z.B. Elektronen, Protonen, Neutronen oder Atome Welleneigenschaften. Auch diese lassen sich formal wie mechanische oder elektromagnetische Wellen behandeln.

5.2.1 Grundbegriffe

Beispiele von Wellen kennt wohl jedermann aus dem täglichen Leben. Besonders leicht zu beobachten sind Wasserwellen und Wellen entlang Seilen, Gummischnüren oder Kabeln, wenn ein Ende periodisch senkrecht zur Längsrichtung bewegt wird. An straff gespannten Drähten, z.B. elektrischen Freileitungen, sind die gleichen Wellen wegen der kleinen Amplitude und der hohen Geschwindigkeit schwieriger zu beobachten. Mindestens dem Namen nach bekannt sind auch die Erdbebenwellen, Schallwellen und elektromagnetische Wellen.

Gemeinsame Merkmale dieser verschiedenen Wellen sind:

1. Es erfolgt eine zeitabhängige Veränderung einer Größe, unter Umständen periodisch wiederholt, also eine Schwingung.
2. Diese Veränderung breitet sich in ein, zwei oder drei Dimensionen des Raumes mit endlicher Geschwindigkeit aus.
3. Ursache dafür ist die Kopplung der einzelnen Teile des Raumes untereinander durch elastische oder quasielastische Kräfte.
4. Es wird dabei Energie transportiert.

Nur wenn alle vier Merkmale vorhanden sind, handelt es sich um Wellen.

5.2.1.1 Wellenmodell

Die zum Verständnis der Wellenvorgänge wichtigsten Grundbegriffe sollen zunächst an einem einfachen mechanischen Modell erläutert werden.

Bild 5.32 zeigt eine Reihe von gleichen Federpendeln 1, die durch – untereinander ebenfalls gleiche – Federn 2 elastisch miteinander gekoppelt sind. Es handelt sich also um einen „eindimensionalen Raum“ (mit der Richtung x), zusammengesetzt aus schwingungsfähigen Teilen, die miteinander durch elastische Kräfte gekoppelt sind.

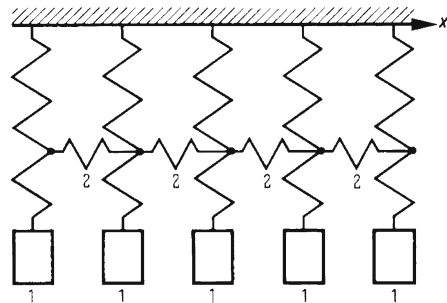


Bild 5.32 Eindimensionales Modellmedium mit getrennten Rückstell- und Kopplungsfedern

□ **Versuch 16.** Führt man einem der Pendel (Bild 5.32) Energie zu, indem man den Pendelkörper periodisch (mit der Eigenfrequenz des Pendels) auf und ab bewegt, so wird die Schwingungsenergie über die Kopplungsfedern 2 an die benachbarten Pendel weitergegeben. Dadurch beginnen auch diese zu schwingen und geben ihrerseits die Energie an die nächsten Pendel weiter. □

In unserem Wellenmodell sind alle Federpendel gleichberechtigt. Gleichgültig, in welchem Zeitpunkt man die Beobachtung beginnt, stellt man fest, dass von einem schwingenden Pendel die Schwingungsenergie an die Nachbarn weitergegeben wird, d.h., dass von ihm eine Welle ausgeht. Dieses Prinzip einer jeden Wellenausbreitung wurde zuerst von Huygens¹⁾ grundsätzlich erkannt und von Fresnel²⁾ genauer formuliert und heißt daher

Huygens-Fresnelsches Prinzip (I. Teil): Jeder Punkt eines Mediums, der von einer Welle erfasst wird, wird dadurch selbst zum Ausgangspunkt einer Welle, der sog. Elementarwelle.

Man sieht in Versuch 16 deutlich, wie sich der Schwingungszustand mit messbarer Geschwindigkeit ausbreitet. Daher spricht man von der Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wellen. Wir bevorzugen jedoch folgende

Definition: Bei einer Welle bezeichnet man als Phasengeschwindigkeit c den Quotienten aus dem Weg, den eine bestimmte Phase der Schwingung – z.B. ein Maximum oder ein Minimum – zurücklegt, und der Zeit, die dazu benötigt wird.³⁾

Der Abstand zwischen zwei gleichen, räumlich nebeneinanderliegenden Schwingungszuständen innerhalb der Welle, z.B. zwischen zwei benachbarten Maxima (Bild 5.35b) ist immer der gleiche, unabhängig davon, zwischen welchem Paar derartiger Schwingungszustände man ihn misst. Der Abstand bleibt auch zeitlich konstant, während er sich mit der Phasengeschwindigkeit bewegt.

Definition: Der zeitlich und räumlich konstante Abstand zwischen zwei benachbarten gleichen Schwingungszuständen heißt Wellenlänge λ (Bild 5.35b).

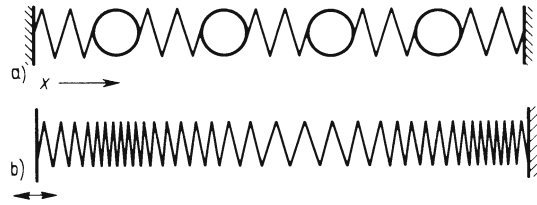
Die Phasengeschwindigkeit c als Ausbreitungsgeschwindigkeit eines Schwingungszustandes ist parallel zur Ausbreitungsrichtung x . Sie hat nichts zu tun mit der Momentangeschwindigkeit der Pendelkörper oder irgendwelcher Massenpunkte des Modells (Bild 5.32). Zur deutlichen Unterscheidung nennt man bei Wellen die Geschwindigkeit der Massenpunkte nach Bild 5.3b Kurve 1 häufig „Schnelle“. Im Modell (Bild 5.32) und bei vielen Wellenvorgängen in der Natur ist die Richtung der Auslenkung und der Schnelle senkrecht zur Ausbreitungsgeschwindigkeit c . Das ist jedoch nicht immer so. Bild 5.33a zeigt eine Reihe von direkt aneinanderhängenden Federpendeln aus einzelnen gleichen Pendelkörpern und nur einer Sorte von Federn, die hier sowohl die rückstellenden Kräfte als auch die Kopplungskräfte liefern. Jeder Pendelkörper kann unter anderem horizontal schwingen. Regt man einen von ihnen entsprechend an, so pflanzt sich die Schwingung in horizontaler Richtung fort, d.h. es breitet sich eine Welle aus, bei welcher Phasen-

¹⁾ Christian Huygens (1629 bis 1695).

²⁾ Austin Jean Fresnel (1788 bis 1827).

³⁾ Mit Wellen transportierte Signale breiten sich mit der sog. Gruppengeschwindigkeit aus. Diese wird in Abschn. 5.2.6.2 behandelt.

Bild 5.33 a) Eindimensionales Modellmedium mit nur einer Federsorte
b) Longitudinalwelle in einer Schraubenfeder



geschwindigkeit und Schwingungsgröße zueinander parallel sind. Man kann die einzelnen gesonderten Pendelkörper auch weglassen. Bild 5.33b zeigt eine lange Schraubenfeder. Durch sie läuft gerade eine Welle, die von dem linken, in Richtung des Doppelpfeiles kurz bewegten Ende ausgeht. Derartige Wellen sind in allen elastischen Festkörpern sowie in Gasen und Flüssigkeiten möglich.

Eine andere mögliche Schwingungsform der Pendelkörper (Bild 5.33a) sind Dreh-schwingungen um die Längsachse. Auch diese Schwingungen breiten sich in x -Richtung aus. Ganz allgemein gelten die

Definitionen: Ist die Schwingungsgröße einer Welle ein Vektor, so nennt man die Welle polarisiert und die Richtung des Vektors Polarisationsrichtung. Wellen, bei denen die Polarisationsrichtung senkrecht zur Richtung der Phasengeschwindigkeit ist, heißen Querwellen (transversale Wellen), solche, bei denen diese beiden Richtungen parallel sind, heißen Längswellen (longitudinale Wellen), solche, bei denen Drehschwingungen auftreten, werden Torsionswellen genannt.

Besonders bei Querwellen ist die Angabe der Polarisationsrichtung wichtig, da es ja unendlich viele Richtungen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung gibt.

Unpolarisierte Wellen sind solche, bei denen skalare Größen, z.B. der Druck p oder die Ladung q , Schwingungsgrößen sind.

5.2.1.2 Verallgemeinerung der Modellvorstellung

Eindimensionale mechanische Wellen. An dem Modell (Bild 5.33a) wird anschaulich klar, von welchen Größen die Phasengeschwindigkeit abhängt. Je größer die an der Schwingung beteiligten trägen Massen sind, desto langsamer breitet sich die Welle aus, je größer dagegen die rückstellenden oder die Kopplungskräfte sind, desto schneller pflanzt sie sich fort. Verallgemeinert auf kontinuierliche Medien, bei denen Masse und Elastizität nicht mehr räumlich getrennt sind – vgl. Bild 5.33b – heißt das, dass die Phasengeschwindigkeit mit steigender Dichte des Mediums abnimmt und mit wachsendem Elastizitätsmodul¹⁾ steigt. Bei Gasen und Flüssigkeiten tritt an die Stelle des Elastizitätsmoduls der Kehrwert der Kompressibilität (vgl. Abschn. 7.2, 1.6.1.1 und 1.6.2.1).

¹⁾ Elastizitätsmodul s. Abschn. 7.2

Eindimensionale elektromagnetische Wellen. In Bild 5.34 sind zwei parallele lange Drähte gezeichnet. Verbindet man z.B. die beiden linken Anfangspunkte 1 und 2 zur Zeit $t = 0$ mit einer Spannungsquelle, so beginnen Ladungen auf diesen „langgestreckten Kondensator“ zu fließen. Mit dem Fließen des Stromes ist der Aufbau eines magnetischen Feldes verbunden. Dieses induziert in der Leitung eine Gegenspannung, die die Aufladung der Leitung verzögert. Das elektrische Feld \vec{E} zwischen den Drähten und die magnetische Induktion \vec{B} um die Drähte (Bild 5.34b) breiten sich daher mit endlicher Geschwindigkeit entlang der Leitung aus. Diese „Störung“ bewegt sich auch weiter, wenn die Batterie wieder abgetrennt wird, da das zusammenbrechende Magnetfeld eine Spannung induziert, die den Strom weitertreibt. Die Leitung verhält sich also zu einem Schwingkreis, wie die Federpendelkette (Bild 5.32) zu einem einzelnen Federpendel. Ersetzt man die Batterie durch eine Wechselspannungsquelle, so läuft über die Leitung nicht eine einmalige Störung, sondern eine periodische. Die räumliche Ausbreitung des zeitlich veränderlichen elektrischen und magnetischen Feldes oder der zugehörigen Ströme und Spannungen nennt man – in Analogie zu den mechanischen Wellen – elektromagnetische Wellen. Da die elektrischen und magnetischen Feldlinien senkrecht zur Ausbreitungsrichtung stehen, sind dies Querwellen. Entsprechend den Analogiebetrachtungen in Abschn. 5.1.3.4 ist zu erwarten, dass die Phasengeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen mit zunehmender Induktivität und Kapazität der Leitung sinkt.

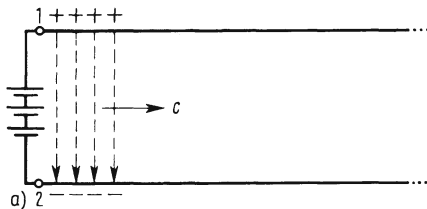
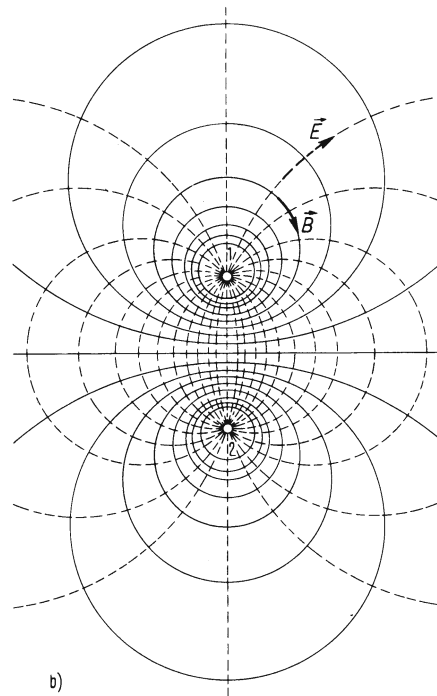


Bild 5.34 a) Lecherleitung¹⁾ aus zwei parallelen Drähten, über die eine elektromagnetische Welle läuft
b) im Querschnitt (elektrische Feldlinien gestrichelt, magnetische dünn ausgezogen)



Die Induktivität pro Länge kann z.B. dadurch erhöht werden, dass ein oder beide Drähte zu langgestreckten Spulen gewandelt werden (Bild 5.38). Die Kapazität pro Länge steigt mit kleiner werdendem Abstand der Drähte oder durch die Wirkung eines Dielektrikums zwischen denselben. Genauso verhalten sich auch konzentrische Leitungen, die nur aus einem Draht und aus einem leitfähigen zylindrischen Mantel, der den Draht umgibt, bestehen.

Näheres über sog. „geführte Wellen“ siehe z.B. [32].

¹⁾ E. Lecher (1856 bis 1926).

5.2.2 Beschreibung einer Sinuswelle

Schwingungen von mechanischen oder elektrischen Systemen sind nicht immer sinusförmig, ebensowenig sind es ihre räumlichen Ausbreitungen, die Wellen. Man kann sie sich dann aber überlagert denken aus mehreren verschiedenen sinusförmigen Wellen (vgl. Abschn. 5.1.7). Wenn wir uns im Folgenden auf die Beschreibung von Sinuswellen beschränken, bedeutet das daher physikalisch keine sehr einschneidende Beschränkung.

5.2.2.1 Zeichnerische Darstellung

Greift man von einem eindimensionalen Medium, durch das eine Welle läuft, einen beliebig gewählten Punkt heraus und zeichnet die Schwingungsgröße an diesem Punkt in Abhängigkeit von der Zeit auf, so erhält man eine Sinuslinie, wenn der Ausgangspunkt der Welle ungedämpft sinusförmig schwingt. Bild 5.35a zeigt zwei solche Oszillogramme aus einer mechanischen Welle, ausgezogen die Auslenkung $s = g(t)$ eines Punktes bei x_1 und gestrichelt die Auslenkung $s^* = g(t)$ eines Punktes bei x_2 . Der Punkt bei x_2 schwingt also genauso wie der Punkt bei x_1 , jedoch mit einer Phasenverschiebung $\omega\tau$, worin τ diejenige Zeit ist, die die Welle und damit jede Phase braucht, um von x_1 nach x_2 zu kommen. Betrachtet man das gleiche Medium zu einer bestimmten, beliebig gewählten Zeit und zeichnet den momentanen Wert der Schwingungsgröße in Abhängigkeit von der Längsausdehnung x des Mediums auf, so erhält man auch eine Sinuslinie. Dabei dürfen allerdings in dem Medium keine Energieverluste durch Reibung oder Ähnliches entstehen. Bild 5.35b zeigt ausgezogen eine solche Momentanverteilung der Auslenkung $s = g(x)$, sozusagen eine „Momentaufnahme“ der Welle zur Zeit t_1 und gestrichelt eine zweite, die zur Zeit $t_2 = t_1 + \tau$ aufgenommen wurde. Man beachte die verschiedene Bedeutung der Abszissen in Bild 5.35a und b!

Das konstante Zeitintervall zwischen zwei gleichen aufeinanderfolgenden Schwingungszuständen in Bild 5.35a ist bekanntlich die Schwingungsdauer T .

Der konstante räumliche Abstand zweier gleicher benachbarter Schwingungszustände in Bild 5.35b ist die Wellenlänge λ .

Nimmt man die beiden Momentanverteilungen $s = g(x)$ speziell in einem zeitlichen Abstand τ gleich der Schwingungsdauer T auf, so erhält man zwei Momentaufnahmen, die sich decken, weil jeder Punkt zur Zeit $t_2 = t_1 + T$ wieder im gleichen Schwingungszustand ist wie zur Zeit t_1 .

Ebenso erhält man zwei identische Oszillogramme $s = g(t)$, wenn man sie von zwei Punkten bei x_1 und bei x_2 aufnimmt, deren Abstand $x_2 - x_1$ gleich der Wellenlänge λ ist. (Man denke sich in den Bildern 5.35a und b die gestrichelten Kurven nach rechts verschoben, bis sie sich mit der ausgezogenen decken.) Demnach legt eine bestimmte Phase der Welle in der Zeit $\tau = T$ den Weg $x_2 - x_1 = \lambda$ zurück, also ist ihre

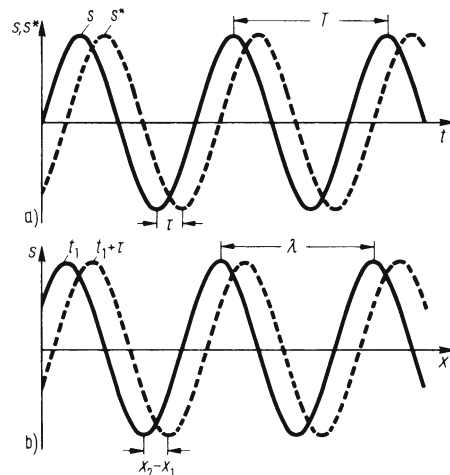


Bild 5.35 Grafische Darstellung einer eindimensionalen Sinuswelle
a) Oszillogramme, b) Momentaufnahmen

Phasengeschwindigkeit $c = \lambda/T$ oder – mit der Frequenz $f = 1/T$ –

$$c = \lambda \cdot f \quad (5.45)$$

Diese fundamentale Beziehung gilt für jede Art von Wellen.

Die hier geschilderte zeichnerische Darstellung gilt sowohl für Quer- als auch für Längswellen. Denn gleichgültig, welche Richtung die Auslenkung s bezüglich der Ausbreitungsrichtung x hat, muss man im Diagramm $s = g(x)$ die Werte von s senkrecht zur x -Achse auftragen (wie man sie ja auch im

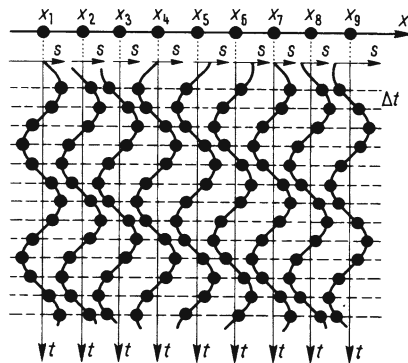


Bild 5.36 Grafische Darstellung einer eindimensionalen sinusförmigen Längswelle

Diagramm $s = g(t)$ senkrecht zur t -Achse aufträgt). Die Bezeichnung „Momentaufnahme“ für diese Momentanverteilung $s = g(x)$ ist allerdings nur bei Querwellen berechtigt. In Bild 5.36 sei die x -Achse ein eindimensionales Medium. Läuft durch dieses eine Längswelle, so schwingen alle seine Punkte in x -Richtung mit den Ausschlägen s hin und her. Für einige dieser Punkte ($x_1 \dots x_9$) sind die Auslenkungen s in Abhängigkeit von der Zeit t (Oszillogramme $s = g(t)$) nach unten aufgetragen. In alle Oszillogramme sind die Punkte nach jeweils gleichen Zeitintervallen Δt wiederholt eingezeichnet. Dadurch entsteht entlang jeder horizontalen gestrichelten Linie eine „Momentaufnahme“ der Welle (vgl. Bild 5.33b). Die einzelnen Verdichtungen (geringe horizontale Abstände) und Verdünnungen (große horizontale Abstände) bewegen sich mit fortschreitender Zeit (von oben nach unten) in Ausbreitungsrichtung der Welle (von links nach rechts).

5.2.2.2 Wellengleichung

Die obigen grafischen Darstellungen einer Welle enthalten immer nur entweder die Zeit- oder die Ortsabhängigkeit der Auslenkung. Erst eine mathematische Gleichung kann diese als Funktion der Zeit und des Ortes beschreiben. Diese Gleichung lässt sich folgendermaßen herleiten: Das Oszillogramm des Punktes bei x_1 (Bild 5.35a) wird durch die Schwingungsgleichung (5.4) mit dem Nullphasenwinkel $\varphi_{01} = 0$ beschrieben:

$$s = \hat{s} \sin 2\pi f t$$

Die Schwingungsgleichung des Punktes bei x_2 dagegen ist

$$s^* = \hat{s} \sin 2\pi f (t - \tau)$$

da dessen Auslenkung nicht zur Zeit $t = 0$, sondern erst zur Zeit $t = \tau$ gleich 0 ist; also ist der Nullphasenwinkel $\varphi_{02} = 2\pi f \tau$. Während der Zeit τ wandert die Welle mit der Geschwindigkeit c um die Strecke $x_2 - x_1$ weiter. Also ist $\tau = (x_2 - x_1)/c$ und somit

$$s^* = \hat{s} \sin 2\pi f \left(t - \frac{x_2 - x_1}{c} \right)$$

Setzt man darin statt der speziellen Strecke $x_2 - x_1$ allgemein den Weg x ein und nennt die zugehörige Auslenkung nicht mehr speziell s^* , sondern allgemein s , so erhält man bereits die:

Wellengleichung für die Ausbreitung in positiver x -Richtung¹⁾

$$s = \hat{s} \sin 2\pi f \left(t - \frac{x}{c} \right) \quad (5.46)$$

¹⁾ Häufig, aber nicht ganz korrekt, nennt man auch die Differentialgleichung einer Welle, z.B. Gl. (5.50), abgekürzt „Wellengleichung“.

oder wegen $f = 1/T$ und $c = \lambda f$

$$s = \hat{s} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \quad (5.47)$$

Eine dritte Schreibweise ergibt sich, wenn man $2\pi/T = \omega$ und $2\pi/\lambda = k$ setzt, wobei k den Namen Kreiswellenzahl bekommt (in Analogie zur Kreisfrequenz ω):

$$s = \hat{s} \sin(\omega t - kx) \quad (5.48)$$

Hierin drückt sich also die sinusförmige Abhängigkeit der Auslenkung s von der Zeit t und vom Weg x in einem verlustfreien eindimensionalen Medium aus.

5.2.2.3 Phasengeschwindigkeiten

Die Herleitung der Wellengleichung im vorigen Abschnitt liefert leider keine Aussage über den Zusammenhang zwischen der Phasengeschwindigkeit c und den Eigenschaften des Mediums. Eine solche erhält man erst, wenn man die Wellengleichung als Lösung einer Differentialgleichung herleitet, ähnlich wie das in Abschn. 5.1.2.1 für die Schwingungsgleichung geschah. Wegen des relativ großen mathematischen Aufwandes soll dies hier jedoch nur an einem Beispiel für die Seilwellen und in Abschn. 5.2.5.4 für freie elektromagnetische Wellen durchgeführt werden.

Bild 5.37 zeigt ein Stück eines in x -Richtung durch die Kraft F_0 gespannten Seils, das den Querschnitt A und die Dichte ρ hat. Gestrichelt ist die Ruhelage, ausgezogen eine momentane Auslenkung gezeichnet. Die Auslenkung sei nur so stark, dass die Gesamtlänge und die Spannkraft praktisch als konstant angenommen werden können. Ein beliebiges Stück dx ist an seinem linken Ende um s , an seinem rechten Ende um $s + ds$ ausgelenkt; an seinen Enden greift die Spannkraft unter den Winkeln α bzw. $(\alpha - d\alpha)$ gegen die Horizontale an. Die Komponenten dieser Kräfte in s -Richtung sind

$$F_1 = F_0 \sin \alpha \quad \text{bzw.} \quad F_2 = F_0 \sin(\alpha - d\alpha)$$

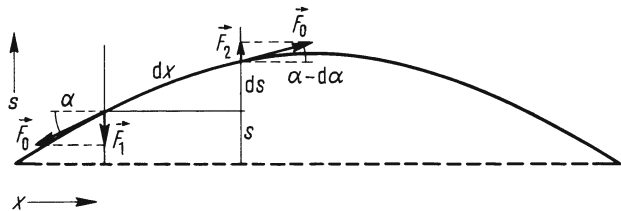


Bild 5.37 Zur Differentialgleichung einer elastischen Querwelle (Seilwelle)

Die Differenz dieser beiden Komponenten $dF = F_1 - F_2$ ist die Rückstellkraft für das Seilstück dx , also

$$dF = F_0 [\sin \alpha - \sin(\alpha - d\alpha)]$$

Beschränkt man sich auf kleine Winkel, was ja wegen der geforderten Konstanz von Spannkraft und Gesamtlänge sowieso notwendig ist, so ist einerseits $\sin(\alpha - d\alpha) \approx \alpha - d\alpha$ und $\sin \alpha \approx \alpha$; andererseits ist auch $\alpha \approx ds/dx$. Da s nicht nur von x , sondern auch von t abhängt, schreibt man dafür meist den partiellen Differentialquotienten $\alpha = \partial s / \partial x$. Dann ist $d\alpha = \partial^2 s / \partial x^2 dx$, also

$$F = F_0 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} dx \quad (5.49)$$

Das 2. Newtonsche Axiom $F = ma$ ergibt mit Gl. (5.49), mit $dm = \rho A dx$ und mit $a = \partial^2 s / \partial t^2$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{F_0}{\rho A} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \quad (5.50)$$

Darin wird gelegentlich $\rho A = Am/V = m/l = \mu$ die Masse pro Länge oder „Massenbelegung“ genannt. Gl. (5.50) ist die Differentialgleichung einer eindimensionalen, elastischen Querwelle. Für alle anderen mechanischen und elektromagnetischen Wellen lassen sich durch ähnliche Ansätze Differentialgleichungen der gleichen Form wie Gl. (5.50) herleiten. Bei allen ist die zweifache Ableitung der Schwingungsgröße nach der Zeit derjenigen nach dem Ort proportional; der Proportionalitätsfaktor besteht aus Größen, die die Eigenschaften des Mediums charakterisieren. Diese Differentialgleichungen werden alle durch einen Ansatz mit der Funktion g der Form

$$y = g\left(t \pm \frac{x}{c}\right) \quad (5.51)$$

gelöst. Dabei ist y die jeweilige Schwingungsgröße, also $y = s$ bei den mechanischen Wellen oder $y = u$ bzw. $y = i$ bei elektromagnetischen Wellen auf Leitungen. Die Funktion g kann beliebig sein, sofern sie zweimal nach x und t differenzierbar ist. Physikalisch heißt das:

Jede beliebige Störung kann sich als Welle durch ein geeignetes Medium fortpflanzen.

Die Größe c in Gl. (5.51) hat die Dimension einer Geschwindigkeit. Es handelt sich hier offensichtlich um die Phasengeschwindigkeit der betreffenden Welle. Zweimaliges Differenzieren der Gl. (5.51) nach x und t ergibt

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \text{Differentialgleichung der eindimensionalen Welle} \quad (5.52)$$

Durch Vergleich mit Gl. (5.50) oder einer anderen der oben erwähnten Differentialgleichungen ergibt sich jeweils die

Phasengeschwindigkeit der elastischen Querwelle	$c = \sqrt{\frac{F_0}{\rho A}}$	(5.53)
--	---------------------------------	--------

der elastischen Längswelle	$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$	(5.54)
----------------------------	-----------------------------	--------

der Längswellen im Innern von Flüssigkeiten	$c = \sqrt{\frac{1}{\rho \chi}}$	(5.55)
---	----------------------------------	--------

der Längswellen in Gasen	$c = \sqrt{\frac{\kappa p_0}{\rho}}$ ¹⁾	(5.56)
--------------------------	--	--------

der elektromagnetischen Welle auf einer Leitung	$c = \sqrt{\frac{1}{(C/l)(L/l)}}$	(5.57)
---	-----------------------------------	--------

Darin bedeuten: F_0 = Spannkraft des Seils, Drahtes etc., ρ = Dichte, A = Querschnitt, E = Elastizitätsmodul (s. Abschn. 7.2), χ = Kompressibilität (vgl. Abschn. 1.6.1.1 und 1.6.2.1), κ = Adiabatenexponent (vgl. Abschn. 2.4.3.4), p_0 = Druck, C/l = Kapazität pro Länge, L/l = Induktivität pro Länge.

¹⁾ Siehe auch Abschn. 5.2.5.3

Diese Phasengeschwindigkeiten ergeben sich also ganz unabhängig von der Form der Welle, d.h. von der Art der Funktion in Gl. (5.51). Es kommen in den Gl. (5.53) bis (5.57) nur die Eigenschaften der Medien vor, und bei der Herleitung der Differentialgleichungen müssen meist kleine Amplituden angenommen werden.

Die Phasengeschwindigkeit elastischer und quasielastischer Wellen ist bei genügend kleinen Amplituden nur von den Eigenschaften der betreffenden Medien abhängig, nicht aber von der Amplitude.

Bei der weiteren Beschreibung der Wellen wollen wir uns aber auf Sinuswellen beschränken.

Daher soll nun nicht mehr der sehr allgemeine Ansatz von Gl. (5.51) verwendet werden, sondern die im vorigen Abschnitt bereits hergeleitete Wellengleichung (5.47) $s = \hat{s} \sin 2\pi (t/T - x/\lambda)$ und für elektromagnetische Wellen entlang Leitungen entsprechend

$$u = \hat{u} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \quad \text{oder} \quad i = \hat{i} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \quad (5.58)$$

Wie man durch zweimaliges Differenzieren dieser Gleichungen und Einsetzen in die betreffenden Differentialgleichungen leicht feststellen kann, sind sie tatsächlich Lösungen. Sie beschreiben also mathematisch zusammen mit Gl. (5.53) bis (5.57) elastische und quasielastische sinusförmige Wellen, wie sie in den Bildern 5.35 grafisch dargestellt sind.

5.2.2.4 Energietransport

Energiedichte

Um in einem Medium eine Welle zu erzeugen, muss man einen Teil des Mediums unter Energiezufuhr zum Schwingen anregen. Die am Ort des Wellenursprungs zugeführte Energie wird in Wellenausbreitungsrichtung x transportiert. Solange also das Medium von der Wellenbewegung erfasst ist, enthält es Energie pro Volumen.

Diese Energiedichte soll näher untersucht werden, und zwar zunächst für mechanische Wellen:

Mechanische Wellen, z.B. die elastischen Wellen in einem Seil mit der Massendichte ρ . Dabei sollen keine Energieverluste durch Reibung auftreten. Ein Teilstück dV dieses Mediums hat die Masse ρdV , seine Schwingungsenergie ist in Anlehnung an Gl. (5.14)

$$dW = \frac{1}{2} \rho dV \omega^2 \hat{s}^2 \quad \text{oder} \quad dW = \frac{1}{2} \rho dV \hat{v}^2$$

und folglich die

Energiedichte

$$w = \frac{dW}{dV} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \hat{s}^2 = \frac{1}{2} \rho \hat{v}^2 \quad (5.59)$$

Außer der Dichte ρ kommen in dieser Gleichung keine spezifischen Eigenschaften des Mediums vor. Daraus kann man schließen, dass sie nicht nur für elastische, sondern auch

für andere mechanische Wellen gilt, vorläufig noch mit der Beschränkung auf langgestreckte, praktisch eindimensionale Medien.

Elektromagnetische Wellen. Um eine analoge Aussage für elektromagnetische Wellen auf einer Leitung mit der Länge l , der Kapazität C und der Induktivität L zu erhalten, dividiert man am einfachsten Gl. (5.24) durch l und erhält so (anstelle der obigen Energie pro Volumen) die

$$\text{Energie pro Länge} \quad \frac{W}{l} = \frac{1}{2} \frac{C}{l} \hat{u}^2 = \frac{1}{2} \frac{L}{l} \hat{i}^2 \quad (5.60)$$

Die Gl. (5.60) besagt außerdem, dass $C\hat{u}^2 = L\hat{i}^2$ ist, also

$$\hat{u} = \hat{i} \sqrt{L/C}$$

Diese Gleichung ist formal dem Ohmschen Gesetz ähnlich (\hat{u} und \hat{i} sind hier jedoch Amplituden!). Der Faktor hinter $\sqrt{L/C}$ hat also die Dimension eines Widerstandes und heißt

Wellenwiderstand für elektromagnetische Wellen

$$Z = \sqrt{L/C} \quad \text{oder mit Gl. (5.57)} \quad Z = cL/l \quad (5.61)$$

In Analogie dazu definiert man auch einen Wellenwiderstand für mechanische Wellen

$$Z = c\rho$$

Diese Größen sind wegen der Gleichungen (5.53) bis (5.57) für jedes Medium und die zugehörige Welle charakteristisch. Immer wenn sie sich ändern, tritt Reflexion auf (s. hierzu unten Aufgabe 3 zu Abschn. 5.2.2). Außerdem machen sie gewisse Analogien zwischen Gleichungen der Akustik und der Elektrizität deutlich, wie z.B. zwischen den Gleichungen (5.74) und (3.39).

Leistung oder Energiestrom

Die oben beschriebene Energie wird von der Welle meist mit der Phasengeschwindigkeit c transportiert. An einer Stelle des Mediums – z.B. Seil oder Saite mit dem Querschnitt A und der Dichte ρ – „strömt“ daher in der Zeit t diejenige Energie vorbei, die vorher im Volumen $V = ctA$ enthalten war: $W = ctAw$. Mit Gl. (5.59) erhält man

$$W = \frac{1}{2} ctA\rho\omega^2 \hat{s}^2 = \frac{1}{2} ctA\rho\hat{v}^2$$

Die pro Zeit transportierte Energie, also der Energiestrom, die Leistung, ist daher

$$P = \frac{W}{t} = cAw = \frac{1}{2} cA\rho\omega^2 \hat{s}^2 = \frac{1}{2} cA\rho\hat{v}^2 \quad (5.62)$$

Für die eindimensionale elektromagnetische Welle lässt sich der Energiestrom mit Gl. (5.60) genauso herleiten. Es ist

$$P = \frac{W}{t} = c \frac{W}{l} = \frac{1}{2} c \frac{C}{l} \hat{u}^2 = \frac{1}{2} c \frac{L}{l} \hat{i}^2$$

Mit Gl. (5.57) und Gl.(5.61) erhält man daraus

$$P = \frac{1}{2} \frac{\hat{u}^2}{Z} = \frac{1}{2} \hat{i}^2 Z$$

Aufgaben zu Abschn. 5.2.2

1. Ein Stahldraht mit 2 mm^2 Querschnitt ist 50 m weit mit der Kraft 964 N gespannt. Schlägt man an einem Ende senkrecht zur Spannrichtung gegen den Draht, so läuft diese „Störung“ als Querverwelle zum anderen Ende. Nach welcher Zeit erreicht sie dieses ($\rho_{\text{Stahl}} = 7,7 \text{ g/cm}^3$)?
2. Wie groß ist die Phasengeschwindigkeit von Längswellen in Stahl mit dem Elastizitätsmodul $1,8 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$ ($\rho_{\text{Stahl}} = 7,7 \text{ g/cm}^3$)?
3. Wie groß sind die Wellenwiderstände der Medien in den Aufgaben 1 und 2?
4. Die Phasengeschwindigkeit einer Längswelle in Blei ist 1226 m/s , seine Dichte $11,3 \text{ g/cm}^3$. Man berechne den Elastizitätsmodul.
5. Die Geschwindigkeiten von Längswellen in Wasser und Luft (Schallwellen) bei Normbedingungen sind $c_W = 1450 \text{ m/s}$ bzw. $c_L = 332 \text{ m/s}$. Die Dichten sind $\rho_W = 1 \text{ t/m}^3$ bzw. $\rho_L = 1,29 \text{ kg/m}^3$. Man berechne daraus die Druckerhöhungen, die notwendig sind, um Wasser bzw. Luft um 1% zu komprimieren.

6. Eine elektrische Verzögerungsleitung besteht aus zwei Drähten, von denen einer zu einer langen Spule gewickelt ist, sowie aus Kondensatoren zwischen beiden Drähten (Bild 5.38). Jeder Kondensator hat die Kapazität 10 pF . Ihre Abstände sind je 10 cm , dazwischen liegt jeweils eine Induktivität $10 \mu\text{H}$. Wie schnell breitet sich eine elektromagnetische Welle in dieser Leitung aus?

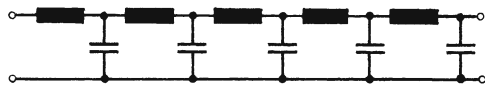


Bild 5.38 Elektrische Verzögerungsleitung

7. Ein Seil ist durch die Kraft 30 N horizontal gespannt. Durch dreimaliges Aufundabbewegen des einen Endes wird ein sinusförmiger Wellenzug von $1,5 \text{ m}$ Länge und 10 cm Amplitude erzeugt. Welche Energie enthält dieser Wellenzug?
8. Über die in Aufgabe 6 beschriebene Leitung wird die Leistung 5 W übertragen. Wie groß sind Spannungs- und Stromamplituden? Welchen Wellenwiderstand hat die Leitung?

5.2.3 Reflexion von eindimensionalen Wellen

Ganz allgemein soll unter „Reflexion“ die Erscheinung verstanden werden, dass in bestimmten Fällen eine eindimensionale Welle ihre Ausbreitungsrichtung umkehrt.

Zur Demonstration der Reflexion von mechanischen Wellen dient ein Gummischlauch von mehreren Metern Länge, der vertikal aufgehängt ist (Bild 5.39 und 5.40).

□ **Versuch 17. Reflexion am festen Ende.** Diese kann man am Schlauch, dessen beide Enden an starren Körpern befestigt sind, beobachten: Schlägt man horizontal z.B. nahe dem unteren Ende gegen den Schlauch, so läuft diese kurze „Störung“ mehrmals als Querverwelle auf und ab, da sie jeweils an den Enden reflektiert wird (Bild 5.39). □

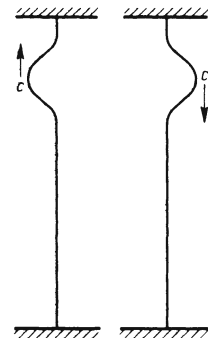


Bild 5.39 Reflexion einer elastischen Querverwelle am festen Ende

Zur Erklärung denke man sich das „Medium“ Gummischlauch an einem Ende in mehrere Abschnitte unterteilt („Punkte“ im Sinne des Huygens-Fresnel-Prinzips, s. Abschn. 5.2.1.1).

Der letzte Abschnitt kann nicht schwingen, da er starr befestigt ist. Daher kann der schwingende vorletzte Abschnitt seine Schwingungsenergie nicht an ihn weiter-, sondern nur an den drittletzten zurückgeben. Dadurch kehrt die Welle um.

□ **Versuch 18. Reflexion am freien Ende** erhält man, wenn man das untere Ende des Schlauches frei hängen lässt und eine „Störung“ durch einen (schwächeren) horizontalen Schlag in der Nähe des oberen Endes erzeugt. Diese läuft als Querwelle abwärts zum unteren freien Ende und kommt von dort (mit verringerter Amplitude) reflektiert zurück (Bild 5.40). □

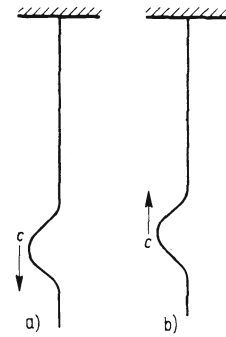


Bild 5.40 Reflexion einer elastischen Querwelle am freien Ende

Die Erklärung ist die gleiche wie oben zu Versuch 17: Auch hier kann die Schwingungsenergie zuletzt nicht weiter-, sondern nur zurückgegeben werden. Der Unterschied zwischen diesen beiden Fällen ist folgender: Bei der Reflexion am festen Ende wird nicht nur die Ausbreitungsrichtung, sondern auch die Richtung der Auslenkung umgekehrt. Bild 5.39a und b zeigt die Störung kurz vor bzw. nach der Reflexion. Bei der Reflexion am freien Ende bleibt dagegen die Richtung der Auslenkung erhalten (Bild 5.40). Denkt man sich statt der einmaligen Auslenkung eine sinusförmige Welle durch das Medium laufen, so kann man die hier gemachten Beobachtungen verallgemeinern:

Eine elastische Welle erfährt bei Reflexion am festen Ende eine Phasenverschiebung um π , am freien Ende nicht.

Die beiden in Versuch 17 und 18 untersuchten Fälle sind (idealisierte) Grenzfälle. Das allgemeine Verhalten zeigt

□ **Versuch 19.** Füllt man die untere Hälfte des Gummischlauches von Versuch 17 mit Sand, so ist dort seine Dichte größer, also nach Gl. (5.53) die Phasengeschwindigkeit einer Querwelle kleiner¹⁾. Beide Enden sind fest. Schlägt man horizontal nahe dem oberen Ende gegen den Schlauch, so beobachtet man dreierlei (Bild 5.41):

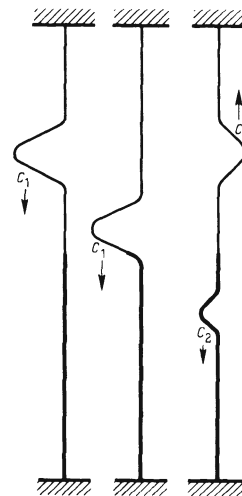


Bild 5.41 Reflexion und Durchgang einer elastischen Querwelle bei zwei aneinandergrenzenden verschiedenen Medien

¹⁾ An sich ändert sich schon im leeren Schlauch die Phasengeschwindigkeit, wenn er vertikal aufgehängt ist, da die Spannkraft durch das Eigengewicht nach oben zunimmt. Da diese Änderung aber stetig verläuft, ist sie kaum zu beobachten.

1. Die Störung läuft wie in Versuch 17 als Welle den Schlauch mit der Geschwindigkeit c_1 abwärts.
2. Von der Mitte ab – also im sandgefüllten Teil – läuft sie mit deutlich verringerter Geschwindigkeit c_2 und verringerter Amplitude weiter.
3. Von der Mitte aus läuft eine Welle mit umgekehrtem Ausschlag zurück, den leeren Schlauch aufwärts.

Ein Schlag nahe dem unteren Ende zeigt prinzipiell die gleichen Effekte, nur wird die weiterlaufende Welle von der Mitte ab schneller, und die an der Mitte reflektierte hat die gleiche Ausschlagsrichtung wie die ursprüngliche. \square

Im Grunde verlief die Reflexion in Versuch 17 ebenso wie hier, nur ist dort der Unterschied der Phasengeschwindigkeit im Schlauch und in der Befestigung (z.B. Zimmerdecke) so groß, dass man praktisch keine weiterlaufende Welle beobachtet. Dafür hat die reflektierte Welle praktisch die ganze Energie. Beim freien Ende (Versuch 18) wird zwar ein merklicher Energiebetrag an die umgebende Luft abgegeben, das ist aber hier nur an der verringerten Amplitude der reflektierten Welle zu bemerken.

Zusammenfassend kann man also sagen:

An der Grenze zwischen zwei Medien mit verschiedenen Phasengeschwindigkeiten wird eine Welle teilweise reflektiert, und zwar mit dem Phasensprung π , wenn die Geschwindigkeit im zweiten Medium niedriger ist als im ersten.

Diese Aussage gilt für alle Arten von Wellen.

5.2.4 Überlagerung von eindimensionalen Wellen

Wenn zwei oder mehr Wellen gleichzeitig durch dasselbe Medium laufen, so entsteht eine Überlagerung oder Interferenz dieser Wellen. In eindimensionalen Medien können die Wellen dabei gleiche oder entgegengesetzte Ausbreitungsrichtung haben.

Wir wollen uns hier auf die Behandlung des zweiten Falles beschränken, da bei eindimensionalen Wellen nur dieser praktische Bedeutung hat. Die Interferenz bei gleicher Ausbreitungsrichtung wird bei den dreidimensionalen Wellen in Abschn. 5.2.6.3 behandelt.

Entgegengesetzte Ausbreitungsrichtung

Die Interferenz zweier Wellen, die ein eindimensionales Medium gleichzeitig in entgegengesetzten Richtungen durchlaufen, erhält man am einfachsten, indem man eine Welle an einem Ende des Mediums reflektieren lässt. Dann läuft die reflektierte Welle im Medium zurück, während die primäre Welle noch auf das Ende zuläuft.

Wir wollen diese Art der Interferenz zunächst theoretisch untersuchen. Das Medium soll sich in x -Richtung erstrecken, sodass die hinlaufende Welle die Gleichung (5.47)

$$s = \hat{s} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

hat. Die ihr entgegenlaufende Welle hat gleiche Amplitude, Frequenz und Wellenlänge, läuft aber in negativer x -Richtung, gehorcht also der Gleichung

$$s^* = \hat{s} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) \quad (5.63)$$

Die Auslenkung irgend eines beliebigen Punktes x resultiert aus der Erregung durch beide Wellen, ergibt sich also durch Addition von Gl. (5.47) und (5.63)

$$s_{\text{ges}} = s + s^* = \hat{s} \left[\sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) \right]$$

Wendet man darauf die Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen an $[\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cos (\alpha - \beta)/2 \cdot \sin (\alpha + \beta)/2]$ und berücksichtigt, dass $\cos (-\alpha) = \cos (\alpha)$ und dass $2\pi/T = \omega$ ist, so erhält man

$$s_{\text{ges}} = 2\hat{s} \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \sin \omega t \quad (5.64)$$

Das ist die Gleichung einer Sinusschwingung mit der Kreisfrequenz ω und der periodisch vom Ort abhängigen Amplitude $2\hat{s} \cos (2\pi x/\lambda)$. Das heißt also, dass das ganze Medium schwingt, dass aber die Amplitude dieser Schwingung von Ort zu Ort verschieden ist. Je nach dem Wert von $\cos (2\pi x/\lambda)$ schwankt sie zwischen null und dem Maximum $2\hat{s}$.

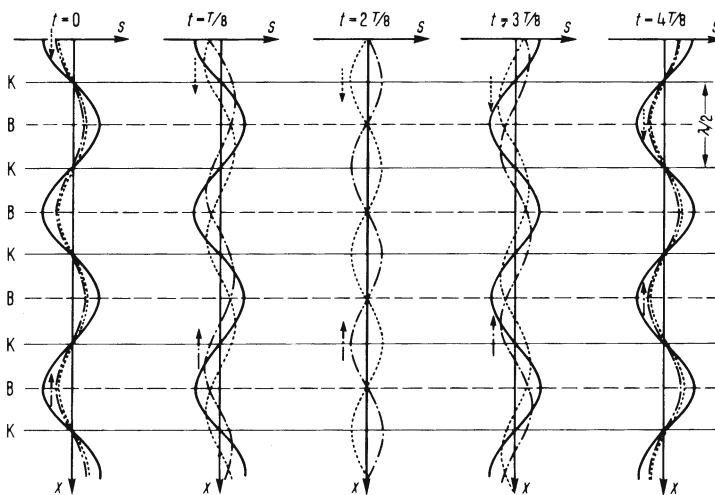


Bild 5.42 Fünf Momentaufnahmen zweier gegenläufiger Wellen und ihrer resultierenden stehenden Welle

Bild 5.42 zeigt fünf aufeinanderfolgende Momentaufnahmen der beiden erzeugenden Wellen und ihrer Resultierenden. Punktiert ist die von oben nach unten, strichpunktiert die von unten nach oben laufende Welle gezeichnet. Die ausgezogene Resultierende verschiebt sich nicht in x -Richtung, sondern hat an den Stellen K immer die Auslenkung null, an den Stellen B Auslenkungen, die mit der Frequenz $f = 1/T$ zwischen $2\hat{s}$ und $-2\hat{s}$ schwanken.

Die ortsfeste Schwingung, die durch Überlagerung von zwei in entgegengesetzten Richtungen laufenden gleichen Wellen entsteht, nennt man eine stehende Welle.

Stellen, die nicht schwingen, da dort die Amplitude immer null ist, heißen Knoten, Stellen, die mit Maximalamplitude $2\hat{s}$ schwingen, heißen Bäuche. In Bild 5.43 sind drei stehende Wellen als „Zeitaufnahmen“ wiedergegeben. Die Knoten ergeben sich überall dort, wo $\cos(2\pi x/\lambda) = 0$ ist, Bäuche entstehen überall dort, wo $\cos(2\pi x/\lambda) = \pm 1$ ist.

Der Abstand zweier benachbarter Knoten oder benachbarter Bäuche ist immer eine halbe Wellenlänge.

Stehende Wellen auf begrenzten Medien. Am Anfang ($x = 0$) des Mediums liegt entweder ein Bauch, wenn von dort die Welle s ausgehen soll, oder bei andersartiger Anregung ein Knoten. Wenn die entgegengesetzt laufende Welle s^* durch Reflexion am Ende des Mediums entstehen und die gleiche Amplitude \hat{s} haben soll, muss der Endpunkt $x = l$ entweder ganz frei oder starr befestigt sein (vgl. Abschn. 5.2.3). Im ersten Fall muss folglich dort ein Bauch sein, im zweiten ein Knoten. Daher müssen Wellenlänge und Länge des Mediums folgendermaßen aufeinander abgestimmt sein:

Damit sich in einem Medium der Länge l eine stehende Welle ausbilden kann, muss l bei zwei freien Enden (Bild 5.43a) oder bei zwei festen Enden ein geradzahliges Vielfaches von $\lambda/4$, bei einem festen und einem losen Ende (Bild 5.43c) ein ungeradzahliges Vielfaches von $\lambda/4$ sein.

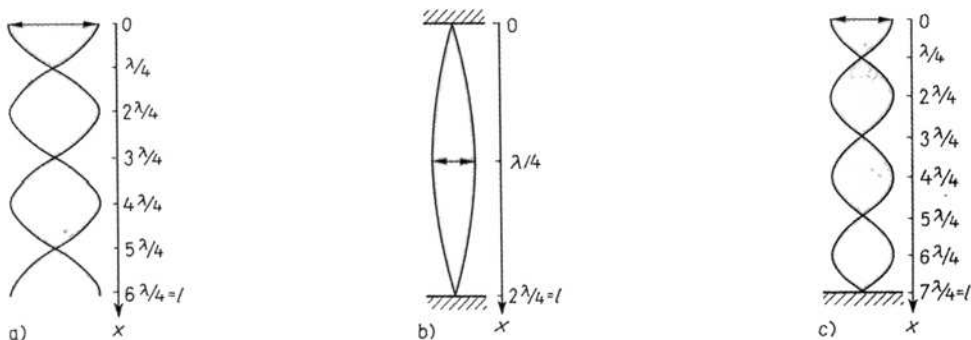


Bild 5.43 Verschiedene Formen stehender elastischer Querwellen (auf begrenztem Medium!)

Diese Überlegungen gelten sowohl für Quer- als auch für Längswellen, da die Richtung der Auslenkung dabei keine Rolle spielt. Die ersten zeigt

□ **Versuch 20. Stehende elastische Querwellen.** Dazu dient wieder ein vertikal hängender Gummischlauch (ähnlich wie in Versuch 17 und 18). Sein oberes Ende kann jetzt periodisch mit veränderbarer Frequenz horizontal hin und her bewegt werden. Sein unteres Ende hängt entweder frei oder kann in verschiedener Höhe festgemacht werden. Um deutliche stehende Wellen z.B. wie in Bild 5.43 zu erhalten, werden entweder die Frequenz oder die Länge oder die Spannkraft und damit nach Gl. (5.53) die Phasengeschwindigkeit variiert. □

Bei der obigen theoretischen Behandlung haben wir nur eine einmalige Reflexion am Ende des Mediums berücksichtigt. Die rücklaufende Welle kann aber auch wieder am Anfang des Mediums reflektiert werden usw. Dadurch können die Amplituden in den Bäuchen ganz

erheblich anwachsen. Wir haben hier also Resonanzerscheinungen vor uns, und zwar mit mehreren Eigenfrequenzen¹⁾. Es gilt:

Jedes begrenzte Medium hat beliebig viele Eigenfrequenzen. Diese sind stets ganzzahlige Vielfache einer Grundfrequenz.

□ **Versuch 21. Stehende Längswellen in Gasen** erhält man z.B. im sog. Kundtschen Rohr²⁾ (Bild 5.44a). Vor dem linken Ende eines Glasrohres 1 von mehreren Zentimetern Durchmesser führt die Membran eines Lautsprechers 2 erzwungene Schwingungen in Längsrichtung aus. Das rechte Ende ist entweder offen („freies Ende“) oder kann durch einen verschiebbaren Kolben 3 verschlossen werden. Der Boden des Rohres ist mit einer dünnen Schicht eines trockenen Staubes (z.B. Korkmehl oder Zigarettenasche) bestreut. Bei offenem Ende kann man nun die Frequenz der Spannung am Lautsprecher so verändern, dass die Rohrlänge l ein geradzahliges Vielfaches einer Viertelwellenlänge $\lambda/4$ ist. Dass sich dann eine stehende Welle ausbildet, erkennt man am Staub:

An den Bäuchen und in ihrer Umgebung wird er aufgewirbelt, während er an den Knoten und in deren Umgebung liegen bleibt (Bild 5.44b). Bei geschlossenem Ende muss die wirksame Rohrlänge (Abstand Lautsprecher – Kolben) ein ungeradzahliges Vielfaches von $\lambda/4$ sein (Bild 5.44c). Zum Abgleich kann man auch entweder die Frequenz verändern oder den Kolben verschieben.

Lässt man das rechte Ende nicht offen, verschließt es auch nicht mit dem starren Kolben 3, sondern mit einem lockeren Wattebausch, so bildet sich keine stehende Welle aus, da keine Reflexion stattfindet, sondern die ankommende Energie aufgezehrt wird. □

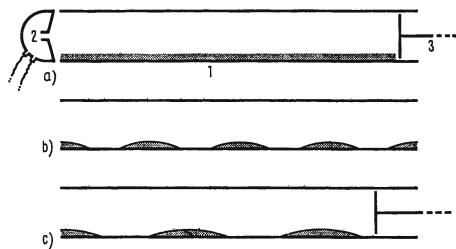


Bild 5.44 Stehende Schallwellen im sog. Kundtschen Rohr; bei — aufgewirbelter Staub

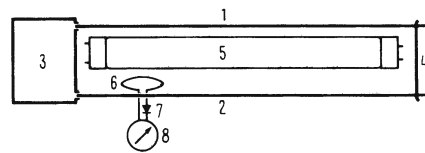


Bild 5.45 Zur Demonstration stehender elektromagnetischer Wellen auf einer Lecherleitung

□ **Versuch 22. Stehende elektromagnetische Wellen** (Bild 5.45) erhält man, indem man z.B. zwei parallele Drähte 1 und 2 – eine sog. Lecherleitung – an einen elektronischen Sender 3 für Frequenzen um 1 GHz anschließt. Am Ende der Lecherleitung, das entweder offen oder durch einen Drahtbügel 4 kurzgeschlossen sein kann, wird die hinlaufende Welle reflektiert. Unter den analogen Bedingungen wie in Versuch 20 und 21 bilden sich stehende Wellen aus. Da die elektromagnetische Welle durch eine Spannungs- und eine Stromgleichung (5.58) beschrieben wird, sind auch Spannungs- und Strombäuche bzw. -knoten zu erwarten. Zum Sichtbarmachen der Spannungsbäuche und -knoten bringt

¹⁾ Man vgl. z.B. die verschiedenen Möglichkeiten in Bild 6.13a.

²⁾ August Kundt (1839 bis 1894).

man z.B. eine handelsübliche Leuchtstofflampe 5 zwischen die Drähte. An den Bäuchen leuchtet sie auf, an den Knoten bleibt sie dunkel. Die Lage der Strombäuche und -knoten erhält man, indem man eine Drahtschlinge 6 („Induktionsspule“), die über eine Diode 7 an einen Spannungsmesser 8 angeschlossen ist, zwischen den Drähten entlangführt. An den Bäuchen erhält man einen Zeigerausschlag des Instrumentes, an den Knoten nicht. Am offenen Ende findet man einen Spannungsbauch und einen Stromknoten, am kurzgeschlossenen Ende das Umgekehrte. Dementsprechend finden sich auch entlang der Leitung die Stromknoten an den Orten der Spannungsbäuche und umgekehrt.

Lässt man das Ende der Leitung nicht offen ($R = \infty$), schließt es auch nicht kurz ($R = 0$), sondern verbindet die Drähte durch einen Wirkwiderstand $R = Z$, wobei Z der in Abschn. 5.2.2.4 behandelte Wellenwiderstand ist, so ist keine stehende Welle herzustellen. Offenbar findet keine Reflexion statt, sondern die elektromagnetische Energie wird vollständig auf Z übertragen, z.B. in Wärme umgewandelt. □

Chladni-Figuren. Zur Ergänzung sollen noch stehende Wellen auf begrenzten zweidimensionalen Medien vorgestellt werden, obwohl wir hier sonst nicht weiter auf zweidimensionale Wellen eingehen können.

□ **Versuch 23.** Eine quadratische oder runde Stahlblechplatte wird in ihrem Mittelpunkt horizontal gehalten und von unten mit einem Lautsprecher beschallt. Variiert man die Frequenz dieser Beschallung, so bilden sich bei bestimmten Frequenzen resonanzartig stehende Wellen aus. Deren Bäuche sind hier Flächenstücke, ihre Knoten sind Linien. Sie werden sichtbar, wenn man die Platte vorher mit Sand gleichmäßig bestreut hat, der nun von den Bäuchen weggeschüttelt wird und sich entlang der Knotenlinien sammelt. Die so entstehenden, mehr oder weniger symmetrischen Figuren sind nach ihrem Entdecker E.F.F. Chladni (1756 bis 1826) benannt. In Bild 5.46 sind einige dieser reizvollen Figuren wiedergegeben. □

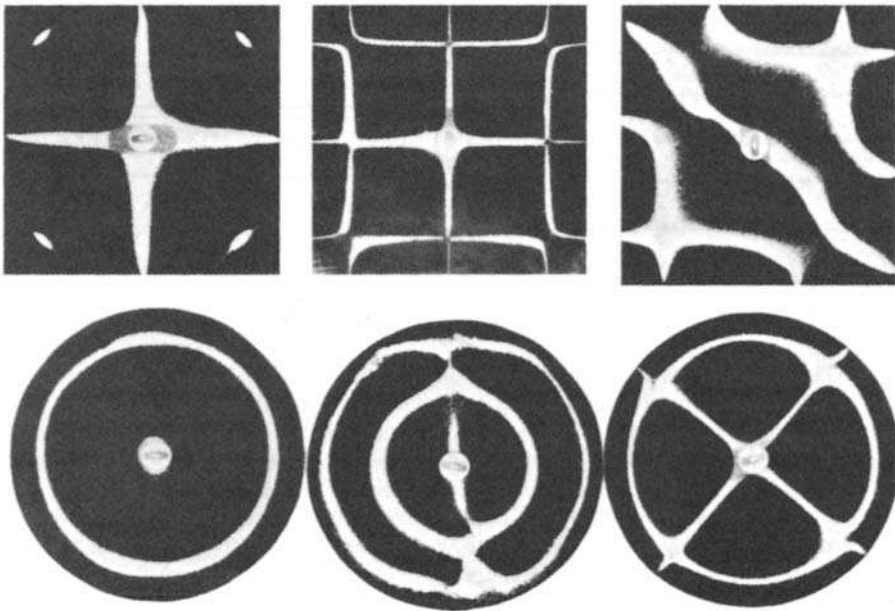


Bild 5.46 Chladni-Figuren

Anwendungen. Zur Erzeugung von Schallschwingungen bestimmter Frequenz (= bestimmter Tonhöhe) dienen vielfach die stehenden Wellen von Gassäulen und gespannten Saiten z.B. in Musikinstrumenten. Die Bestimmung der Wellenlänge an stehenden Wellen ist in der Hochfrequenz ein häufiges Messverfahren. Mit $c = \lambda f$ können c oder f berechnet werden. Hochfrequenzleitungen werden mit dem Wellenwiderstand abgeschlossen, wenn man Reflexion verhindern will.

5.2.5 Dreidimensionale Wellen

Die meisten Wellen in der Natur sind dreidimensional. Wir wollen zunächst die Merkmale und Eigenschaften besprechen, die allen gemeinsam sind.

5.2.5.1 Grundbegriffe

Von den verschiedenen möglichen Anregungen und zugehörigen Wellen in einem als Wellenmedium geeigneten Stoff wollen wir die zwei einfachsten betrachten:

1. Die Schwingungsenergie wird dem Medium in einem eng begrenzten Gebiet (punktförmig) zugeführt. Dazu kann z.B. ein elastisches Medium an einer Stelle periodisch verdichtet werden (pulsierend schwingende Kugel).

Diese Schwingung breitet sich nach allen Seiten aus, d.h. durch das Medium läuft eine Längswelle (Ausbreitungsrichtung und Schwingungsrichtung sind parallel). Falls das Medium in allen Richtungen gleiche Eigenschaften hat (isotrop ist), werden nach allen Seiten von der Welle in gleichen Zeiten gleiche Wege zurückgelegt. Damit liegen alle Punkte, die in der Welle zu einem Zeitpunkt gleiche Phase haben, auf konzentrischen Kugeln um den Zentralpunkt. Allgemein werden Flächen gleicher Phase Wellenfronten genannt. Da diese hier kugelförmig sind, heißen die Wellen Kugelwellen.

2. Die Schwingungsenergie wird dem Medium flächenhaft zugeführt, z.B. indem alle Punkte, die auf einer Ebene liegen, phasengleich periodisch hin und her bewegt werden, am einfachsten senkrecht zu der Ebene. Dann läuft nach beiden Seiten je eine Längswelle. Im isotropen Medium sind die Wellenfronten zur Ausgangsebene parallele Ebenen. Deshalb werden diese Wellen ebene Wellen genannt.

Alle Punkte, die gleichzeitig von der Welle erreicht werden, liegen auf einer Wellenfront; jeder von ihnen sendet mit gleicher Phase seine Elementarwelle aus (vgl. den I. Teil des Huygens-Fresnelschen Prinzips in Abschn. 5.2.1.1). Die Summe all dieser Elementarwellen ist die fortschreitende Gesamtwellen. Das ist der II. Teil des Huygens-Fresnelschen Prinzips. Wir können beide Teile zusammenfassen:

Huygens-Fresnelsches Prinzip: Jeder Punkt eines Mediums, der von einer Welle erfasst wird, wird dadurch zum Ausgangspunkt einer Elementarwelle. Die weiterlaufende Welle ist die Resultierende aller dieser Elementarwellen.

Ist ein mehr oder weniger punktförmiges Wellenzentrum sehr weit (theoretisch unendlich weit) vom Beobachtungsort entfernt, so ist die beobachtete Welle ebenfalls eben. In anisotropen Medien, in denen also die Phasengeschwindigkeit von der Richtung abhängt, sind die Wellenfronten zu komplizierteren Flächen deformiert. Auch durch andersartige Anregung können kompliziertere Wellen entstehen. Wir werden uns aber hauptsächlich auf Kugelwellen und ebene Wellen beschränken, bei den mechanischen speziell auf Längswellen.

5.2.5.2 Mechanische Wellen in kontinuierlichen Medien

Als dreidimensionale Medien für die Ausbreitung mechanischer Wellen kommen praktisch alle Stoffe in Frage. In Festkörpern sind sowohl Querwellen als auch Längswellen möglich. In Flüssigkeiten und Gasen gibt es dreidimensional nur Längswellen, da diese Stoffe fast keine Querkräfte übertragen können. Die wichtigsten mechanischen Wellen sind die Schallwellen, auf die im Abschn. 5.2.5.3 noch näher eingegangen wird. Hier sollen die allgemeinen Eigenschaften in der gleichen Weise wie bei den eindimensionalen Wellen (Abschn. 5.2.1 und 5.2.2) behandelt werden.

Die Abhängigkeit der Phasengeschwindigkeiten von den Eigenschaften der Medien sind hier wie dort gleich, somit gelten Gl. (5.53) bis (5.56) hier unverändert. Dagegen ergeben sich für den Energietransport und die Wellengleichungen teilweise andere Beziehungen:

Energietransport und Wellengleichung

Ebene Wellen. Zur Erzeugung einer ebenen Welle wird allen Punkten eines isotropen Mediums, die auf einer Ebene liegen, Schwingungsenergie zugeführt. Bei der Ausbreitung wird das ganze Medium von der Welle erfasst, ohne dass sich die Flächen ihrer Wellenfronten vergrößern. Also bleibt die Energiedichte konstant, genau wie bei einer eindimensionalen Welle, und wir können Gl. (5.59) und (5.62) unverändert übernehmen:

Die Energiedichte

$$w = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \hat{s}^2 = \frac{1}{2} \rho \hat{v}^2 \quad (5.65)$$

und die pro Zeit durch eine Fläche A des Mediums (senkrecht zur Ausbreitungsrichtung) transportierte Energie, die Leistung oder der Energiestrom

$$P = \frac{1}{2} c A \rho \omega^2 \hat{s}^2 = \frac{1}{2} c A \rho \hat{v}^2$$

sind bei einer ungedämpften ebenen Welle unabhängig vom Ort und von der Zeit. Daher ist auch die Amplitude der ebenen Welle konstant.

Folglich sind die Gl. (5.46) bis (5.48) nicht nur die Wellengleichungen der eindimensionalen Welle, sondern auch die der dreidimensionalen ebenen Welle

$$s = \hat{s} \sin 2\pi f \left(t - \frac{x}{c} \right) = \hat{s} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = \hat{s} \sin(\omega t - kx)$$

Das anschaulichste Maß für die „Stärke“ oder Intensität einer räumlichen Welle ist die Energie, die sie pro Zeit und pro Fläche transportiert, also die Leistung pro Fläche.

Definition: Bei einer dreidimensionalen Welle heißt der Quotient aus der Leistung P und der von ihr durchsetzten Fläche A Intensität oder Energiestromdichte

$$S = P/A$$

Mit Gl. (5.62) wird die

Energiestromdichte ebener Wellen

$$S = \frac{1}{2} c \rho \omega^2 \hat{s}^2 = \frac{1}{2} c \rho \hat{v}^2 \quad (5.66)$$

Man findet bei allen Wellen, dass die Intensität oder Energiestromdichte dem Quadrat der Amplitude der Schwingungsgröße (hier \hat{s}^2 oder \hat{v}^2 proportional ist).

Der Vergleich mit Gl. (5.59) ergibt außerdem

$$S = c w \quad (5.67)$$

(Genau genommen ist die Intensität ein Vektor $\vec{S} = \vec{c}w$, vgl. Abschn. 5.2.5.4 Poyntingscher Vektor, S. 448.)

Kugelwellen. Zur Erregung einer Kugelwelle wird einem isotropen Medium die Schwingungsenergie im mehr oder weniger punktförmigen Wellenzentrum (vgl. Abschn. 5.2.5.1) zugeführt und breitet sich dann mit der Welle symmetrisch nach allen Seiten aus. Die Gesamtenergie einer Schwingung bleibt dabei konstant (verlustfreies Medium!), muss sich aber auf immer größere Kugelflächen verteilen, je weiter sie sich vom Zentrum entfernt. Das Gleiche gilt für die Leistung. Folglich nimmt die Leistung pro Fläche, die Intensität in dem Maß ab, in dem die Kugelflächen zunehmen, also proportional $1/x^2$, wenn x der vom Zentrum aus zurückgelegte Weg ist ($x = 0$ sei ausgeschlossen).

Die Intensität einer Kugelwelle ist dem Quadrat des Abstandes vom Wellenzentrum umgekehrt proportional.

Damit lässt sich auch die Wellengleichung einer Kugelwelle angeben. Sie hat im Prinzip die Form von Gl. (5.47), jedoch muss die Amplitude mit dem Weg x abnehmen. Nach Gl. (5.59) ist die Amplitude proportional der Wurzel aus der Energiedichte, diese selbst aber proportional $1/x^2$. Also erhält man mit einem Proportionalitätsfaktor K , der durch die Anfangsamplitude bestimmt ist und die Dimension einer Länge hat,

$$s = \frac{K}{x} \hat{s} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \quad (x \neq 0) \quad (5.68)$$

Strahlungsdruck

Trifft eine Welle der Energiedichte w auf eine Grenzfläche zu einem anderen Medium, so wird nur ein Teil der Energie im anderen Medium weitertransportiert, der Rest wird reflektiert (vgl. Abschn. 5.2.3) oder absorbiert (s. Abschn. 5.2.8). Mit beiden Vorgängen ist eine Kraft F und ein Druck $p = F/A$ auf die Grenzfläche in Ausbreitungsrichtung verbunden. Wie groß dieser sog. Strahlungsdruck ist, wollen wir uns klarmachen; dabei nehmen wir der Einfachheit halber zunächst 100%-ige Reflexion an. Im zeitlichen Mittel ist die Hälfte der Energie einer Welle kinetische Energie, das Gleiche gilt für die Energiedichten, also $w_{\text{kin}} = w/2$. Nun denken wir uns statt der Welle Materie auf die Grenzfläche zu- und abströmen. Ihre Geschwindigkeit sei gleich der Geschwindigkeit c der Welle und ihre

Masse sei gerade so groß, dass ihre kinetische Energie gleich der kinetischen Energie der Welle ist:

$$\frac{1}{2} m c^2 = w_{\text{kin}} A c t = \frac{w}{2} A c t \quad (5.69)$$

($A c t$ ist das Volumen, dessen Energieinhalt in der Zeit t auf die Fläche A trifft.)

Den Impuls $m c$ vor der Reflexion erhalten wir, indem wir die kinetische Energie mit $2/c$ multiplizieren, also wird aus Gl. (5.69)

$$m c = w A t$$

Nach der Reflexion hat der Impuls gleichen Betrag, aber entgegengesetzte Richtung, also ist die Impulsänderung

$$2 m c = 2 w A t$$

Die Impulsänderung ist nach Abschn. 1.3.4 gleich dem Kraftstoß, also

$$F t = 2 w A t$$

die Kraft folglich

$$F = 2 w A$$

und der gesuchte Strahlungsdruck (bei 100%-iger Reflexion)

$$p_{\text{R}} = F/A = 2 w$$

Mit Gl. (5.65) und (5.66) wird schließlich der

Strahlungsdruck bei vollständiger Reflexion

$$p_{\text{R}} = \rho \omega^2 \hat{s}^2 = \rho \hat{v}^2 = 2 S/c \quad (5.70)$$

bei vollständiger Absorption wegen der nur halb so großen Impulsänderung nur

$$p_{\text{A}} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \hat{s}^2 = \frac{1}{2} \rho \hat{v}^2 = \frac{S}{c}$$

Man kann in dieser Herleitung auch die fiktive Materie weglassen, indem man einfach sagt, mit dem Transport der kinetische Energie \mathcal{W}_{kin} sei prinzipiell ein Impuls $2 \mathcal{W}_{\text{kin}}/c$ verknüpft. Dieser Gedanke bewährt sich an anderer Stelle ausgezeichnet (s. Abschn. 5.3 und 6.1).

5.2.5.3 Schallwellen

Das menschliche Gehör erzeugt im Gehirn einen Sinneseindruck, wenn es von mechanischen Wellen mit Frequenzen zwischen etwa 16 Hz und 20 kHz erregt wird. Diesen Sinneseindruck nennen wir Schall und die erregenden Wellen Schallwellen. In Erweiterung des Begriffes Schall nennt man mechanische Schwingungen unterhalb 16 Hz Infraschall, oberhalb 20 kHz Ultraschall.

Wir unterscheiden bei dem Sinneseindruck Schall außerdem noch die Empfindung der Tonhöhe und die der Lautstärke. Die Tonhöhe ist direkt von der Frequenz der erregenden Schallwelle, die Lautstärke von ihrer Intensität abhängig.

Eine sinusförmige Schwingung empfinden wir zwar als reinen, aber als „farblosen“ Ton. Man nennt ihn einen physikalisch reinen Ton. Ist die erregende Schwingung nicht sinusförmig, so besteht sie aus mehreren sinusförmigen Teilschwingungen mit verschiedenen Frequenzen (vgl. Abschn. 5.1.7). Die unterste dieser Frequenzen bestimmt den Eindruck der Tonhöhe, wenn ihre Amplitude nicht viel kleiner als die der anderen ist. Diese anderen dagegen, die Obertöne, ergeben für uns den Eindruck der Klangfarbe, das Charakteristikum bestimmter Schallquellen. Enthält das Frequenzgemisch sehr viele (evtl. unendlich viele) eng benachbarte Frequenzen (evtl. sehr unterschiedlicher Amplitude), so nennen wir den entstehenden Schalleindruck ein Geräusch. Eine sehr kurze Erregung dieser Art ist ein Knall. Einige Beispiele von Spektren solcher nicht sinusförmiger Schallschwingungen sind in Bild 5.47 wiedergegeben.

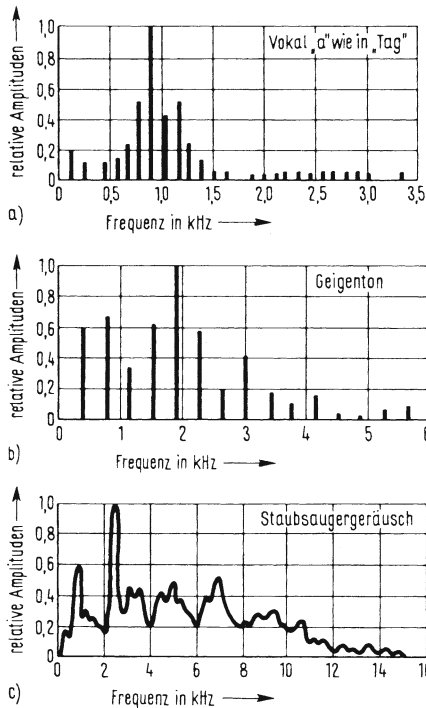


Bild 5.47 Schallspektren
a) eines Vokals, b) eines Geigentones
und c) eines Staubsaugergeräusches
(Einhüllende aller Spektrallinien)

Schallausbreitung

Die Ausbreitung einer ebenen Schallwelle wird an sich durch die Wellengleichung (5.47) eindeutig beschrieben. Die Auslenkung s ist aber bei den wichtigsten Schallwellen, den Längswellen in Gasen, nur schwer zu messen. Nun bewirkt aber die periodische Auslenkung eine örtlich und zeitlich schwankende Druckänderung. Diese ist leichter zu messen als die Auslenkung, und ihre Gleichung muss die Längswelle ebenfalls beschreiben:

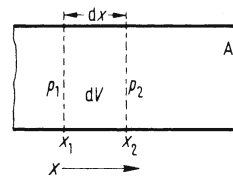


Bild 5.48 Zur Herleitung der Schallwellengleichung des Druckes

Wellengleichung des Schalldrucks. Bild 5.48 stellt ein Stück einer Gassäule dar mit dem Querschnitt A und der Längsausdehnung in x -Richtung. Darin herrscht zunächst der „Ruhedruck“ p_0 . Beim Durchgang einer Längswelle ist jedoch der Druck vom Weg x und von der Zeit t abhängig, z.B. möge er zu einem bestimmten Zeitpunkt an der Stelle x_1 den Wert p_1 , an der Stelle $x_2 = x_1 + dx$ den Wert $p_2 = p_1 + dp$ haben.

Auf ein Volumenelement $dV = A dx$ wirkt also von der einen Seite die Kraft $F_1 = p_1 A$, von der anderen die Kraft $F_2 = p_2 A = (p_1 + dp) A$. Die resultierende Kraft ist also $F = F_1 - F_2 = -dp A$. Diese Kraft erteilt dem Gas im Volumenelement mit der Masse $dm = \rho dV = \rho A dx$ die Beschleunigung d^2s/dt^2 , also ist nach dem zweiten 2. Newtonschen Axiom

$$-dp A = \rho A dx (d^2s/dt^2) \quad \text{oder} \quad -dp/dx = \rho (d^2s/dt^2) \quad (5.71)$$

Die Beschleunigung d^2s/dt^2 erhält man aus der Wellengleichung (5.46) durch zweimaliges Differenzieren nach der Zeit: $d^2s/dt^2 = (4\pi^2/T^2) \hat{s} \sin 2\pi (t/T - x/\lambda)$ und damit aus Gl. (5.71)

$$\frac{dp}{dx} = \frac{4\pi^2}{T^2} \rho \hat{s} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

Als Lösung hierfür ergibt sich nach einfacher Integration der Verlauf des Gesamtdruckes

$$p_{\text{ges}} = p_0 + \frac{2\pi}{T^2} \rho \lambda \hat{s} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

wovon man sich durch Differenzieren und Wiedereinsetzen leicht überzeugen kann. Der Faktor vor dem Kosinus, die Amplitude, lässt sich mit $2\pi/T = \omega$ und $\lambda/T = c$ noch vereinfachen. Es ist die

Schalldruckamplitude

$$\hat{p} = \rho c \omega \hat{s} \quad (5.72)$$

Die Wellengleichung einer eindimensionalen und einer ebenen Welle mit dem Schalldruck als Schwingungsgröße lautet somit

$$p = \hat{p} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \quad (5.73)$$

Nach Gl. (5.13) ist $\omega \hat{s} = \hat{v}$ (\hat{v} ist die Geschwindigkeitsamplitude oder maximale Schnelle, hier „maximale Schallschnelle“). Damit wird aus Gl. (5.72)

$$\hat{p}/\hat{v} = \rho c \quad (5.74)$$

d.h. der in Abschn. 5.2.2.4 eingeführte Wellenwiderstand $Z = \rho c$ ist gleich dem Quotienten aus Schalldruckamplitude und maximaler Schallschnelle.

Gl. (5.52) bis (5.56) gelten natürlich auch für die Schallwellen. Meist interessiert die Schallgeschwindigkeit in Gasen nach Gl.

(5.56): $c = \sqrt{\kappa p/\rho}$. Setzt man hier Gl. (2.18) $p/\rho = R_S T$ ein, so erhält man die

Temperaturabhängigkeit der Schallgeschwindigkeit (in einem idealen Gas):

$$c = \sqrt{\kappa R_S T}$$

Einige Schallgeschwindigkeiten sind in Tafel 5.49 aufgeführt.

Schallstrahlungsdruck. Der Druck, den eine Schallwelle auf eine Wand ausübt, besteht nicht nur aus dem Schalldruck p , der periodisch schwankt, z.B. nach Gl. (5.73) sinusförmig, sondern auch noch aus dem Strahlungsdruck nach Abschn. 5.2.5.2, jedenfalls wenn die Wand absorbiert oder reflektiert. Dieser Strahlungsdruck ist wohlgemerkt ein Gleichdruck! Man nennt ihn hier speziell Schallstrahlungsdruck. Aus Gl. (5.72) ergibt sich mit Gl. (5.70)

$$p_R = \hat{p}^2/(\rho c^2) \quad \text{für den Fall vollständiger Reflexion}$$

und bei vollständiger Absorption halb so viel (s. Aufgabe 4 zu Abschn. 5.2.3 bis 5.2.5).

Tafel 5.49 Schallgeschwindigkeiten in m/s

Luft (0 °C)	331
Kohlendioxid (0 °C)	258
Wasser (20 °C)	1415
Stahl	5000
Glas	5500
Ziegelmauer	3500

Schallmessung

Die Schallmessung erfolgt heute praktisch immer elektrisch mit sog. „Schallpegelmessern“. Als Empfänger dient dabei ein Mikrofon. Dieses besteht immer aus einer dünnen elastischen Fläche, der sog. Membran, die von der Schallwelle zu erzwungenen Schwingungen angeregt wird. Daran schließt sich eine Anordnung zur Umwandlung von mechanischer Schwingungsenergie in elektrische an (vgl. Abschn. 3.1.3.3 und 3.3.8.1). Die so entstehenden elektrischen Schwingungen werden elektronisch verstärkt, gleichgerichtet und auf einem Messinstrument angezeigt.

Die einfachste Schallgröße, die auf diese Weise gemessen werden kann, ist die Schalldruckamplitude \hat{p} . Die entsprechenden Skalen der Anzeigeeinstrumente sind meist (noch in μbar) oder Pa geeicht.

Außerdem werden noch die im Folgenden definierten Schallgrößen verwendet.

Schallintensität. Für die Intensität (Energiestromdichte) von Schallwellen gilt natürlich auch Gl. (5.66): $S = (1/2)\rho c\omega^2\hat{s}^2 = (1/2)\rho c\hat{v}^2$. Mit Gl. (5.72) erhält man daraus die

$$\text{Schallintensität } S = \frac{1}{2} \frac{\hat{p}^2}{\rho c} \quad \text{oder mit Gl. (5.74)} \quad S = \frac{1}{2} \hat{p} \hat{v} \quad (5.75)$$

Nach Gl. (5.75) kann also die Schallintensität S für einen bestimmten Wellenwiderstand $Z = \rho c$ (z.B. in Luft $Z \approx 414 \text{ kg}/(\text{m}^2 \text{ s})$) gleichzeitig mit der Schalldruckamplitude \hat{p} angezeigt werden, wenn das Anzeigeeinstrument des „Schallpegelmessers“ eine entsprechend kalibrierte zweite Skala hat (meist in W/m^2).

Schallpegel. Die in der Praxis vorkommenden Schallintensitäten liegen meist zwischen etwa $10^{-12} \text{ W}/\text{m}^2$ und $10 \text{ W}/\text{m}^2$, überdecken also 13 Zehnerpotenzen. Um diesen Bereich zusammenzudrängen und handlichere Zahlen zu erhalten, führt man als relatives Intensitätsmaß einen „Schallpegel“ ein:

Definition: Der Schallpegel L ist der 10fache dekadische Logarithmus vom Verhältnis der Schallintensität S zu einer festen „Bezugsschallintensität“ $S_0 = 10^{-12} \text{ W}/\text{m}^2$.

$$L = 10 \lg \frac{S}{S_0} \quad ^1) \quad (5.76)$$

Die dimensionslosen Zahlenwerte für L erhalten einen Namen, nämlich Dezibel, dessen Abkürzung dB wie ein Einheitensymbol hinter die Zahl geschrieben wird, z.B. $L = 15 \text{ dB}$; 26 dB . Diese Schreib- und Bezeichnungsweise ist ganz analog der in der Hochfrequenzmesstechnik, z.B. für Verstärkung, üblichen.

¹⁾ Hätte man den Faktor 10 nicht in diese Definition eingeführt, kämen als Werte für L die Zahlen 0; 1; 2; ...; 12; 13 vor. Zwischenwerte müssten, wie bei allen Zahlen im Dezimalsystem üblich, durch Zehntel nach dem Komma geschrieben werden, also z.B. 1,5; 2,6; ... Eine feinere Unterteilung ist in der Praxis selten notwendig. Der Faktor 10 erweitert nun den Bereich auf 0...130, macht also das Komma für die Zwischenwerte überflüssig.

Setzt man S aus Gl. (5.75) in Gl. (5.76) ein, so erhält man außerdem für den

Schallpegel

$$L = 20 \lg \frac{\hat{p}}{\hat{p}_0}$$

mit der „Bezugsschalldruckamplitude“ $\hat{p}_0 = \sqrt{2S_0 \rho c}$, für Luft bei Normbedingungen $\approx 2,8 \cdot 10^{-10} \text{ bar}^1$.

Die „Schallpegelmesser“ sind meist für Luft ($Z = 414 \text{ kg}/(\text{m}^2 \text{ s})$) kalibriert.

Aus der Definition des Schallpegels ergibt sich, dass bei Verdoppelung der Intensität der Schallpegel um etwa 3 dB steigt ($\lg 2 = 0,3010$). Eine Verdoppelung der Schalldruckamplitude dagegen erhöht den Schallpegel um etwa 6 dB.

Lautstärkepegel. Da die Schallwellen einen der wichtigsten menschlichen Sinne, das Gehör, ansprechen, genügt es häufig nicht, die physikalischen Größen Schallintensität oder Schallpegel zu messen. Man braucht vielmehr eine Größe, die angibt, wie laut der Schall empfunden wird. Diese Größe muss zwar von der Intensität abhängen, aber dazu noch berücksichtigen, dass das Ohr Wellen verschiedener Frequenz, aber gleicher Intensität verschieden laut empfindet. Diese Größe heißt Lautstärkepegel L_S .

Definition: Der Lautstärkepegel $L_{S\ 1000}$, den eine Schallwelle mit der Frequenz 1000 Hz hervorruft, ist gleich dem Schallpegel L dieser Welle

$$L_{S\ 1000} = L$$

Der Lautstärkepegel L_S einer Welle mit anderer Frequenz wird durch subjektiven Vergleich mit einer 1000 Hz-Welle bestimmt.

Man erzeugt gleichzeitig oder abwechselnd mit dem Schall, dessen Lautstärkepegel zu messen ist, einen 1000 Hz-Ton mit messbar veränderlichem Lautstärkepegel (= Schallpegel) und verändert diesen so lange, bis eine oder mehrere Personen die beiden Töne als gleich laut bezeichnen. Dann haben die beiden Töne gleichen Lautstärkepegel (im Allgemeinen aber verschiedene Schallpegel L).

Nach dieser Definition ist also der Lautstärkepegel eine dimensionslose Zahl wie der Schallpegel. Er erhält ebenfalls einen Namen – phon – der wie ein Einheitensymbol hinter die Zahl geschrieben wird, z.B. Lautstärkepegel $L_S = 26 \text{ phon}$. Das menschliche Gehör kann Unterschiede im Lautstärkepegel $\Delta L_S \approx 1 \text{ phon}$ gerade noch wahrnehmen²⁾.

Stellt man bei der obigen Vergleichsmessung auch noch den Schallpegel der unbekanntenen Schallwelle fest, so hat man eine Zuordnung zwischen L und L_S , also die Empfindlichkeit des Gehörs für diese eine Frequenz und diesen einen Schallpegel. Für alle anderen Werte muss die Vergleichsmessung wiederholt werden. Bild 5.50 zeigt das Ergebnis solcher

¹⁾ Entsprechend ist der Effektivwert des Bezugsschalldrucks $\hat{p}_0/\sqrt{2} = 2 \cdot 10^{-10} \text{ bar}$.

²⁾ Die Aussage, einer Zunahme des Lautstärkepegels um 3 phon entspräche eine Verdoppelung des Lautstärkeindrucks, ist physikalisch nicht sinnvoll, weil sie sehr subjektiv ist.

Messungen. Es sind Kurven gleicher Lautstärkepegel. Jede von ihnen gibt an, wie hoch der Schallpegel L einer Schallwelle in Abhängigkeit von der Frequenz f sein muss, damit immer derjenige Lautstärkepegel L_S (in phon) empfunden wird, der an der Kurve steht.

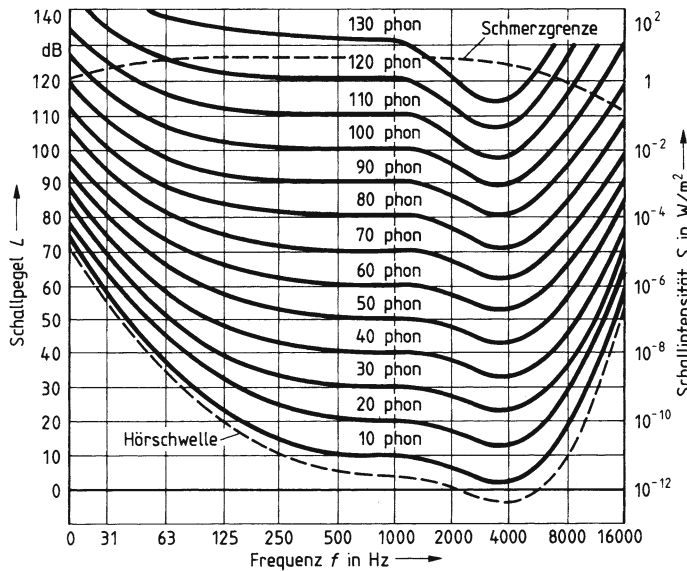


Bild 5.50 Empfindlichkeitskurven des menschlichen Gehörs

Der Wert dieser Kurvenschar (Bild 5.50) liegt darin, dass nun die oben erwähnte Vergleichsmessung einer sinusförmigen Schallwelle mit einem 1000 Hz-Ton nicht bei jeder „Phonmessung“ durchgeführt werden muss. Man bestimmt nur die Frequenz und den Schallpegel und entnimmt aus der Kurvenschar den Lautstärkepegel.

Leider ist das bei nichtsinusförmigem Schall, also Schall mit verschiedenen Frequenzen, nicht möglich. Auch die subjektive Vergleichsmessung ist dabei oft sehr schwierig. Daher begnügt man sich praktisch meist mit der Messung einer einfacheren Größe:

Bewerteter Schallpegel

Dazu enthalten die Schallpegelmesser meist drei verschiedene, wahlweise einschaltbare, frequenzabhängige Glieder, Schaltkreise aus Widerständen (R) und Kondensatoren (C), sog. R - C -Netzwerke, die dem Messgerät ungefähr die gleiche Empfindlichkeit geben wie die des Gehörs.

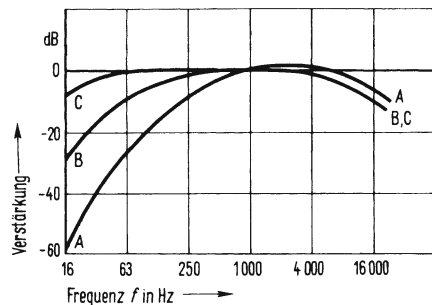


Bild 5.51 Bewertungskurven nach DIN 45633

Die Messung erfolgt etwa folgendermaßen: Die einzelnen, vom Mikrofon aufgenommenen sinusförmigen Komponenten eines Kluges, Geräusches o.ä. werden je nach ihrer Frequenz durch das jeweils eingeschaltete R - C -Netzwerk verschieden stark abgeschwächt, dann gemeinsam verstärkt und daraus ein mittlerer Schallpegel gebildet. Dieser wird auf einer entsprechend beschrifteten Skala als bewerteter Schallpegel in dB angezeigt. Bild 5.51 zeigt

die drei sog. Bewertungskurven A, B und C nach DIN 45 633; es sind die Frequenzgänge, die die R-C-Netzwerke der Schallpegelmesser haben sollen. Meistens wird nach Kurve A gemessen.

Die Kurve B soll verwendet werden, wenn man die Lautstärkeempfindung von sinusförmigem Schall oberhalb 60 dB annähern will. Nach Kurve C misst man, wenn die Lautstärkeempfindung von sinusförmigem Schall oberhalb 100 dB angenähert werden soll, oder wenn es sich um Schallwellen in Festkörpern (Körperschall) handelt. Das Formelzeichen für den bewerteten Schallpegel ist L_A , L_B oder L_C je nach der verwendeten Kurve (also z.B. $L_A = 26$ dB; oder auch 26 dB (A)).

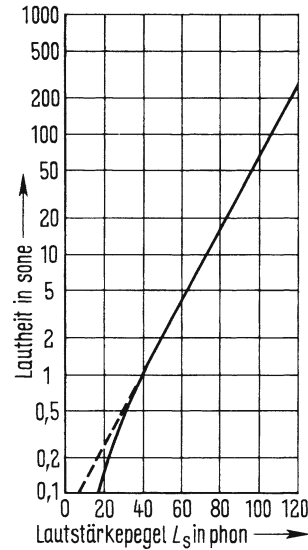


Bild 5.52 Lautheit und Lautstärke

Lautheit

Gelegentlich wird auch noch eine weitere Größe zur quantitativen Beschreibung des Gehöreindrucks benutzt, die Lautheit. Ihr Zusammenhang mit dem Lautstärkepegel L_S ist Bild 5.52 zu entnehmen. Wie man sieht, wird hier im Wesentlichen die logarithmische Größe L_S delogarithmiert. Die so entstehende ebenfalls dimensionslose Zahl erhält den Namen sone.

Schalldämmung

Zur Abschwächung von Schallwellen, z.B. zur Lärmbekämpfung, dienen Wände aus schallabsorbierendem und -reflektierendem Material, wie z.B. Glas- und Gesteinswollmatten, Kunststoffschäumplatten, Faserplatten, aber auch einfache Holzwände oder Steinmauern. Als Maß für den Erfolg der Abschwächung gibt man die Differenz der Schallpegel vor der Dämmwand L_1 und hinter der Dämmwand L_2

$$\Delta L = L_1 - L_2$$

an. Mit Gl. (5.76) erhält man dafür

$$\Delta L = 10 \lg \frac{S_1}{S_2} \quad ^1) \quad (5.77)$$

Ultraschall

Mechanische Wellen mit Frequenzen über 20 kHz sind – wie schon erwähnt – für Menschen unhörbar und werden Ultraschall, oder ab etwa 10^9 Hz Hyperschall genannt. Die obere Frequenzgrenze für mechanische Wellen ist etwa 10^{12} Hz, weil die zugehörigen Wellenlängen dann kleiner als die Molekülabstände werden.

Ultraschallwellen werden heute fast immer elektrisch erzeugt. Zu diesem Zweck wird in einem Sender eine elektromagnetische Schwingung, meist mit einer Frequenz von einigen

¹⁾ Näheres hierüber, z.B. über Schalldämmmaß, s. [29].

100 kHz, erzeugt, piezoelektrisch oder magnetostruktiv (vgl. Abschn. 3.1.3.3 und 3.3.5.4) in eine mechanische Schwingung umgewandelt und als Welle abgestrahlt.

Anwendungen. Die meisten Anwendungen des Ultraschalls beruhen auf den hohen Beschleunigungen (und damit den großen Kräften), die im Schallfeld auch bei relativ geringer Leistung auftreten, da diese proportional ω^2 sind. Technisch angewandt wird Ultraschall z.B. zur Herstellung oder Verbesserung von Emulsionen (= feinste Verteilung einer Flüssigkeit in einer anderen, mit der ersten nicht mischbaren), zur Erzeugung oder Aufrechterhaltung von Dispersionen (= feinste Verteilung von Feststoffen in Flüssigkeiten), zur Reinigung von Werkstücken oder Textilien von öligen oder festen Verschmutzungen, indem diese in einer umgebenden Flüssigkeit emulgiert oder dispergiert werden, zur Einleitung oder Beschleunigung von chemischen Reaktionen, zum Entgasen von Flüssigkeiten, zur Erwärmung und Trocknung von schallabsorbierenden Stoffen, zum Bohren, Fräsen und Schneiden kleinster Teile (z.B. Zerteilen von Halbleiterscheiben), zum Auffinden von Fehlern im Innern von Werkstoffen, z.B. Gießlunkern, Rissen oder Schweißfehlern („zerstörungsfreie Werkstoffprüfung“). Die Möglichkeit schärferer Richtungsbündelung führte zu wesentlichen Verbesserungen von Echoloten. Medizinisch dient Ultraschall z.B. zur örtlichen Erwärmung von Körpergewebe und zur Diagnostik.

5.2.5.4 Freie elektromagnetische Wellen

Die Überlegungen und Aussagen über eindimensionale elektromagnetische Wellen in Abschn. 5.2.1.2, 5.2.2.3 und 5.2.2.4 lassen sich nicht ohne weiteres ins Dreidimensionale erweitern, weil hier praktisch nur die Wellen im kontinuierlichen Medium und im Vakuum interessieren.

Ihre Existenz sagte bereits J. C. Maxwell auf Grund der nach ihm benannten Theorie der elektromagnetischen Induktion (vgl. Abschn. 3.3.6) folgendermaßen voraus:

Wenn sich an irgend einem Ort ein elektrisches Feld zeitlich ändert, entsteht ein Magnetfeld, das das elektrische umfasst und selbst zeitlich veränderlich ist. Als Folge davon entsteht wieder ein elektrisches Feld, das das magnetische umfasst, selbst zeitlich veränderlich ist usw. Im Prinzip das Gleiche geschieht, wenn das primäre veränderliche Feld ein magnetisches ist. Die primäre „Störung“ breitet sich also durch die „Verkettung“ der elektrischen und magnetischen Felder im Raum aus, ähnlich wie sich eine Verformung in einem elastischen Medium ausbreitet. Wir erhalten so eine freie elektromagnetische Welle. Aus den Maxwellschen Gleichungen (s. Abschn. 3.3.6) ergibt sich Folgendes:

Phasengeschwindigkeit und Wellengleichung

Angenommen, wir haben ein zeitlich und örtlich veränderliches magnetisches Feld $\vec{B} = \vec{B}(x; t)$ und ein ebensolches elektrisches Feld $\vec{E} = \vec{E}(x; t)$. Beide stehen immer senkrecht aufeinander. Der Einfachheit halber soll \vec{B} überall die Richtung der positiven y -Achse, \vec{E} überall die der positiven z -Achse haben; beide Felder sollen sich örtlich nur in x -Richtung ändern. In Bild 5.53a sind die magnetischen Feldlinien nur in der x - y -Ebene gezeichnet, in allen dazu parallelen Ebenen muss man sich das Feldlinienbild wiederholen denken. Das Gleiche gilt für die nur in der x - z -Ebene gezeichneten elektrischen Feldlinien. Wie üblich, soll der Abstand der Feldlinien ein relatives Maß für den Betrag sowohl von \vec{B} als auch von \vec{E} sein. Diese Beträge sind in Bild 5.53b über der gleichen x -Achse grafisch dargestellt. Wohl-gemerkt, alle drei Bilder sind Momentaufnahmen, die nichts über die zeitliche Änderung der beiden Felder aussagen. Wir wollen uns auch vorerst keine Gedanken darüber machen, ob das elektrische Feld durch Induktion aus der Änderung des magnetischen Feldes entstanden ist, oder umgekehrt (s. jedoch hierzu unten den Text zu Bild 5.57), sondern wollen auf diese geometrisch möglichst einfach konstruierten Felder die Maxwellschen

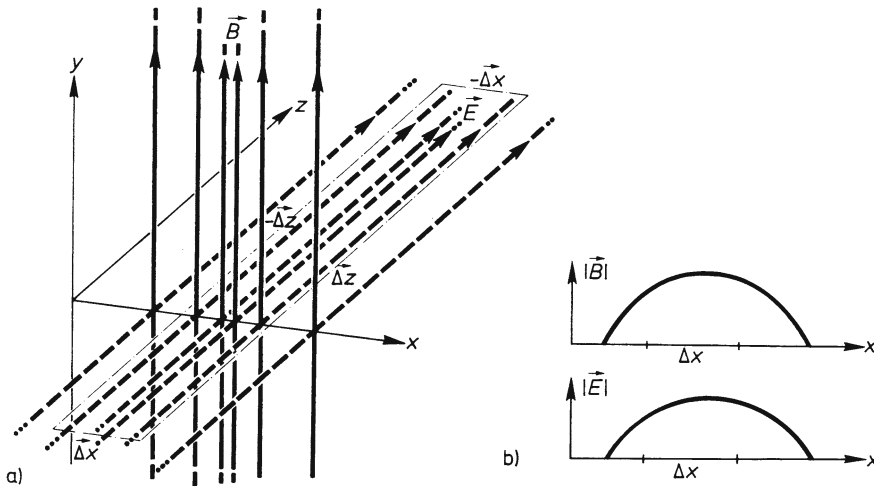


Bild 5.53 Zur Integration der II. Maxwell'schen Gleichung

Gleichungen (3.97) und (3.99) anwenden. Dazu ist in Bild 5.53a zwischen x und $x + \Delta x$ eine Fläche A in der x - z -Ebene eingezeichnet, die durch eine geschlossene Figur, nämlich das strichpunktierte Rechteck, begrenzt wird. Damit können wir nun die linke Seite der II. Maxwell'schen Gleichung (3.97)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A B_N dA \quad (5.78)$$

integrieren: Die Wegelemente $d\vec{s}$ sind hier nur die vier Rechteckseiten $\Delta\vec{x}$; $\Delta\vec{z}$; $-\Delta\vec{x}$ und $-\Delta\vec{z}$. Von ihren skalaren Produkten mit der x -abhängigen Feldstärke $\vec{E} = \vec{E}(x)$ sind zwei gleich null, weil $\Delta\vec{x}$ und $-\Delta\vec{x}$ senkrecht auf \vec{E} stehen, die beiden anderen sind $-\Delta\vec{z} \vec{E}(x)$ und $+\Delta\vec{z} \vec{E}(x + \Delta x)$; ihre Summe ist bereits die linke Seite von Gl. (5.78). Auf deren rechter Seite ist die Integrationsfläche $A = \Delta x \Delta z$ und, da \vec{B} überall senkrecht auf A steht, ist $B_N = B^1$. Wenn wir außerdem annehmen, dass \vec{B} in A konstant ist, was natürlich nur stimmt, wenn Δx gegen 0 geht (s. unten), so wird das Integral der rechten Seite einfach $B \Delta x \Delta z$. Damit vereinfacht sich Gl. (5.78) zu

$$[E(x + \Delta x) - E(x)] \Delta z = -\frac{\partial B}{\partial t} \Delta x \Delta z$$

Division durch $\Delta x \Delta z$ ergibt links den Differenzenquotienten

$$\frac{E(x + \Delta x) - E(x)}{\Delta x} = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (5.79)$$

und die oben schon angekündigte Grenzwertbildung $\Delta x \rightarrow 0$, die ja die rechte Seite von Gl. (5.79) nicht mehr berührt, liefert schließlich:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (5.80)$$

¹⁾ Man beachte den rechtswendigen Zusammenhang zwischen dem Umlaufsinn der Fläche A und der Richtung der Flächennormalen.

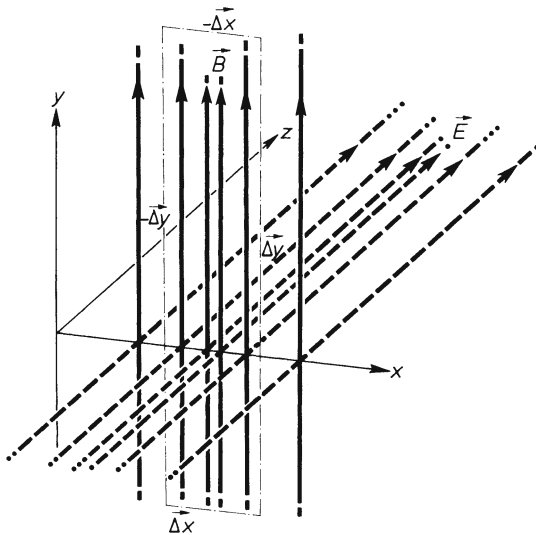


Bild 5.54 Zur Integration der I. Maxwell'schen Gleichung

Das ist die II. Maxwell'sche Gleichung speziell für den hier vorliegenden Fall. Sie beschreibt den einfachen Zusammenhang zwischen der Zeitabhängigkeit der magnetischen Induktion B und der Ortsabhängigkeit der elektrischen Feldstärke E .

In Bild 5.54 sind die gleichen Felder wie in Bild 5.53a auf die gleiche Weise dargestellt¹⁾. Nur liegt jetzt die Fläche A in der x - y -Ebene und hat die Seiten $\Delta\vec{x}$, $-\Delta\vec{x}$, $\Delta\vec{y}$ und $-\Delta\vec{y}$ ²⁾. Die I. Maxwell'sche Gleichung (3.99) für den Fall $I = 0$ (d.h. keine Leitfähigkeit) lautet

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \int D_N dA$$

und kann dann in ganz analoger Weise wie oben integriert werden, und man erhält wegen $D = \epsilon_0 E_0$ entsprechend

$$\frac{\partial B}{\partial x} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t} \quad (5.81)$$

Um nun Gl. (5.80) und (5.81), die jede alle 4 Variablen enthält, zu entflechten, kann man entweder die erste nach x und die zweite nach t differenzieren oder umgekehrt. Im ersten Fall bekommt man

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 B}{\partial t \partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 B}{\partial x \partial t} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad (5.82)$$

im zweiten Fall

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t \partial x} \quad (5.83)$$

Berücksichtigt man in beiden Fällen noch, dass wegen der Stetigkeit der Funktionen $\vec{E}(x; t)$ und $\vec{B}(x; t)$ die Reihenfolge der Differenziation gleichgültig ist, d.h. $\partial/(\partial x \partial t) = \partial/(\partial t \partial x)$, so kann man die Gleichungen (5.82) in der Form

$$\partial^2 E / \partial x^2 = \epsilon_0 \mu_0 (\partial^2 E / \partial t^2)$$

und die Gleichungen (5.83) in der Form

$$\partial^2 B / \partial x^2 = \epsilon_0 \mu_0 (\partial^2 B / \partial t^2)$$

¹⁾ $|\vec{B}|$ und $|\vec{E}|$ über x wie in Bild 5.53b

²⁾ s. Fußnote 1) auf der vorhergehenden Seite

³⁾ Das Minuszeichen rührt hier davon her, dass wegen des gewählten mathematisch positiven Umlaufsinns des Linienintegrals die Flächennormale entgegengesetzt zu \vec{E} gerichtet ist.

schreiben, wodurch die Variablen B und E getrennt sind. Diese beiden letzten Gleichungen sagen formal aus, dass die zweifache Ableitung einer Größe nach der Zeit der zweifachen Ableitung derselben Größe nach dem Ort proportional ist. In Abschn. 5.2.2.3 wird gezeigt, daß 1. genau dies die Differentialgleichung einer Welle ist, daß 2. deren allgemeine Lösung die Wellengleichung der Form (s. Gl. (5.51))

$$y = g\left(t \pm \frac{x}{c}\right);$$

ist, daß 3. eine Sinuswelle ein Spezialfall hiervon ist, und daß 4. die Proportionalitätskonstante der Differentialgleichung gleich dem Quadrat des Kehrwertes der Phasengeschwindigkeit c ist. Hierher auf unseren Fall übertragen, heißt das:

Jede zeitliche Änderung („Störung“) der magnetischen Induktion \vec{B} oder der elektrischen Feldstärke \vec{E} breitet sich als sog. elektromagnetische Welle räumlich aus. Speziell eine sinusförmige „Störung“ mit konstanten Feldvektoren in der y - z -Ebene¹⁾ ergibt eine ebene Sinuswelle mit den Wellengleichungen

$$\vec{E} = \vec{\hat{E}} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \quad \text{und} \quad \vec{B} = \vec{\hat{B}} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

oder auch, mit $B = \mu_r \mu_0 H$ und $\hat{B} = \mu_r \mu_0 \hat{H}$

$$\vec{H} = \vec{\hat{H}} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \quad (5.84)$$

Für die Phasengeschwindigkeit im Vakuum und in jedem Medium mit $\mu_r = \epsilon_r = 1$ ergibt sich

$$c_0 = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}}$$

und mit $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$ und $\mu_0 = 1,256 \cdot 10^{-6} \text{ Vs/Am}$

$$c_0 = 2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Dieser Wert entspricht genau der Vakuumlichtgeschwindigkeit (vgl. Abschn. 4.3). In Medien mit $\epsilon_r > 1$ oder $\mu_r > 1$ lässt sich in entsprechender Weise zeigen, dass die Phasengeschwindigkeit

$$c_0 = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_r \epsilon_0 \mu_r \mu_0}} \quad (5.85)$$

ist.

Wellenausbreitung. Im Jahre 1888, also 23 Jahre, nachdem Maxwell seine Theorie entwickelt und die elektromagnetischen Wellen vorausgesagt hatte, gelang es Heinrich Hertz (1857 bis 1894), sie experimentell nachzuweisen.

Zur Erzeugung der primären, periodisch wechselnden Felder benützt man – als sog. Antenne – z.B. einen „linearen Hertzschen Oszillator“, heute kurz Senderdipol genannt.

¹⁾ Vgl. die Beschreibung der Felder am Anfang dieses Abschn. „Phasengeschwindigkeit und Wellengleichung“.

Seine Wirkungsweise lässt sich folgendermaßen verstehen: Bild 5.55a zeigt eine am rechten Ende offene Doppelleitung, die von links durch einen Sender gespeist wird (vgl. Bild 5.45). Wenn die Länge der Leitung ein ungeradzahliges Vielfaches von $\lambda/4$ ist, bildet sich eine stehende Welle aus, d.h. die Leitung ist in Resonanz. Für den einfachsten Fall, $l = \lambda/4$, ist das maximale elektrische Feld (Schwingungsbauch am rechten Ende) eingezeichnet. Denkt man sich die beiden Drähte der Leitung auseinandergebogen (Bild 5.55b, so erhält man den „linearen Hertzschen Oszillator“. Auf ihm können sich weiterhin stehende Wellen ausbilden¹⁾. Bild 5.55b zeigt das maximale elektrische Feld (Bauch außen, Knoten in der Mitte). Es ist dem eines elektrischen Dipols ähnlich (vgl. Bild 3.3), nur sitzen hier die Ladungen nicht nur an den Enden. Eine Viertelperiode später ist das elektrische Feld verschwunden und dafür das magnetische aufgebaut (Bauch in der Mitte, Bild 5.55c). Dieses ähnelt dem eines stromdurchflossenen Leiters, nur ist hier der Strom nicht auf der ganzen Länge konstant, sondern in der Mitte am stärksten (vgl. hierzu auch Abschn. 5.1.3.4). Beide Felder ändern sich sinusförmig mit der Zeit, gegeneinander um $\pi/2$ phasenverschoben. Die elektrische Feldstärke und die magnetische Erregung nehmen mit dem Quadrat des Abstandes x vom Senderdipol ab (vgl. z.B. das Biot-Savartsche Gesetz Abschn. 3.3.2.1). Dadurch sind sie nur im sog. Nahbereich wirksam (s. aber unten).

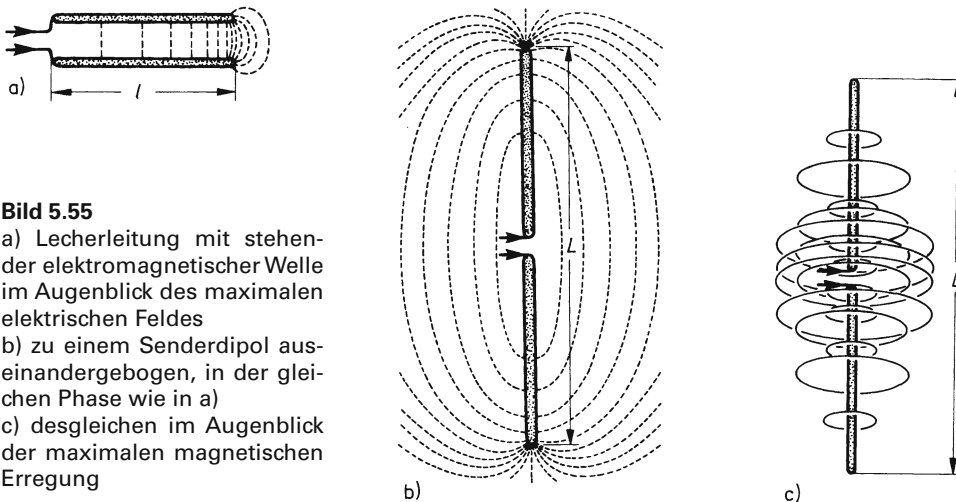


Bild 5.55

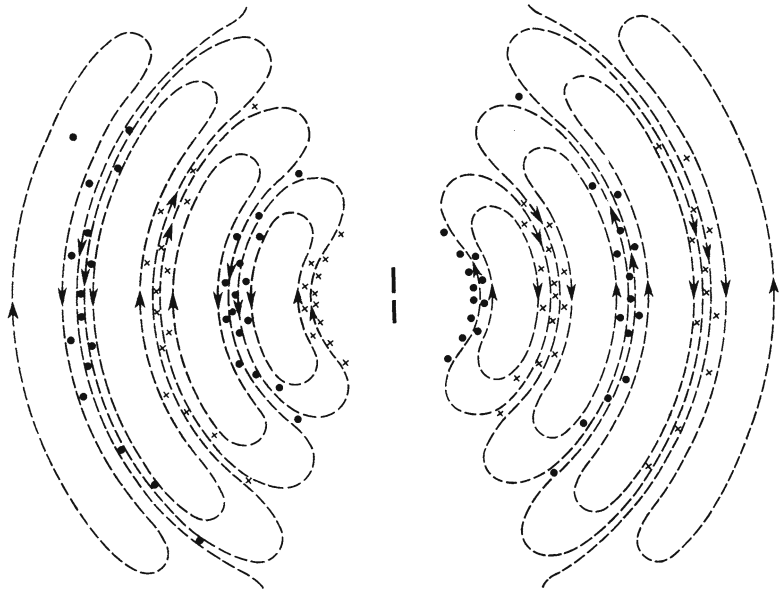
- Lecherleitung mit stehender elektromagnetischer Welle im Augenblick des maximalen elektrischen Feldes
- zu einem Senderdipol auseinandergebogen, in der gleichen Phase wie in a)
- desgleichen im Augenblick der maximalen magnetischen Erregung

Außerdem sind diese Wechselfelder aber die Quelle von freien elektromagnetischen Wellen, die sich nach dem oben beschriebenen Mechanismus der gegenseitigen induktiven Verketzung ausbreiten.

Zeichnerische Darstellung. Bild 5.56 ist eine Momentaufnahme einer solchen Welle. (Man denke sie sich durch Rotation um den in der Mitte gezeichneten Senderdipol als Rotationsachse räumlich ergänzt.) Die gestrichelten Linien sind die elektrischen Feldlinien, die Punkte und Kreuze markieren die Durchstoßpunkte der magnetischen Feldlinien durch die Zeichenebene. Es ist nur die Feldverteilung im sog. Fernbereich gezeichnet. (Im Nahbereich überlagern sich hierzu die oben beschriebenen Felder von Bild 5.55b und c).

¹⁾ Da sich beim Auseinanderbiegen die Kapazität pro Länge verringert, wird die Wellenlänge größer. Daher muss entweder die gestreckte Länge $L > 2l$ sein oder die Senderfrequenz erhöht werden.

Bild 5.56 Schnitt durch eine sich räumlich ausbreitende Welle. (---) elektrische Feldlinien; (•) magnetische Feldlinien senkrecht zur Zeichenebene von hinten nach vorne, (x) desgl. von vorne nach hinten.



Die genauere Verteilung der elektrischen Feldstärke \vec{E} zu einem bestimmten Zeitpunkt entlang einer Geraden x , die radial vom Senderdipol ausgeht, ist ausgezogen in Bild 5.57a gezeichnet. Punktiert und gestrichelt ist außerdem eingezeichnet, wie die Feldstärke \vec{E} ein kurzes Zeitintervall ∂t später entlang x verteilt ist. Man sieht, dass in dem ganzen punktierten Bereich, also von x_1 bis x_2 die Änderungen $f\vec{E}$ positiv sind (\uparrow), im gestrichelten Teil, also von x_2 bis x_3 dagegen negativ (\downarrow), und zwar jeweils in der Mitte eines jeden Bereichs absolut am größten, gegen die Bereichsgrenzen hin absolut kleiner. Das Gleiche gilt auch für den Quotienten $\partial\vec{E}/\partial t$, da hier ja ∂t ein bestimmtes positives Zeitintervall sein soll.

Nach Gl. (5.81) ist aber $\partial E/\partial t$ proportional $\partial B/\partial x$. Wir können uns also vorstellen, dass $\partial B/\partial x$ einen Verlauf hat, wie er im Teilbild b) über der gleichen x -Achse gezeichnet ist. Wenn der Verlauf von $E(x)$ in a) sinusförmig ist, ist die Kurve in b) cosinusförmig und folglich ergibt sich für den Verlauf der magnetischen Induktion $\vec{B} = \hat{B}(x)$ wieder eine sinusförmige Kurve wie im Teilbild c) gezeichnet.

Das heißt also, dass \hat{E} und \hat{B} im gleichen Zeitpunkt an den gleichen Stellen (hier z.B. x_1 ; x_2 ; x_3) ihre Extremwerte haben, also dass \vec{E} und \vec{B} in Phase sind. (Das wurde auch schon in Bild 5.53, 5.54 und 5.56 berücksichtigt.) Die Vorzeichen der Extremwerte spielen keine Rolle, da \hat{E} senkrecht zu \hat{B} ist. Geht man für die obige Über-

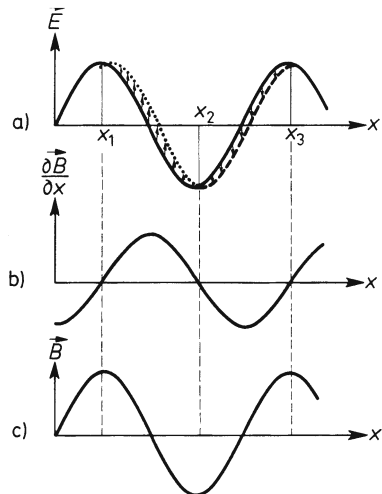


Bild 5.57 Zur Phasengleichheit des elektrischen und magnetischen Feldes im Fernbereich einer elektromagnetischen Welle

legung von einem sinusförmigen $\vec{B}(x)$ aus und benützt Gl. (5.80), so kommt man zum gleichen Ergebnis.

Wir fassen zusammen:

Elektromagnetische Wellen sind Querwellen, da die elektrischen und magnetischen Feldlinien senkrecht zur Ausbreitungsrichtung sind; außerdem stehen diese auch aufeinander senkrecht und sind im Fernbereich miteinander in Phase.

Intensität und Strahlungsdruck

Ebene Wellen liegen praktisch dann vor, wenn entweder eine Quelle sehr weit vom Empfangsort entfernt ist, oder wenn viele Senderdipole, die alle auf einer Ebene liegen, gleichphasig schwingen, oder wenn Kugelwellen durch Linsen oder Hohlspiegel (vgl. Abschn. 5.2.6, 4.1.1.2 und 4.1.2.3) zu ebenen verformt werden.

Die Energiedichte im elektrischen Feld ist nach Gl. (3.24) $w_e = (1/2) \epsilon_r \epsilon_0 E^2$, die im magnetischen Feld nach Gl. (3.88) $w_m = (1/2) \mu_r \mu_0 H^2$.

Hier im elektromagnetischen Wechselfeld steckt die Energie zur einen Hälfte im elektrischen, zur anderen Hälfte im magnetischen Feld. Die Gesamtenergiedichte ist also

$$w = w_e + w_m = 2w_e = 2w_m = \epsilon_r \epsilon_0 E^2 = \mu_r \mu_0 H^2 \quad (5.86)$$

Setzt man Gl. (5.84) in (5.86) ein, so erkennt man, dass die Energiedichte in einer elektromagnetischen Welle periodisch mit der Zeit schwankt ($\sin^2 \dots$). Meist interessiert jedoch der zeitliche Mittelwert der Energiedichte \bar{w} . Da der Mittelwert von \sin^2 immer 1/2 ist, wird

$$\bar{w} = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 \hat{E}^2 = \frac{1}{2} \mu_r \mu_0 \hat{H}^2$$

Die Intensität oder Energiestromdichte S erhält man daraus nach Gl. (5.67) durch Multiplikation mit der Phasengeschwindigkeit, also mit Gl. (5.85)

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_r \epsilon_0}{\mu_r \mu_0}} \hat{E}^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_r \mu_0}{\epsilon_r \epsilon_0}} \hat{H}^2 \quad (5.87)$$

Die Energie „strömt“ sozusagen in Richtung der Phasengeschwindigkeit, also senkrecht zu den Wellenfronten von \vec{E} und \vec{H} . Die Intensität, als Vektor betrachtet, wird häufig „Vektor der Energieströmung“ oder Poyntingscher¹⁾ Vektor \vec{S} genannt und lässt sich nach Gl. (5.87) und dem oben über die Richtung Gesagten auch schreiben als

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}$$

Kugelwellen. Die Aussagen in Abschn. 5.2.5.2 über mechanische Kugelwellen gelten sinngemäß auch für elektromagnetische, denn sie sind ja nur von der Geometrie der Welle abhängig. Wir können also auch hier sagen:

¹⁾ J. H. Poynting (1852 bis 1914).

Die Intensität einer elektromagnetischen Kugelwelle ist dem Quadrat des Abstandes vom Wellenzentrum umgekehrt proportional

$$S \sim 1/x^2$$

Wegen Gl. (5.87) gilt daher auch

Die Amplituden \hat{E} und \hat{H} der elektrischen Feldstärke bzw. der magnetischen Erregung sind dem Abstand vom Wellenzentrum umgekehrt proportional.

Die Wellengleichung einer elektromagnetischen Kugelwelle muss also einen Amplitudenfaktor haben, der proportional $1/x$ ist, ähnlich wie Gl. (5.68).

Ein Senderdipol strahlt in seiner Längsrichtung nicht aus (Bild 5.56). Aber auch in den übrigen Raum wird die Energie nicht gleichmäßig abgestrahlt. Zum Beispiel ist bei einer Anregung des Senderdipols wie in Bild 5.56 ($L = \lambda/2$) die Intensität proportional $\sin^2\Theta$, wo Θ der Winkel zwischen der Dipollängsachse und der betrachteten Ausstrahlungsrichtung ist. Bei anderen „Anregungsmodi“, z.B. wenn $L = \lambda$ ist, erhält man auch andere „Ausstrahlungscharakteristika“ d.h. andere Abhängigkeiten der Intensität vom Winkel Θ . Hierbei handelt es sich also nicht um Kugelwellen.

Strahlungsdruck. Trifft eine elektromagnetische Welle auf Materie mit mehr oder weniger beweglichen Ladungsträgern, so beobachtet man einerseits mikroskopisch mehr oder weniger starke Reflexion und Absorption der Welle. Andererseits geschieht atomar dabei Folgendes: Die Ladungsträger werden durch die elektrische Feldstärke \vec{E} in Bewegung gesetzt (\vec{v} senkrecht zu \vec{c}). Auf bewegte Ladungen wirkt aber die magnetische Induktion \vec{B} mit der Lorentzkraft nach Abschn. 3.3.3.2, und zwar senkrecht zu \vec{v} und \vec{B} , also in Richtung der Phasengeschwindigkeit \vec{c} . Das ergibt wiederum makroskopisch eine Kraft und einen Druck auf das absorbierende oder reflektierende Medium, den Strahlungsdruck, ganz analog zu dem mechanischer Wellen in Abschn. 5.2.5.2 und 5.2.5.3. Dort ist der Druck bei voller Reflexion $p_R = 2 S/c$, bei voller Absorption $p_A = S/c$. Analog erhalten wir hier mit Gl. (5.87) und (5.85)

$$p_R = \varepsilon_r \varepsilon_0 \hat{E}^2 = \mu_r \mu_0 \hat{H}^2; \quad p_A = \frac{1}{2} \varepsilon_r \varepsilon_0 \hat{E}^2 = \frac{1}{2} \mu_r \mu_0 \hat{H}^2$$

Dieser Druck ist zwar unter irdischen Verhältnissen meist recht klein und daher schwer messbar (erstmalig 1901 durch P. N. Lebedew), spielt aber in der Astrophysik eine wichtige Rolle. Der Strahlungsdruck, den das Sonnenlicht auf der Erde bei voller Absorption maximal erzeugt, ist beispielsweise $4,6 \cdot 10^{-6} \text{ N/m}^2$!

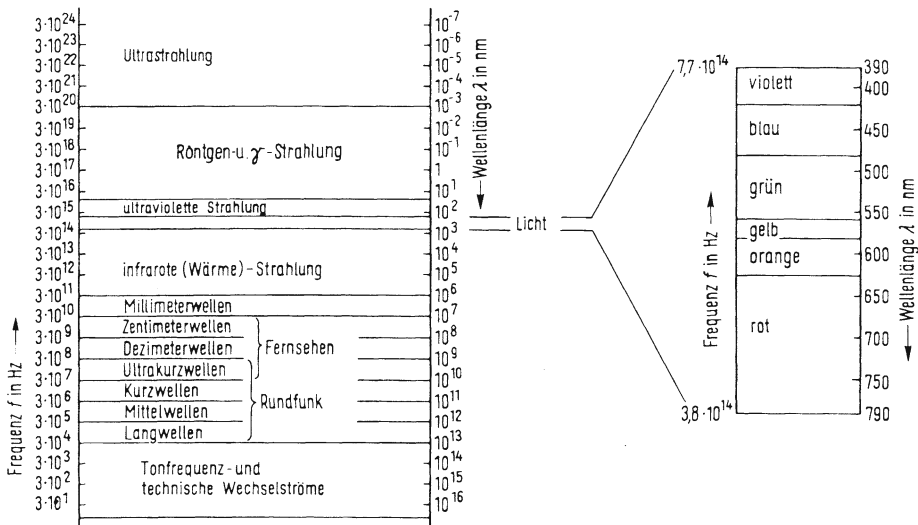
Die bekannten „Lichtmühlen“ nutzen daher auch nicht den Strahlungsdruck aus, sondern funktionieren durch unterschiedliche Erwärmung des Gases vor den spiegelnden und vor den geschwärzten Flächen.

5.2.5.5 Elektromagnetisches Gesamtspektrum

Die elektromagnetischen Wellen kommen mit Frequenzen zwischen einigen Hz und etwa 10^{24} Hz vor. Tafel 5.58 gibt einen Überblick über die wichtigsten Frequenzbereiche und die Namen, die die zugehörigen elektromagnetischen Wellen haben. Gleichzeitig ist auch eine Skala der Wellenlängen in Vakuum angegeben, da besonders ab etwa $3 \cdot 10^{11}$ Hz meistens mit diesen gerechnet wird.

Einige physikalisch interessierende Einzelheiten über die Entstehung oder Erzeugung, die Ausbreitung und den Empfang sollen im Folgenden aufgeführt werden.

Tafel 5.58



Radiowellen

Zur Erzeugung von Radiowellen müssen zunächst ungedämpfte elektromagnetische Schwingungen erzeugt, verstärkt und evtl. moduliert werden. Auf diese „Sendertechnik“ kann hier nicht weiter eingegangen werden. Das physikalisch Wesentliche der Abstrahlung und Ausbreitung von Radiowellen ist im vorigen Abschnitt behandelt. Zum Empfang von Radiowellen wird ausgenutzt, dass an jedem Ort, den diese erreichen, ein periodisch schwankendes elektrisches Feld \vec{E} und senkrecht dazu eine ebensolche magnetische Erregung \vec{H} herrscht. In jedem Leiter parallel zu \vec{E} entsteht daher eine Wechselspannung, in jeder Leiterschleife senkrecht zu \vec{H} wird ein Wechselstrom induziert. Diese Leiter nennt man Empfangsantennen. Die Ströme und Spannungen in ihnen können – wenn nötig frequenzselektiv – elektronisch verstärkt werden.

Anwendungen. Radiowellen dienen zum Übermitteln von Nachrichten, beim sog. Radar zum Orten von Flugzeugen, Gewitterwolken etc., in der Astronomie als eines der Mittel zur Erforschung des Weltraumes.

Infrarotstrahlung

Elektromagnetische Wellen im Frequenzbereich von $3 \cdot 10^{11}$ Hz bis $3,8 \cdot 10^{14}$ Hz (Wellenlängenbereich 1 mm bis 790 nm) nennt man Infrarotstrahlung, gelegentlich auch „Wärmestrahlen“. Ihre

Erzeugung durch Temperaturstrahler, z.B. durch sog. schwarze Körper, sowie ihre Absorption ist in Abschn. 2.6.3 beschrieben. Bild 5.59 zeigt die von Lummer¹⁾ und Pringsheim²⁾ an einem solchen schwarzen Strahler gemessene Strahlungsleistung dP pro Wellenlängenbereich $d\lambda$ in Abhängigkeit von der Wellenlänge λ und von der Temperatur T des Strahlers. Die asymptotische Annäherung dieser Kurven an die Abszisse bedeutet, dass

¹⁾ Otto Lummer (1860 bis 1925).

²⁾ Ernst Pringsheim (1859 bis 1917).

ein Temperaturstrahler Wellen aller Wellenlängen aussendet, die extrem kurz- und langwelligen allerdings mit sehr kleiner Leistung. Die Lage der Maxima der Kurven hängt folgendermaßen von der Temperatur ab:

Wiensches Verschiebungsgesetz: Die Wellenlänge λ_{\max} , die von einem schwarzen Strahler am intensivsten ausgestrahlt wird, ist der absoluten Temperatur des Strahlers umgekehrt proportional

$$\lambda_{\max} = \alpha/T \quad (5.88)$$

mit der Konstanten

$$\alpha = 2,89811 \cdot 10^{-3} \text{ m K.}$$

Die Abhängigkeit der Gesamtleistung – aufsummiert über alle Wellenlängen – von der Temperatur T wird durch das Stefan-Boltzmannsche Gesetz Gl. (2.55) $P_S = \sigma A T^4$ beschrieben.

Die theoretische Begründung für diese Strahlungscharakteristik liefert die Plancksche Theorie¹⁾, die hier nicht wiedergegeben werden kann. Ihr Ergebnis ist die

Plancksche Strahlungsformel: Ein schwarzer Strahler mit der Temperatur T und der Fläche A strahlt im Wellenbereich λ bis $\lambda + d\lambda$ in den Halbraum die Leistung

$$dP = \frac{4\pi hc_0^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc_0}{kT\lambda} - 1\right)} A d\lambda \quad (5.89)$$

aus, wobei $h = 6,625 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ die Plancksche Konstante (s. Abschn. 5.3), $c_0 = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ die Vakuumlichtgeschwindigkeit (s. Abschn. 4.3) und $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ die Boltzmannkonstante (s. Abschn. 2.2.3.2) ist.

Gl. (5.89) gibt die Kurven in Bild 5.59 genau wieder und enthält sowohl das Stefan-Boltzmannsche Gesetz (2.55) als auch das Wiensche Verschiebungsgesetz (5.88).

Empfang und Nachweis von Infrarotstrahlung kann so erfolgen, dass die Erwärmung gemessen wird, die ein geeigneter Körper erfährt, wenn er diese Strahlung absorbiert. Diese Methode ist zwar prinzipiell für alle Arten von Strahlung geeignet, jedoch ist in anderen Wellenlängenbereichen die Intensität selten groß genug dafür, oder es gibt bessere Nachweismethoden. Außerdem lässt sich kurzwelliges Infrarot fotoelektrisch und fotogra-

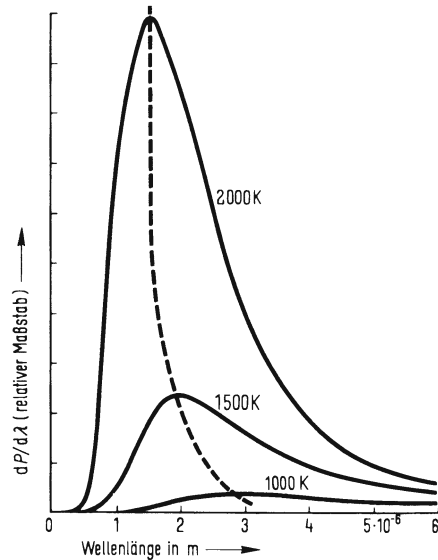


Bild 5.59 Spektrale Verteilung der Leistung der von einem schwarzen Körper abgestrahlten elektromagnetischen Wellen

¹⁾ Max Planck (1858 bis 1947, Nobelpreis 1918).

fisch nachweisen, wenn man besondere Fotokathoden, Fotodioden bzw. fotografische Schichten verwendet.

Anwendungen. Bei allen Arten von Heizung, Erwärmung etc. ist Infrarotstrahlung zu einem mehr oder weniger großen Teil beteiligt (s.a. Abschn. 2.6.3). Militärisch wird die Infrarotstrahlung heißer Körper entweder zu ihrer Ortung auch bei Dunkelheit ausgenützt, oder um sie mit infrarotsensiblen, automatisch gesteuerten Geschossen zu treffen. Lichtschranken, CD-Player, Alarmanlagen und Fernsteuerungen werden oft mit Infrarot betrieben. Da Infrarot von Nebel, Dunst und Wolken nicht nennenswert absorbiert wird, kann man damit durch Wolken hindurch fotografieren. Die meisten Laser (s. Abschn. 6.1.3.1), besonders die mit hohen Leistungen, arbeiten hauptsächlich im Infraroten. Die ganze Glasfasertechnik (vgl. Abschn. 4.1.2.1) ist „infrarot“, da hier die speziellen Gläser „Transmissionsfenster“ haben, d.h. bestimmte Frequenzen im Infraroten besonders verlustfrei transportieren.

Sichtbares Licht

Wenn in unser Auge elektromagnetische Wellen des verhältnismäßig schmalen Wellenlängenbereiches 790 nm bis 390 nm (Frequenzbereich $3,8 \cdot 10^{14}$ Hz bis $7,7 \cdot 10^{14}$ Hz) gelangen, empfinden wir einen Sinneseindruck: wir sehen Licht. Die Wellenlänge bestimmt den Eindruck der Farbe, die Intensität den Eindruck der Helligkeit.

Wellen mit Wellenlängen zwischen 790 und 630 nm werden als rot, zwischen 630 und 580 nm als orange, zwischen 580 und 560 nm als gelb, zwischen 560 und 480 nm als grün, zwischen 480 und 420 nm als blau, zwischen 420 und 390 nm als violett empfunden. Derartige Wellen werden meist kurz als „rotes“, „gelbes“, „grünes“, ... Licht bezeichnet (s.a. Anhang und Tafel 5.58). Diese Zuordnung Wellenlänge \rightarrow Farbeindruck ist nicht umkehrbar, da auch Gemische aus anderen Wellenlängen dieselben Farbeindrücke hervorrufen können.

Lichtquellen sind zum größten Teil Temperaturstrahler, genauso wie die Quellen für Infrarotstrahlung. Sie müssen nur eine genügend hohe Temperatur haben, damit ein nennenswerter Anteil ihrer Strahlung im sichtbaren Frequenzbereich emittiert wird. Das Licht der Sonne z.B. hat als intensivste Wellenlänge $\lambda_{\max} = 480$ nm, stammt also nach Gl. (5.88) aus einer Schicht, die 6000 K heiß ist. Licht dieser Zusammensetzung empfinden wir als „weiß“, solches aus weniger heißen – also mit größerem λ_{\max} – als „rötlich“, solches von heißeren Quellen als „bläulich“. Zur quantitativen Behandlung dieser Erscheinung – besonders in der Fotografie – dient die Farbtemperatur.

Definition: Die Farbtemperatur T_F eines Lichtes mit kontinuierlichem Spektrum ist diejenige Temperatur, die ein schwarzer Strahler haben müsste, damit sein Licht die gleiche intensivste Wellenlänge λ_{\max} nach Gl. (5.88) hätte wie das fragliche Licht.

Die prinzipiell andere Lichterzeugung bei Gasentladungen wird teilweise in Abschn. 3.2.6.2, teilweise in Abschn. 6.1 beschrieben. Hier im Zusammenhang ist wichtig, dass dabei Licht entsteht, das nur eine endliche Zahl von Frequenzen enthält, das also ein Linienspektrum hat im Gegensatz zum kontinuierlichen Spektrum (Bild 5.59) der Temperaturstrahler (s. die Spektraltafel im Anhang).

Empfang und Nachweis von sichtbarem Licht erfolgt im Prinzip mit den gleichen Methoden, die oben bei der Infrarotstrahlung aufgeführt sind. Allerdings werden hier Erwärmungsmessungen kaum angewandt. Dafür hat der fotografische Nachweis sehr große Bedeutung und auch fotoelektrische Methoden sind häufig. Außerdem sind unsere Augen hochempfindliche Empfänger (s. Abschn. 5.2.5.6).

Ultraviolette Strahlung

Elektromagnetische Wellen mit Wellenlängen zwischen 380 nm und etwa 10 nm (Frequenzbereich $7 \cdot 10^{14}$ Hz bis $3 \cdot 10^{16}$ Hz) nennt man ultraviolette Strahlung, kurz UV.

Erzeugung. Nach den Kurven in Bild 5.59 sendet jeder Temperaturstrahler auch UV aus. Allerdings sinkt die Intensität nach Überschreiten des Maximums sehr stark mit kleiner werdender Wellenlänge (etwa mit der 4. Potenz). Nennenswerte UV-Anteile erhält man daher nur von heißen Körpern, z.B. dem Krater eines Lichtbogens oder von der Sonne. Von praktischer Bedeutung für die technische UV-Erzeugung sind nur die Gasentladungen, insbesondere in Metall-, meist Quecksilberdampf.

Die meisten für sichtbares Licht durchlässigen Stoffe, wie z.B. normales Glas oder Kunststoffe, absorbieren UV mit Wellenlängen unter 350 nm sehr stark. Folglich müssen die Gefäße für die Gasentladungen aus Quarzglas (durchlässig bis ca. 200 nm) sein. Sie werden daher auch „Quarzlampen“ genannt. Linsen und Prismen zur optischen Behandlung von UV sind aus Quarz, Flussspat (bis 130 nm) oder Steinsalz (bis 100 nm). Unterhalb 130 nm absorbiert auch die Luft das UV sehr stark.

Empfang und Nachweis von ultravioletter Strahlung kann fotografisch und fotoelektrisch ebenso gut erfolgen wie bei sichtbarem Licht. Hinzu kommt die Möglichkeit, das Auftreffen von UV durch Fluoreszenz sichtbar zu machen¹⁾.

Anwendungen. UV-Bestrahlung der menschlichen Haut – teils mit Hg-Dampflampen – wird medizinisch und kosmetisch angewandt. Da UV Bakterien tötet oder bakterientötendes Ozon erzeugt, werden Hg-Dampflampen zum Entkeimen verwendet. Auch Leuchtstofflampen sind Hg-Dampflampen mit einer fluoreszierenden Schicht auf der Innenseite ihres Glasgefäßes, die das UV in sichtbares Licht umwandelt¹⁾. Das charakteristische Fluoreszenzleuchten vieler Stoffe bei Bestrahlung mit UV wird zum Nachweis dieser Stoffe ausgenützt („Fluoreszenzanalyse“).

Röntgen- und γ -Strahlung

Elektromagnetische Wellen mit Wellenlängen kürzer als etwa 15 nm und bis etwa 10^{-13} m²⁾ (Frequenzbereich 10^{16} Hz bis $3 \cdot 10^{21}$ Hz) heißen entweder Röntgenstrahlen (s. Abschn. 6.1.2.2) oder γ -Strahlen (s. Abschn. 6.2.1.1), je nach der Art ihrer Erzeugung bzw. Entstehung. Diese sowie ihr Nachweis werden in den zitierten Abschnitten behandelt.

Ultrastrahlung

Elektromagnetische Strahlung mit Wellenlängen unter 10^{-13} m (Frequenzen über 10^{22} Hz) nennt man Ultrastrahlung. Sie entsteht beim Zusammenstoß von sehr energiereichen Teilchen (z.B. Protonen, s. Abschn. 6.2) mit Atomen. Diese Hochenergieteilchen kommen entweder aus dem Weltraum, wobei nicht sicher bekannt ist, auf welche Weise sie dort auf diese hohen Energien gebracht werden, oder sie werden in den großen Beschleunigern (s. Abschn. 6.2.3.3) der modernen Kernforschungszentren auf diese Energien beschleunigt.

5.2.5.6 Fotometrische Größen

Bei der quantitativen Behandlung von sichtbarem Licht – der Fotometrie – ist man in einer ähnlichen Lage wie bei der Messung von Schall: Es interessieren häufig nicht die

¹⁾ s. Lumineszenz in Abschn. 7.5

²⁾ Bei den Röntgenstrahlen (im englischen Sprachgebiet „X-Strahlen“) sind außerdem die Ångström-Einheit (Å) und die X-Einheit (X) in Gebrauch. $1 \text{ Å} = 0,1 \text{ nm} = 10^{-10} \text{ m}$; $1 \text{ X} = 10^{-3} \text{ Å} = 10^{-13} \text{ m}$.

physikalischen Größen, sondern die Stärke des Sinneseindrucks, den diese über die Augen hervorrufen. Man definiert dazu einen Satz von Größen, die wir hier „physiologische Größen“ nennen wollen; um dies tun zu können, muss vorher noch eine physikalische Größe eingeführt werden, die Strahlstärke, nach folgender

Definition: Bei einer Kugelwelle, die von einer (näherungsweise) punktförmigen Quelle ausgeht, nennt man den Quotienten aus der Strahlungsleistung P , die in einen bestimmten Raumwinkel gestrahlt wird, und diesem Raumwinkel Ω die Strahlstärke I_e ¹⁾

$$I_e = P/\Omega \quad \text{mit der Einheit} \quad 1 \text{ W/sr}^2)$$

Vergleicht man diese Strahlstärke I_e mit der in Abschn. 5.2.5.2 verwendeten Intensität oder Energiestromdichte $S = P/A$, so fällt in erster Linie auf, dass S bei einer Kugelwelle mit dem Quadrat des Abstands von der Quelle abnimmt, während I_e dabei konstant bleibt. Damit kann man nun die oben verlangten „physiologischen Größen“ einführen:

Definition: Basisgröße der Photometrie ist die Lichtstärke I_v ³⁾, die angibt, wie hell eine Lichtquelle erscheint im Vergleich zur Einheitslichtquelle. Die Einheit der Lichtstärke heißt 1 candela = 1 cd⁴⁾. Der Vergleich erfolgt zunächst subjektiv über den menschlichen Gesichtssinn.

Die Basiseinheit 1 cd ist folgendermaßen festgelegt: Wenn eine Strahlungsquelle bei der Frequenz 540 THz (\triangleq 555 nm Vakuumwellenlänge) in einen (kleinen) Raumwinkel die Strahlstärke $I_e = 1/683 \text{ W/sr}$ strahlt, so hat sie in dieser Richtung und bei dieser Frequenz die Lichtstärke $I_v = 1 \text{ cd}$. Also ist

$$\text{bei } 540 \text{ THz} \quad I_v = K I_e \quad \text{mit} \quad K = 683 \frac{\text{cd}}{\text{W/sr}}^5) \quad (5.90)$$

Die 540 THz \triangleq 555 nm (Farbeindruck grün) wurden gewählt, weil unser Auge hier bei Tag am empfindlichsten ist. Der Umrechnungsfaktor $K = 683 \frac{\text{cd}}{\text{W/sr}}$ musste so gewählt werden, damit diese jüngste Definition der candela möglichst ähnlich zur früher gültigen bleibt. Bei kürzeren und bei längeren Wellenlängen ist unser Auge weniger empfindlich. Dies lässt sich durch den sog. Hellempfindlichkeitsgrad V zahlenmäßig ausdrücken: Sein Wert ist für alle Wellenlängen des sichtbaren Lichtes in Wellenlängenschritten von 1 nm gemessen und in Bild 5.60 wiedergegeben.⁶⁾

Dieses V ist also ein dimensionsloser Faktor, mit dem man die mit $683 \frac{\text{cd}}{\text{W/sr}}$ bereits multiplizierte physikalische Größe I_e (Gl. 5.88) nochmals multiplizieren muss, um die physiologische Größe I_v zu erhalten.

¹⁾ Index e für „energiebezogen“.

²⁾ sr ist die Abkürzung für Steriant, und das ist der Name für die an sich dimensionslose Größe Raumwinkel; er wird wie ein Einheitensymbol hinter den Zahlenwert geschrieben.

³⁾ Index v für „visuell“.

⁴⁾ von von lat. candela = Kerze.

⁵⁾ Man vergleiche diese Festlegung mit der entsprechenden in der Akustik zwischen Lautstärkepegel in phon und Schallpegel in dB (Abschn. 5.2.5.3).

⁶⁾ Die genauen Zahlenwerte sind in Tabellen, z.B. in DIN 5031 Teil 3, aufgeführt.

Wenn die Werte $V(\lambda)$ von Bild 5.60 oder aus den erwähnten DIN-Tabellen bekannt sind, braucht der „subjektive Helligkeitsvergleich“, der in der Definition der Lichtstärke steht, nicht mehr durchgeführt zu werden.

Soll die Lichtstärke einer Quelle nicht nur bei einer Wellenlänge angegeben werden, z.B. weil sie mehrere Wellenlängen $\lambda_1; \lambda_2; \dots$ abstrahlt, so ist von jeder Komponente die Strahlstärke $I_{e1}; I_{e2}; \dots$ zu messen, dann sind nach Gl. (5.90) und mit den zugehörigen Werten $V_1; V_2 \dots$ die Teillichtstärken $I_{v1}; I_{v2} \dots$ zu berechnen, und daraus ist die Summe zu bilden.¹⁾

Hat die Lichtquelle ein kontinuierliches Spektrum, etwa wie in Bild 5.59, d.h. kommt jede Wellenlänge des sichtbaren Lichtes vor, so geht obige Summe in ein Integral über

$$I_v = K \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{dI_e}{d\lambda} V(\lambda) d\lambda$$

mit λ_1 und λ_2 als Grenzwellenlängen unserer Augen. Außer der Basisgröße Lichtstärke werden für die praktische Fotometrie noch weitere, abgeleitete Größen gebraucht:

Definition: Eine Lichtquelle mit der Lichtstärke I_v strahlt in den (kleinen) Raumwinkel Ω den Lichtstrom

$$\Phi_v = I_v \Omega \quad (5.91)$$

Die Einheit dafür ist 1 Candela · Steradian = 1 cd sr und wird Lumen genannt:

$$1 \text{ cd sr} = 1 \text{ Lumen} = 1 \text{ lm}$$

Trifft ein Lichtstrom Φ_v senkrecht auf eine Empfängerfläche A' ²⁾, so „beleuchtet“ er diese umso stärker, je größer Φ_v und je kleiner A' ist. Daraus folgt die

Definition: Beleuchtungsstärke E_v ist der Quotient aus dem Lichtstrom Φ_v , der auf eine Empfängerfläche A' trifft, und dieser Fläche:

$$E_v = \Phi_v / A' \quad (5.92)$$

Die Einheit dafür ist 1 lm/m² und wird Lux genannt:

$$1 \text{ lm/m}^2 = 1 \text{ Lux} = 1 \text{ lx}$$

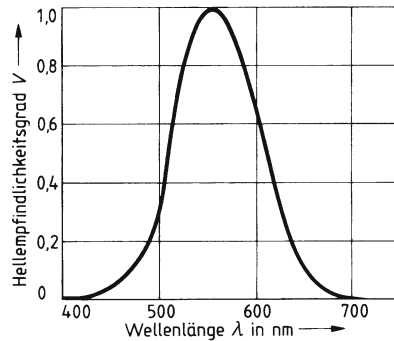


Bild 5.60 Der Hellempfindlichkeitsgrad V in Abhängigkeit von der Wellenlänge beim Tagsehen. Die in Tafel 5.58 angegebenen Grenzen des sichtbaren Lichtes 380 nm und 780 nm sind dadurch definiert, dass dort V jeweils den Wert 10^{-5} hat.

¹⁾ So verfährt offensichtlich auch der menschliche Gesichtssinn; er ist also in dieser Beziehung einfacher als das Gehör, vgl. Bild 5.50.

²⁾ Genau genommen müsste die Empfängerfläche nicht eben, sondern ein Teil einer Kugel um die Lichtquelle sein, damit alle Teile der Fläche senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung stehen. Für kleine Flächen, also kleine Raumwinkel, ist der Unterschied aber vernachlässigbar.

Bild 5.61 zeigt eine Lichtquelle 1 und im Abstand r davon eine Empfängerfläche A' ¹⁾. Der Quotient aus der Fläche A' und dem Quadrat des Abstandes r ist aber der (kleine) Raumwinkel Ω , unter dem die Fläche A' von der Lichtquelle 1 aus erscheint: $\Omega = A'/r^2$. Setzt man diesen Ausdruck in Gl. (5.92) ein, so ergibt sich $E_V = \Phi_V/(\Omega r^2)$ und mit Gl. (5.91) die

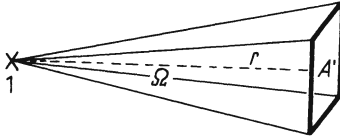


Bild 5.61 Raumwinkel Ω zwischen Lichtquelle 1 und Empfängerfläche A'

Wichtigste Beziehung der Fotometrie:

$$E_V = I_V/r^2 \quad (5.93)$$

Die Beleuchtungsstärke E_V ist eine der Intensität S ähnliche Größe, die bei Kugelwellen ja auch proportional $1/r^2$ ist.

Bei nicht punktförmigen Lichtquellen – und das sind streng genommen alle – braucht man außerdem oft noch die Leuchtdichte B_V nach folgender

Definition: Die Leuchtdichte B_V einer Lichtquelle ist der Quotient aus deren Lichtstärke und deren Fläche A

$$B_V = I_V/A$$

Die Einheit ist cd/m^2 .

Tafel 5.62 Leuchtdichten, Lichtströme und Beleuchtungsstärken

Sonne		bis $1,5 \cdot 10^9$
Lichtbogenkrater		bis $1,8 \cdot 10^8$
Glühlampenwendel		$5 \cdot 10^6$ bis $3 \cdot 10^7$
mattierter Glühlampenkolben		$5 \cdot 10^4$ bis $3 \cdot 10^5$
Leuchtstofflampe		$3 \cdot 10^3$ bis $7 \cdot 10^3$
Gesamtlichtstrom in lm		
Glühlampe 230V	25 W	215
	60 W	620
	200 W	2900
Leuchtstofflampe	25 W	2000
	65 W	5200
Lichtbogen	250 W	10 000
Beleuchtungsstärken in lx		
heller Sonnenschein		10 000 bis 100 000
Tageslicht bei bedecktem Himmel		900 bis 2000
	Sollwerte	
	für Straßenbeleuchtung	0,5 bis 30
	für Innenbeleuchtung	
	bei grober Arbeit:	im Raum 50
		am Arbeitsplatz 50 bis 100
	bei feiner Arbeit:	im Raum 150
		am Arbeitsplatz 300 bis 1000
	bei sehr feiner Arbeit:	im Raum 300
		am Arbeitsplatz 1000 bis 4000

¹⁾ s. Fußnote ²⁾ auf S. 455

Häufig findet man statt der Lichtstärke I_v einer Lichtquelle deren Gesamtlichtstrom Φ_{vg} angegeben. Da der ganze Raum den Raumwinkel $\Omega_g = 4\pi$ hat, ist bei allseitig symmetrischer Ausstrahlung

$$\Phi_{vg} = 4\pi I_v.$$

In Tafel 5.62 sind einige Werte fotometrischer Größen zusammengestellt.

Augenempfindlichkeit. Eine Lichtquelle der Lichtstärke I_v strahlt in ein menschliches Auge einen Lichtstrom $\Phi_v = I_v \Omega$ wobei der Raumwinkel Ω durch den Pupillendurchmesser und den Abstand Lichtquelle–Auge vorgegeben ist. Wie viel Leistung P dazu nötig ist, hängt nach allem vorher Gesagten stark von der Wellenlänge ab und außerdem davon, welche Sorte von Empfängerzellen in der Netzhaut des Auges wirksam ist.

Wir haben zwei Sorten, die nach ihrer Form bei mikroskopischer Betrachtung Zäpfchen und Stäbchen heißen. Die Zäpfchen werden bei Tageslicht und normaler Beleuchtung benützt und vermitteln nicht nur den Helligkeitseindruck, sondern auch die Farbeindrücke; die Stäbchen arbeiten bei sehr geringer Beleuchtung, bei tiefer Dämmerung oder Nacht und vermitteln keine Farbeindrücke.

Den Quotienten aus dem Lichtstrom $\Phi_v = I_v \Omega$ und der Leistung P , die diesen Lichtstrom im gleichen Raumwinkel Ω erzeugt, nennen wir Augenempfindlichkeit. Deren Wellenlängenabhängigkeit ist in Bild 5.63 dargestellt.

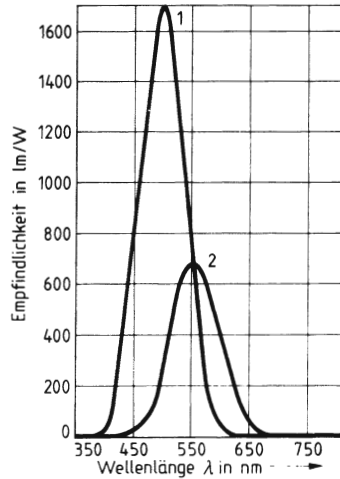


Bild 5.63 Die Empfindlichkeit des menschlichen Auges in Abhängigkeit von der Wellenlänge. Kurve 1 für das Nachtsehen (Stäbchen) mit Maximum bei 507 nm, Kurve 2 für das Tagsehen (Zäpfchen) mit Maximum und Schnitt mit Kurve 1 bei 555 nm.

Messverfahren der Fotometrie beruhen meist auf dem Vergleich von Beleuchtungsstärken. Andere evtl. interessierende Größen werden daraus berechnet. Man unterscheidet zwei verschiedene Verfahren:

1. Beim historischen subjektiven Vergleich hatte man zwei gleichartige, meist mattweiße Flächen. Eine davon wurde mit dem Licht des schwarzen Körpers, durch den die Einheit candela dargestellt wurde, oder mit einer danach kalibrierten Normlampe beleuchtet (I_{v0}), die andere mit der unbekanntem Lichtquelle (I_{vx}). Dann wurden die Abstände r_0 und r_x zwischen den Lichtquellen und den weißen Flächen solange verändert, bis Letztere einem Beobachter „gleich hell“, d.h. gleich stark beleuchtet erschienen. Dann ist $E_{v0} = E_{vx}$ und nach Gl. (5.93)

$$I_{v0}/r_0^2 = I_{vx}/r_x^2$$

oder

$$I_{vx} = I_{v0} (r_x^2/r_0^2).$$

Der subjektive Vergleich ist – wie oben schon festgestellt – heute nicht mehr nötig. Er wurde zuletzt sehr sorgfältig und aufwändig durchgeführt, um die erwähnte DIN-Tabelle für den Hellempfindlichkeitsbereich V zu erstellen.

2. Zur sog. objektiven Messung dienen Anordnungen, die die Lichtenergie in andere, direkter messbare Energien umwandeln, z.B. benützt man besonders behandelte Fotozellen mit Filterkombinationen. Deren Wirkungsgrad bei der Umwandlung von Strahlungsenergie in andere Energie hat ungefähr die gleiche Frequenzabhängigkeit wie die Zäpfchenempfindlichkeit des Auges (Bild 5.63). Zur Kalibrierung werden Fotozellen mit Normlampen aus bestimmten Abständen beleuchtet, zur Messung wird genauso mit der unbekanntem Lampe verfahren.

Aufgaben zu Abschn. 5.2.3 bis 5.2.5

1. Eine Leitung besteht zwischen ihrem einen festen Abspannpunkt und der Mitte aus Aluminiumdraht (\varnothing 4 mm), zwischen der Mitte und dem zweiten festen Abspannpunkt aus Kupferdraht (\varnothing 2,2 mm).

Wie verhält sich eine mechanische Querwelle, die von der Aluminiumseite ausgehend die Leitung entlang läuft (Dichte Aluminium $2,72 \text{ g/cm}^3$, Kupfer $8,93 \text{ g/cm}^3$)?

2. Wie lang muss eine am Ende offene Orgelpfeife sein, damit die Frequenz ihrer Grundschwingung 440 Hz ist?

Welche Grundfrequenz hat die gleiche Pfeife, wenn ihr Ende verschlossen wird ($c_L = 340 \text{ m/s}$)?

3. Man berechne den Schallwellenwiderstand von Wasser und von Luft ($\rho_L = 1,205 \text{ kg/m}^3$; $\rho_W = 103 \text{ kg/m}^3$; $c_L = 343 \text{ m/s}$; $c_W = 1415 \text{ m/s}$).

4. Eine Schallwelle in Luft ($c = 343 \text{ m/s}$) hat die Frequenz 4000 Hz und die Schalldruckamplitude $9,09 \cdot 10^{-2} \text{ Pa}$. Zu berechnen sind die Wellenlänge λ , die maximale Schnelle \dot{v} , die Amplitude \hat{s} , die Schallintensität S , der Schallpegel L , der

Lautstärkepegel L_S und der Schallstrahlungsdruck p_R bei vollständiger Reflexion.

5. Eine Schallwelle in Wasser hat die gleiche maximale Schnelle wie die Welle in Aufgabe 4; um wie viel größer ist ihre Schalldruckamplitude und ihre Intensität?

6. Ein Ultraschallsender strahlt in Wasser eine ebene Welle mit dem Querschnitt 10 cm^2 , der Leistung 1 W und der Frequenz 100 kHz ab. Welche maximale Beschleunigung tritt dabei auf?

7. Die Länge eines Senderdipols ist zur Abstrahlung einer Welle mit $3 \cdot 10^6 \text{ Hz}$ in Luft angepasst. Für welche Frequenz ist der gleiche Dipol zur Abstrahlung in Wasser (Dielektrizitätszahl $\epsilon_r = 81$) geeignet?

8. Eine ebene Lichtwelle mit der Wellenlänge 600 nm beleuchtet eine Empfängerfläche mit 10^4 lx . Welchen Betrag hat die maximale elektrische Feldstärke \hat{E} der Welle in Luft?

9. Welche Farbtemperatur hat Glühlicht, dessen intensivste Wellenlänge $\lambda_{\text{max}} = 400 \text{ nm}$ (violett) ist?

5.2.6 Anwendungen des Huygens-Fresnelschen Prinzips auf dreidimensionale Wellen

In den folgenden Abschnitten werden einige Erscheinungen dreidimensionaler Wellen – Reflexion, Brechung, Beugung, Interferenz und Dopplereffekt – beschrieben. Sehr nützlich ist zu deren Verständnis das Huygens-Fresnelsche Prinzip (vgl. Abschn. 5.2.1.1 und 5.2.5.1): „Jeder von einer Welle erfasste Punkt ist selbst Ausgangspunkt einer Elementarwelle; die weiterlaufende Welle ist die Resultierende aller Elementarwellen“.

Die meisten dreidimensionalen Wellen sind nicht direkt sichtbar, daher führen wir einen Teil der Versuche in den folgenden Abschnitten mit den zweidimensionalen Wasserwellen durch. Diese sollen uns also als Versuchsmodell dienen. Sie eignen sich besonders gut dazu, da sie sich verhältnismäßig langsam ausbreiten und gut zu beobachten sind. Natürlich muss man sich dann den zweidimensionalen Vorgang in Gedanken dreidimensional ergänzen.

5.2.6.1 Reflexion

Ebenso wie die eindimensionalen Wellen werden auch die dreidimensionalen immer dann reflektiert, wenn sie an eine Grenze zwischen zwei Medien kommen, in denen sie verschiedene Phasengeschwindigkeiten haben (vgl. Versuch 19 in Abschn. 5.2.3). Allerdings ist hier die Grenze immer eine Fläche, und darum hängt die Reflexion auch von deren Form und Richtung bezüglich der Wellenfronten ab.

Ebene Grenzflächen

□ **Versuch 24.** Zur Demonstration werden auf einer Wasseroberfläche folgendermaßen Wellen erzeugt: Ein Stab wird parallel zur Wasseroberfläche dicht über diese gehalten und senkrecht zu seiner Längsrichtung einmalig oder periodisch auf und ab bewegt, sodass er

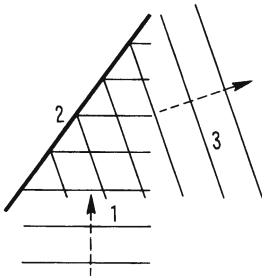


Bild 5.64 Reflexion von ebenen Wellen an einer Ebene

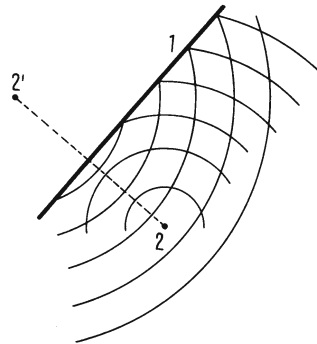


Bild 5.65 Reflexion von Kugelwellen an einer Ebene

bei jeder Abwärtsbewegung in das Wasser eintaucht. Dadurch entstehen Wellen mit geraden Wellenfronten (parallel zum Stab), die uns als zweidimensionales Modell für (dreidimensionale) ebene Wellen dienen. Als reflektierende Grenzfläche taucht z.B. ein ebenes Blech aufrecht in das Wasser. Bild 5.64 zeigt eine Gruppe derartiger Wellenfronten 1, die gerade an der Wand 2 reflektiert werden (3). □

Die Erklärung liefert das Huygens-Fresnelsche Prinzip: Die einzelnen Teile des Mediums unmittelbar vor der reflektierenden Wand werden nacheinander von der ankommenden Welle erfasst, da die Wand gegen die Wellenfronten geneigt ist. Sie schwingen also phasenverschoben. Daher haben sich die von ihnen ausgehenden Elementarwellen zu einem bestimmten Zeitpunkt verschieden weit ausgebreitet.

In Abschn. 5.2.6.2 wird – zusammen mit der Brechung – gezeigt, wie sich durch diese Anwendung des Huygens-Fresnelschen Prinzips gerade das Reflexionsgesetz der Optik (Abschn. 4.1.1.1) ergibt. Die ebenfalls in der Optik – also an elektromagnetischen Wellen – gezeigte Entstehung eines virtuellen Bildes zeigt hier

□ **Versuch 25.** Wird im Gegensatz zu Versuch 24 nur eine Spitze an einem bestimmten Punkt 2 (Bild 5.65) einmalig oder periodisch in die Wasseroberfläche getaucht, so gehen von dort Wellen mit kreisförmigen Wellenfronten aus, die als Modell für Kugelwellen dienen. Sie werden an einer ebenen Wand 1 so reflektiert, dass die reflektierten Wellen von einem Zentrum 2 auszugehen scheinen, das symmetrisch zum wirklichen Zentrum bezüglich der Wand 1 ist. □

Gekrümmte Grenzflächen

Die einfachsten räumlich gekrümmten Flächen sind die kugelförmigen. Auf solche beschränken wir uns hier. Im ebenen Modell – der Wasseroberfläche – stellen wir sie durch Kreise dar.

□ **Versuch 26.** Wir lassen gerade Wellen (vgl. Versuch 24) und Kreiswellen (vgl. Versuch 25) sowohl an der konkaven, als auch an der konvexen Seite eines zylindrischen Bleches reflektieren. Bild 5.66 zeigt die Ergebnisse. Gestrichelt ist jeweils eine Wellengruppe vor,

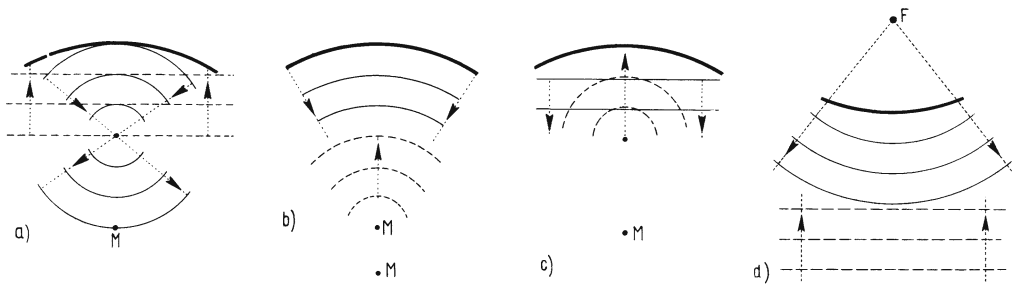


Bild 5.66 Reflexion an gekrümmten Flächen

- a) aus ebenen Wellen werden Kugelwellen durch den „Brennpunkt“
 b) Kugelwellen aus dem Mittelpunkt laufen in sich zurück
 c) aus Kugelwellen aus dem „Brennpunkt“ werden ebene Wellen
 d) aus ebenen Wellen werden Kugelwellen, die vom „Brennpunkt“ F auszugehen scheinen.

ausgezogen nach der Reflexion gezeichnet. M ist jeweils der Krümmungsmittelpunkt des Zylinders; die Normalen auf den Wellenfronten sind punktiert. □

Man vergleiche diese Ergebnisse mit denen der Strahlenoptik, Abschn. 4.1.1.2 (s. außerdem Abschn. 5.2.6.2).

Anwendungen. Die Reflexion von Schallwellen an Wänden, am Boden etc. ist sowohl für die sprachliche Verständigung als auch bei der Lärmbelästigung sehr wesentlich. Mit sog. Echoloten wird die Tiefe von Gewässern gemessen, werden Fischschwärme oder Unterseeboote aufgespürt.

Die Reflexion von Explosionswellen an Grenzflächen im Innern der Erde gibt Aufschluss über die Zusammensetzung des Erdinneren, über Gas-, Erdöl- oder Erzvorkommen etc. Die Reflexion von Radiowellen an leitfähigen hohen Luftschichten ermöglicht ihre Ausbreitung um den Erdball herum. Die Reflexion von kurzen Radiowellen an Flugzeugen und Schiffen ist die Grundlage der Radarortung. Dabei und bei der sog. Radioastronomie werden auch Hohlspiegel zum Fokussieren der Wellenbündel verwendet.

5.2.6.2 Brechung

Bild 5.67 zeigt zwei Medien, durch die sich eine ebene Welle der Frequenz f mit zwei verschiedenen Phasengeschwindigkeiten c_1 und c_2 ($c_1 > c_2$), also – wegen $\lambda = c/f$ – auch mit zwei verschiedenen Wellenlängen λ_1 und λ_2 ausbreitet. Die Grenzfläche 2 zwischen den beiden Medien ist gegen die Ausbreitungsrichtung der Welle im ersten Medium um den

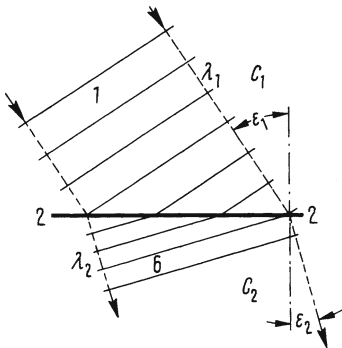


Bild 5.67 Brechung von ebenen Wellen an einer ebenen Grenzfläche

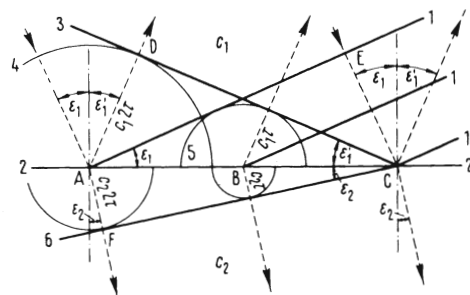


Bild 5.68 Zur Herleitung des Reflexions- und Brechungsgesetzes aus dem Huygens-Fresnelschen Prinzip

Winkel ε_1 geneigt. Daher werden die einzelnen Punkte der Grenzfläche zu verschiedenen Zeiten von einer Wellenfront 1 erreicht, schwingen also gegeneinander phasenverschoben. Die von ihnen ausgehenden Elementarwellen überlagern sich im ersten Medium zu einer (hier nicht gezeichneten) reflektierten Welle, genau wie in Bild 5.64.

Im zweiten Medium dagegen ergibt die Überlagerung wegen der anderen Phasengeschwindigkeit c_2 eine Welle mit anderer Ausbreitungsrichtung (Wellenfronten 6). Man sagt, die Welle wird an der Grenzfläche gebrochen. Wir wollen das anhand von Bild 5.68 genauer untersuchen. Eine Wellenfront 1 erreicht die Grenzfläche 2 im Punkt A zur Zeit $t = 0$, im Punkt B zur Zeit $t = \tau$ und – wenn $\overline{AB} = \overline{BC}$ im Punkt C zur Zeit $t = 2\tau$.

Im ersten Medium hat sich inzwischen die zur Zeit $t = 0$ von A ausgehende Elementarwelle 4 auf den Radius $c_1 2\tau$ ausgedehnt; die Elementarwelle, die zur Zeit $t = \tau$ von B ausging, hat inzwischen den Radius $c_1 \tau$; die von C ausgehende Elementarwelle hat noch den Radius null. Alle anderen (nicht gezeichneten) Elementarwellen von den Punkten zwischen A und C haben als Radien entsprechende Zwischenwerte, und zwar so, dass sich als gemeinsame Tangente die neue reflektierte Wellenfront 3 ergibt.

Im zweiten Medium sind die Radien der entsprechenden Elementarwellen um A, B bzw. C nur $c_2 2\tau$, $c_2 \tau$ bzw. 0, sodass die gemeinsame Tangente dieser und aller dazwischenliegenden Elementarwellen die resultierende Wellenfront 6 ist. Gestrichelt sind Normale auf den Wellenfronten 1, 3 und 6 eingezeichnet. Sie bilden mit den strichpunktierten Lote auf der Grenzfläche 2 die gleichen Winkel ε_1 , ε_1' und ε_2 wie ihre Wellenfronten mit der Grenzfläche selbst. Die Welle legt im ersten Medium im Zeitintervall 2τ jeweils die Strecken \overline{EC} und \overline{AD} zurück, d.h. es ist $\overline{EC} = \overline{AD} = c_1 2\tau$. Daher sind die Dreiecke EAC und DAC kongruent und folglich ist $\sphericalangle ECA = \sphericalangle DAC$, d.h. die Einfallsnormale bildet mit der Grenzfläche 2 den gleichen Winkel wie die Ausfallsnormale. Das gilt natürlich auch, wenn man die Winkel gegen die strichpunktierten Lote misst, also ist $\varepsilon_1 = \varepsilon_1'$ wie es auch das Reflexionsgesetz in Abschn. 4.1.1.1 aussagt. Im zweiten Medium legt die Welle im Zeitintervall 2τ die Strecke \overline{AF} zurück, also ist $\overline{AF} = c_2 2\tau$. Daher gilt:

$$\sin \varepsilon_1 = \overline{EC}/\overline{AC} = c_1 2\tau/\overline{AC} \quad \text{und} \quad \sin \varepsilon_2 = \overline{AF}/\overline{AC} = c_2 2\tau/\overline{AC}$$

Dividiert man diese beiden Ausdrücke durcheinander, so erhält man

$$\sin \varepsilon_1 / \sin \varepsilon_2 = c_1 / c_2 \tag{5.94}$$

In der Strahlenoptik (Abschn. 4.1.2.1) ergibt sich für den gleichen Sachverhalt das Snelliussche Brechungsgesetz Gl. (4.4)

$$\sin \varepsilon_1 / \sin \varepsilon_2 = n_2 / n_1$$

wobei n_1 und n_2 die Brechzahlen der aneinandergrenzenden Medien sind. Der Vergleich von Gl. (4.4) und Gl. (5.94) zeigt nun:

Die Brechzahlen zweier Medien verhalten sich umgekehrt wie die Phasengeschwindigkeiten von Wellen in diesen Medien

$$n_1 / n_2 = c_2 / c_1 \tag{5.95}$$

Zum gleichen Ergebnis kommt man auch durch eine mathematische Vorgehensweise: Man unterstellt, dass sich eine Welle von einem Punkt A im Medium mit c_1 zu einem Punkt B im Medium mit c_2 auf einem solchen Weg bewegt, dass die dafür benötigte Zeit ein Minimum wird.

Dieses sog. Fermatsche Prinzip¹⁾ ist jedoch eher ein Beispiel für Minimierungsrechnung (s. Aufgabe 7 zu Abschn. 5.2.6 bis 5.2.8).

□ **Versuch 27.** Die Phasengeschwindigkeit von Wasserwellen hängt in einem bestimmten Bereich von der Wassertiefe ab. Bringt man geeignet geformte Platten dicht unter die Oberfläche in das Wasser, so erhält man die in Bild 5.69 gezeichneten Untiefen. In deren Bereich ist die Phasengeschwindigkeit und damit die Wellenlänge kleiner als im umgebenden tiefen Wasser. Dadurch kommen die gezeichneten Brechungen zustande (Wellennormalen gestrichelt). □

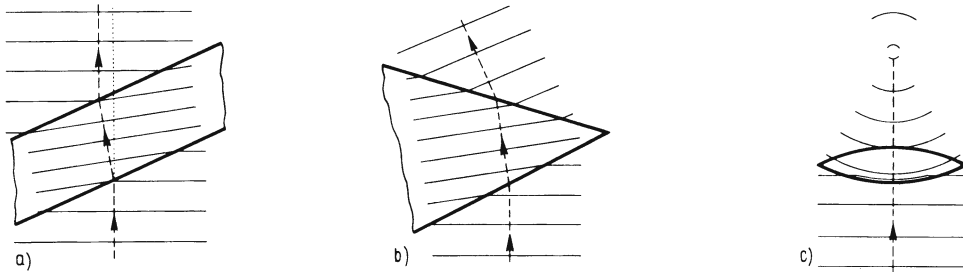


Bild 5.69 Brechung von ebenen Wellen

a) an parallelen ebenen, b) an geneigten ebenen, c) an gekrümmten Grenzflächen

Die Wasserwellen verhalten sich also genau so wie die kurzwelligen elektromagnetischen Wellen des Lichtes. Die Brechung von längeren elektromagnetischen Wellen – Radiowellen – kann man z.B. an einem Prisma aus Paraffin untersuchen, die Brechung von Schallwellen an einem Hohlprisma aus dünner Kunststoffolie, das mit Kohlendioxid gefüllt ist. In allen Fällen müssen die Abmessungen der Gebiete mit der anderen Phasengeschwindigkeit – also z.B. die genannten Prismen – groß sein gegen die Wellenlänge.

□ **Versuch 28. Bestimmung von Phasengeschwindigkeiten.** Bild 5.70 zeigt sowohl in a) wie in b) je ein Prisma, durch das eine elektromagnetische Welle geht, von der nur die Wellennormale gestrichelt eingezeichnet ist. In beiden Fällen ist der Einfallswinkel ϵ_1 so gewählt, dass die Wellennormale im Innern des Prismas senkrecht zur Winkelhalbierenden des sog. brechenden Winkels α verläuft; das ist der symmetrische Strahlengang, bei dem der Gesamtablenkungswinkel δ ein Minimum hat (vgl. Versuch 2 in Abschn. 4.1.2.2). Die Unterschiede zwischen den beiden Anordnungen in a) und b) sind folgende:

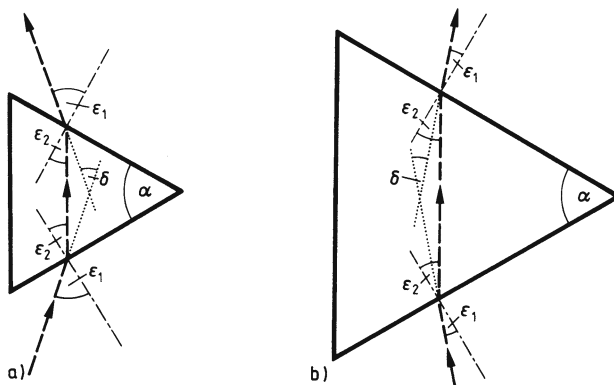


Bild 5.70 Bestimmung der Phasengeschwindigkeit aus dem Gesamtablenkungswinkel δ durch ein Prisma

¹⁾ Pierre de Fermat (1601 bis 1665).

1. Abmessungen: Im Fall a) handelt es sich um Licht eines Helium/Neon-Lasers mit der Vakuumwellenlänge 632,8 nm und um ein Prisma mit Kantenlängen von wenigen Zentimetern, im Fall b) um elektromagnetische Wellen mit einer Vakuumwellenlänge von 30 mm und um ein Prisma mit Kantenlängen von etwa 300 mm.
2. Material: Im Fall a) liegt ein schlichtes Glasprisma vor, im Fall b) besteht das Prisma aus etwa 15 dreieckigen ebenen Aluminiumfolien, die mit Hilfe von dazwischen geklebten 20 mm dicken Styroporplatten parallel zur Zeichenebene aufgeschichtet sind.
3. Polarisation: Im Fall a) ist die Polarisationsrichtung gleichgültig, im Fall b) muss die Richtung der elektrischen Feldstärke parallel zu den Aluminiumfolien sein, damit das Paket als durchlässiges Prisma wirkt. Siehe hierzu z.B. [22]. □

Es ergeben sich dann die in a) und b) gestrichelt gezeichneten „Strahlengänge“ (im Sinne der Strahlenoptik, Abschn. 4): Im Fall a) verkleinert sich bei der ersten Brechung der Winkel der Wellennormale gegen die (strichpunktierte) Grenzbenennormale ($\epsilon_1 > \epsilon_2$) und vergrößert sich bei der zweiten Brechung; im Fall b) ist das gerade umgekehrt. Das heißt aber, dass im Fall a) die Phasengeschwindigkeit im Innern des Prismas kleiner, im Fall b) größer als in der umgebenden Luft (fast gleich Vakuum) ist.

Wie hier nicht näher vorgerechnet werden soll, erhält man bei symmetrischem Strahlengang aus dem Ablenkungswinkel δ und dem brechenden Winkel α die Brechzahl

$$n = \frac{\sin \frac{1}{2}(\delta + \alpha)}{\sin \frac{1}{2}\alpha}$$

Mit den Abmessungen des Versuches 28 ergibt sich z.B. im Fall a) $n_a = 1,52$ und im Fall b) $n_b = 0,67$. Demnach ist die Phasengeschwindigkeit im Glas $1,98 \cdot 10^8$ m/s und die im Aluminiumfolienstapel $4,5 \cdot 10^8$ m/s, d.h. das 1,5-fache der Vakuumlichtgeschwindigkeit! Dies ist jedoch kein Verstoß gegen die Relativitätstheorie (s. Abschn. 8), denn die für die Informationsübertragung allein maßgebliche Gruppengeschwindigkeit v_{Gr} (s. folgenden Abschn.) beträgt hier, wie nicht näher begründet werden soll, nur $(2/3)c_0$.

Dispersion

In Abschn. 5.2.2.3 wird gezeigt, dass die Phasengeschwindigkeiten von Wellen von bestimmten Eigenschaften der Medien abhängen, weil diese – insbesondere die elektrischen in Gl. (5.57) und (5.85) – nicht immer konstant sind, sondern von der Frequenz abhängen. Dann ist also auch die Phasengeschwindigkeit der Wellen in dem Medium von ihrer Frequenz abhängig.

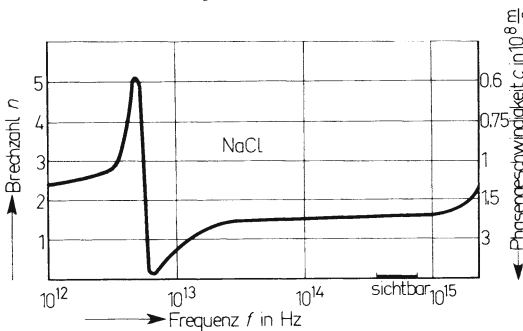
Definition: Die Erscheinung, dass die Phasengeschwindigkeit c und wegen Gl. (5.95) auch die Brechzahl n frequenzabhängig sind, d.h., dass $c = c(f)$ bzw. $n = n(f)$ ist, nennt man Dispersion. Als Maß für die Dispersion dient entweder dc/df oder dn/df .

Ursache für die Dispersion. Die Phasengeschwindigkeit ist nach Gl. (5.85) der Wurzel aus der Dielektrizitätszahl (DZ) ϵ_r umgekehrt proportional; nach Abschn. 3.1.3.2 beruht die DZ auf Orientierungs- und Verschiebungspolarisation von Ladungswolken in Atomen, Ionen oder Molekülen (kurz: Molekeln) durch das anliegende elektrische Feld; die Mole-

keln sind aber alle schwingungsfähige Gebilde (mit mehr als einer Resonanzstelle (s. Abschn. 6.1)) und führen bei anliegendem elektrischen Wechselfeld erzwungene Schwingungen aus. Dabei addieren sich zwei Effekte:

Erstens: Die Amplitude und damit die erzielte Polarisierung und DZ in Abhängigkeit von der anliegenden Frequenz wird durch Resonanzkurven ähnlich Bild 5.16a in Abschn. 5.1.6 beschrieben. Sind die in Frage kommenden Wellenfrequenzen kleiner als die nächste Resonanzfrequenz, so steigt mit wachsender Frequenz die Amplitude der erzwungenen Schwingung und somit ϵ_r . Die Phasengeschwindigkeit sinkt jedoch wegen der umgekehrten Proportionalität zwischen ϵ_r und c , es ist $dc/df < 0$.

Zweitens: Wenn man in der Resonanzkurve der Phasenverschiebung in Bild 5.16b sich ebenfalls von kleineren Frequenzen der Resonanzfrequenz nähert, vergrößert sich die Phasenverschiebung zwischen Erreger und erregtem System. Fasst man nun jedes erregte Molekel als Erreger für sein nächstes Nachbarmolekel auf (vgl. Huygens-Fresnelsches Prinzip), so bedeutet die wachsende Phasenverschiebung einfach eine verzögerte Weitergabe der Schwingung, d.h. eine kleinere Phasengeschwindigkeit der Welle, ein $dc < 0$ und auch – wie oben – ein $dc/df < 0$. Diesen Verlauf nennt man normale Dispersion, weil man bei den meisten in der Optik verwendeten Stoffen und Frequenzen in diesem Bereich ist. An der Resonanzstelle selbst zeigen die Stoffe starke Absorption. Wird die Wellenfrequenz schließlich größer als die nächste Resonanzfrequenz, so wird aus den gleichen Gründen wie oben $dc/df > 0$; das nennt man anomale Dispersion. Da alle Stoffe aus Molekeln



bestehen, zeigen alle je nach Wellenfrequenz mehr oder weniger starke normale und anomale Dispersion. Nur das Vakuum ist streng dispersionsfrei. Bild 5.71 zeigt beispielsweise die Dispersionskurve von Kochsalz zwischen 10^{12} Hz und 10^{15} Hz, und in Tafel 5.72 sind die Brechzahlen für rot, gelb, blau und violett einiger optisch wichtiger Stoffe zusammengestellt; außerdem ist ein „mittleres Dispersionsmaß“ $\Delta n / \Delta f$ ausgerechnet.

Bild 5.71 Dispersionskurve von Kochsalz

Tafel 5.72 Brechzahlen und mittlere Dispersion einiger Stoffe

f in 10^{14} Hz:	4,56432	5,081910	6,16173	7,550069	$\frac{\Delta n}{\Delta f} = \frac{n_{\text{vio}} - n_{\text{rot}}}{f_{\text{vio}} - f_{\text{rot}}}$ in 10^{-17} s
λ in nm:	656,272	589,5932	486,127	396,8475	
	H $_{\alpha}$ -Linie rot	Na-D $_1$ -Linie gelb	H $_{\beta}$ -Linie blau	Ca-H-Linie violett	
	n				
Wasser (20 °C)	1,331	1,333	1,337	1,343	4,019
Kronglas	1,516	1,519	1,525	1,535	6,363
Flintglas	1,614	1,619	1,631	1,653	13,06
Schwefelkohlenstoff	1,619	1,628	1,653	1,700	27,13
trockene Luft bei 15 °C und 1,013 bar	1,000554	1,000555	1,000560	1,000567	0,004354

Für nicht sinusförmige Wellen hat die Dispersion hauptsächlich zwei Auswirkungen: Verschieden starke Brechung und verschiedene Laufzeiten der verschiedenen frequenten Komponenten. Betrachten wir zunächst die erste Auswirkung:

Brechungsdispersion. Überschreitet eine nichtsinusförmige Welle die Grenzfläche zwischen zwei Medien, so werden die einzelnen verschiedenen frequenten Komponenten (vgl. Abschn. 5.1.7). verschieden stark gebrochen, wenn die Brechzahlen frequenzabhängig sind, d.h. Dispersion zeigen.

Eine derartige ebene Welle fächert daher nach dem Grenzübergang in so viele ebene Teilwellen auf, wie sie Komponenten enthält. Das ist am besten an Lichtwellen zu sehen:

□ **Versuch 29.** Bild 5.73a zeigt den Schnitt durch ein Prisma 1. Auf dieses fällt von links ein Bündel einer ebenen nichtsinusförmigen Welle, von dem nur eine Wellennormale (Hauptstrahl nach Abschn. 4) gezeichnet ist. Stammt dieses Licht aus einer Gasentladung, so enthält es nur einige bestimmte, diskrete Frequenzen, z.B. drei. Bei der Brechung an den beiden Grenzflächen entstehen so drei verschieden gerichtete ebene Teilwellen mit je einer Frequenz. Von jeder Teilwelle ist wieder nur je eine Wellennormale (Hauptstrahl) eingezeichnet. Die Linse 2 fokussiert diese Wellen an drei verschiedene Stellen des Schirmes 3 in ihrer Brennebene, d.h. dort entstehen drei Bilder der Lichtquelle, die uns verschiedenfarbig erscheinen. Dient speziell als Lichtquelle ein von hinten beleuchteter schmaler Spalt senkrecht zur Zeichenebene, so sind die Bilder auf dem Schirm drei dünne farbige Linien (Bild 5.73b). □

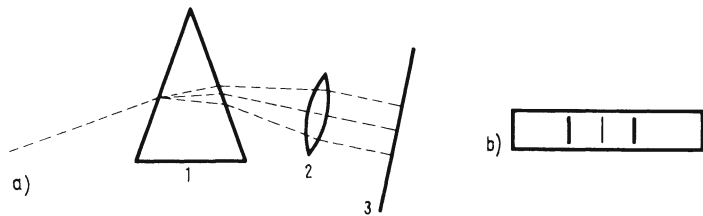


Bild 5.73 Entstehung eines Spektrums durch ein Prisma

Die Lage der Spaltbilder ist ein relatives Maß für die Frequenz des zugehörigen Lichtes. Man nennt eine derartige Anordnung einen Spektralapparat und das Bild auf dem Schirm 3 ein Spektrum¹⁾, und zwar in diesem Fall ein diskontinuierliches oder Linienspektrum (s. die Spektraltafel im Anhang).

□ **Versuch 30.** Verwendet man bei sonst gleicher Anordnung (Bild 5.73a) als Lichtquelle einen Temperaturstrahler, z.B. eine Glühlampe, so erhält man auf dem Schirm ein vielfarbiges Band, bei dem alle Farben von rot bis violett kontinuierlich ineinander übergehen (s. Anhang). Dabei ist rot am wenigsten, violett am stärksten abgelenkt. □

Da Glühlicht unendlich viele Frequenzen enthält, entstehen bei der spektralen Zerlegung auf dem Schirm unendlich viele Spaltbilder, die zusammen das kontinuierliche Spektrum ergeben.

¹⁾ In allen bis hier gezeichneten „Spektren“ war allerdings als Maß für den Anteil einer einzelnen Komponente deren Amplitude auf der Ordinate aufgetragen. Hier nun ist dieses Maß nur aus der Helligkeit der einzelnen Linien oder z.B. der Schwärzung einer fotografischen Schicht zu entnehmen. Diese sind aber der Intensität und damit dem Quadrat der Amplitude proportional.

Wie anfangs schon gesagt, ist die zweite Auswirkung die

Laufzeitdispersion. Diese ist ebenfalls von großer technischer Bedeutung. Sie bewirkt nämlich, dass ein Signal, welches man einer Welle aufmoduliert hat, mit einer anderen als der Phasengeschwindigkeit übertragen wird. Diese sog. Signalgeschwindigkeit oder Gruppengeschwindigkeit wollen wir jetzt herleiten:

Als einfaches Modell betrachten wir zunächst eine ebene Welle, die sich in x -Richtung durch ein dispersives Medium ausbreitet und nur aus zwei Komponenten mit den Kreisfrequenzen ω_1 und ω_2 , den Phasengeschwindigkeiten c_1 und c_2 sowie den Amplituden $\hat{s}_1 = \hat{s}_2 = \hat{s}$ besteht. Demnach lauten die Wellengleichungen der einzelnen Komponenten (vgl. Gl. (5.46))

$$s^\bullet = \hat{s} \sin \omega_1 \left(t - \frac{x}{c_1} \right) \quad \text{und} \quad s^* = \hat{s} \sin \omega_2 \left(t - \frac{x}{c_2} \right) \quad (5.96)$$

oder mit der Kreiswellenzahl $k = 2\pi/\lambda = \omega/c$

$$s^\bullet = \hat{s} \sin(\omega_1 t - k_1 x) \quad \text{und} \quad s^* = \hat{s} \sin(\omega_2 t - k_2 x)$$

Die Gesamtwelle ist die Summe hieraus und hat wegen $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cos [(\alpha - \beta)/2] \sin [(\alpha + \beta)/2]$ die Wellengleichung

$$s = s^\bullet + s^* = 2\hat{s} \cos \left[\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t - \frac{1}{2}(k_1 - k_2)x \right] \sin \left[\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t - \frac{1}{2}(k_1 + k_2)x \right] \quad (5.97)$$

Das ist die Gleichung einer Welle mit der mittleren Kreisfrequenz $\omega_M = (\omega_1 + \omega_2)/2$ und der mittleren Kreiswellenzahl $k_M = (k_1 + k_2)/2$. Der Faktor vor dem Sinus ist, wie bei allen Wellengleichungen, die Amplitude. Nur ist diese hier selbst periodisch von Zeit und Ort abhängig, also eine Welle mit der (niedrigeren) Kreisfrequenz $\omega_A = (\omega_1 - \omega_2)/2$ und der (niedrigeren) Kreiswellenzahl $k_A = (k_1 - k_2)/2$. Bild 5.74 zeigt eine Momentaufnahme der Gesamtwelle (vgl. Abschn. 5.1.8), die also aus mehreren einzelnen Wellengruppen besteht.

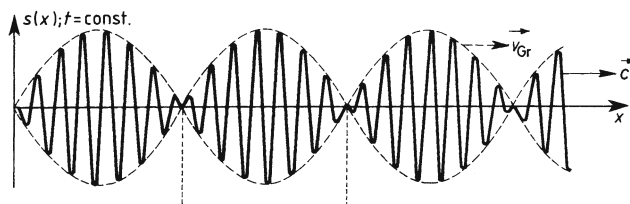


Bild 5.74 Momentaufnahme einer nicht sinusförmigen Welle aus zwei fast gleichfrequenten Komponenten. Die durch die Einhüllende (---) abgeschnürten „Wellenpakete“ lassen sich als „Signalgruppen“ deuten

Dies bewirkt der Amplitudenfaktor in Gl. (5.97), im Bild als gestrichelte Einhüllende gezeichnet. Wesentlich ist nun, dass sich diese Wellengruppen mit einer anderen Geschwindigkeit bewegen als die Phasen der Welle selbst.

Definition: Die Geschwindigkeit, mit der sich eine Wellengruppe vorwärtsbewegt, heißt Gruppengeschwindigkeit v_{Gr} .

An sichtbaren Wellen, wie z.B. Wasserwellen, ist die Abweichung der Gruppen- von der Phasengeschwindigkeit nur schwer zu beobachten. Man kann sich jedoch folgendermaßen behelfen:

Modellversuch. Man bildet auf dem Schirm eines Oszilloskopes die Überlagerung zweier fast gleichfrequenter Schwingungen – also Schwebungen – ab, analog zu Versuch 11 in Abschn. 5.1.8, achtet jedoch darauf, dass weder die Mitten- noch die Differenzfrequenz ganzzahlige Vielfache der Ablenkfrequenz des Oszilloskopes sind. Dann bewegen sich die Phasen und die Gruppen im Allgemeinen mit zwei verschiedenen Geschwindigkeiten über den Schirm.

Den genauen Zusammenhang zwischen Gruppengeschwindigkeit und Dispersion erhält man folgendermaßen:

Formal folgt aus Gl. (5.96) $c = \omega/k$. Demnach ist die Phasengeschwindigkeit der Welle von Gl. (5.97)

$$c = \frac{\omega_M}{k_M} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{k_1 + k_2}$$

während die „Phasengeschwindigkeit des Amplitudenfaktors“ – und das ist die Gruppengeschwindigkeit – ebenso, aber mit ω_A und k_A zu bilden ist:

$$v_{\text{Gr}} = \frac{\omega_A}{k_A} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \quad (5.98)$$

Im Allgemeinen entstehen aber die Wellengruppen nicht, wie wir es der Einfachheit halber oben angenommen haben, aus nur zwei, sondern aus vielen Komponenten. Wir verallgemeinern Gl. (5.98) deshalb zu

$$v_{\text{Gr}} = d\omega/dk = \text{Gruppengeschwindigkeit} \quad (5.99)$$

Bilden wir den Kehrwert, so erhalten wir $1/v_{\text{Gr}} = dk/d\omega$; da $k = \omega/c$ ist, wird mit der Produkt- und Kettenregel

$$\frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{c} - \frac{\omega}{c^2} \frac{dc}{d\omega}$$

und durch nochmalige Kehrwertbildung

$$v_{\text{Gr}} = \frac{c}{1 - \frac{\omega}{c} \frac{dc}{d\omega}}$$

Berücksichtigt man, dass $\omega = 2\pi f$ ist, ergibt sich schließlich die

Gruppengeschwindigkeit

$$v_{\text{Gr}} = \frac{c}{1 - \frac{f}{c} \frac{dc}{df}}$$

Speziell, wenn keine Dispersion auftritt, also $dc/df = 0$ ist, z.B. im Vakuum, wird $v_{\text{Gr}} = c_0$. Führt man noch die Brechzahl n ein (vgl. Abschn. 4.1.2.1 und Gl. (5.95)), also

$$c = \frac{c_0}{n} \quad \text{und daraus} \quad \frac{dc}{df} = -\frac{c_0}{n^2} \frac{dn}{df}$$

so ergibt sich

$$v_{\text{Gr}} = \frac{c}{n + f \frac{dn}{df}}$$

Immer wenn Wellen Informationen übertragen oder Energie transportieren, ist nur dieses v_{Gr} maßgebend, denn

Die Gruppengeschwindigkeit ist die Signalgeschwindigkeit. Sie ist es, die niemals größer als die Vakuumlichtgeschwindigkeit c_0 werden kann (s. Abschn. 8), was für die Phasengeschwindigkeit durchaus möglich ist (vgl. Versuch 28).

Anwendungen. Die Anwendungen der Brechung von Licht sind in Abschn. 4 ausführlich behandelt. Die Brechungsdispersion bewirkt in Prismenspektralapparaten die spektrale Zerlegung von Licht aus Gasentladungen, Funken oder Lichtbogen. Das liefert die wichtigsten Aussagen über die Atomhülle (s. Abschn. 6). Außerdem erzeugt jede Atomsorte ein anderes charakteristisches Spektrum, das bei der Spektralanalyse zum Nachweis dieser Atomsorte dient. Die Laufzeitdispersion stört bei jeder elektrischen Nachrichtenübertragung, insbesondere auf Leitungen, weil durch sie nichtsinusförmige Signale verformt werden; dies umso schwächer, je enger der Frequenzbereich ist und je kleiner das dc/df der Leitung ist. Dies gilt auch für die Fortleitung der sehr hochfrequenten Wellen des Lichtes in Glasfasern; das Glas für die zugehörigen Glasfaserleitungen (vgl. Abschn. 4.1.2.1) muss also unter anderem nach dem Gesichtspunkt einer schwachen Dispersion, d.h. eines kleinen dc/df , ausgewählt werden.

5.2.6.3 Interferenz

Laufen durch ein Medium gleichzeitig zwei oder mehr Wellen, so kann es unter bestimmten Voraussetzungen vorkommen, dass an manchen Stellen die Wellen immer mit einer Phasenverschiebung von π , 3π , 5π , ... zusammenkommen (d.h. Wellenberg auf Wellental trifft) und sich daher gegenseitig schwächen, während sie an andere Stellen immer mit einer Phasenverschiebung von 0 , 2π , 4π , ... gelangen (d.h. Wellenberg auf Wellenberg trifft) und sich dort gegenseitig verstärken. Diese Erscheinung nennt man Interferenz (vgl. Abschn. 5.2.4) und die räumliche Verteilung der Gebiete mit maximaler und minimaler Intensität ein Interferenzmuster. Das Prinzip zeigt

□ **Versuch 31. Interferenz von Wasserwellen.** In Bild 5.75a schwingen zwei Wellenzentren I und II mit gleicher Frequenz und gleichem Nullphasenwinkel. Zu diesem Zweck werden entweder zwei Spitzen im gleichen Takt periodisch in das Wasser getaucht (vgl. Versuch 25 in Abschn. 5.2.6.1), oder I und II sind zwei Öffnungen in einer Wand, gegen die eine zu ihr parallele gerade Welle läuft (vgl. Versuch 24 in Abschn. 5.2.6.1), wodurch die beiden Öffnungen zu Ausgangspunkten von Kreiswellen werden (Huygenssches Prinzip). Von diesen ist eine Momentaufnahme gezeichnet. Die schwarzen Kreise mögen dabei die positiven Halbwellen, die hellen Zwischenräume die negativen Halbwellen bedeuten. Die Wellenberggipfel und -talsohlen sind also jeweils in der Mitte dieser Streifen. In der Umgebung der beiden Quellen I und II erkennt man noch deutlich die konzentrischen Kreiswellen. In größerem Abstand sieht man mehrere keilförmige Bereiche a; b; c; d, wo immer Wellenberg auf Wellental trifft, wo also die Auslenkung minimal ist. Dazwischen liegen Bereiche 0; 1; 2; 3, wo immer regelmäßig in Ausbreitungsrichtung Wellenberge und Wellentäler aufeinanderfolgen, wo sich also ein keilförmiges Wellenbündel ausbreitet. Der Übergang zwischen diesen Gebieten erfolgt kontinuierlich. Die Intensitätsverteilung ist unabhängig vom Zeitpunkt der Momentaufnahme; wir haben ein Interferenzmuster mit maximalen (0; 1; 2; 3) und minimalen (a;b;c;d) Intensitäten vor uns. Deren Richtungen ändern sich mit der Wellenlänge und mit dem Abstand der Zentren. Lässt man diese mit einer Phasenverschiebung von π schwingen (Bild 5.75b), so werden die Gebiete maximaler und minimaler Intensität gegenüber der gleichphasigen Erregung vertauscht. Schwingen die Zentren unregelmäßig oder mit verschiedenen Frequenzen, so bildet sich kein örtlich und zeitlich konstantes Interferenzmuster aus. □

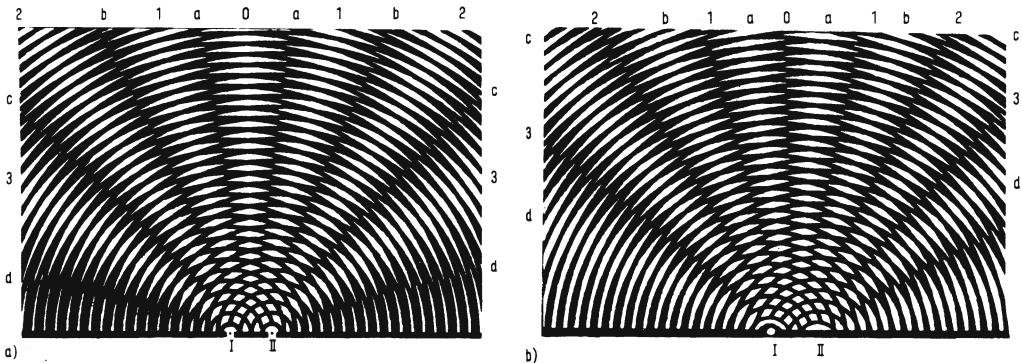


Bild 5.75 Interferenz von Wasserwellen bei Erregung der Zentren I und II
a) im Gleichtakt, b) im Gegenteil

Zur Deutung dieses Versuchsergebnisses dient Bild 5.76a. Darin gehen von den beiden Zentren I und II die gleichen Kreiswellen aus wie in Bild 5.75. Die momentane Lage ihrer Wellenberge ist durch die punktierten Kreise gekennzeichnet. Zu den Punkten A, B, C, D und E sind von diesen Kreiswellen einzelne Wellenzüge gezeichnet, und zwar als Sinuslinien, damit ihre Phasenlage besser zu erkennen ist. Die maximale Intensität in der Richtung 0 – das Maximum 0-ter Ordnung – kommt zustande durch die Kreiswellen, die ohne Phasenverschiebung zusammentreffen, weil sie von ihren Zentren gleich lange Wege zurückgelegt haben – kurz gesagt – den Gangunterschied $d = 0$ haben (ausgezogene Sinuslinien zum Punkt C). Entsprechend kommen die maximalen Intensitäten in der Richtung 1 – die Maxima erster Ordnung – durch Überlagerung mit der Phasenverschiebung 2π wegen des Gangunterschiedes $d = \lambda$ zustande usw. (ausgezogene Sinuslinien zu den Punkten A und E) usw. Beim Zusammentreffen mit der Phasenverschiebung π wegen des Gangunterschiedes $d = \lambda/2$ dagegen schwächen sich die Auslenkungen; es entstehen die Minima in Richtung a (gestrichelte Sinuslinien zu den Punkten B und D).

Zur genauen geometrischen Beschreibung betrachte man Bild 5.76b (s. S. 470). Dort liegen die beiden Wellenzentren I und II in einem Koordinatensystem. Alle Punkte, deren Abstände r_1 und r_2 von I und II eine bestimmte Differenz $d = r_1 - r_2$ haben, liegen auf einem Hyperbelpaar¹⁾, ein solches

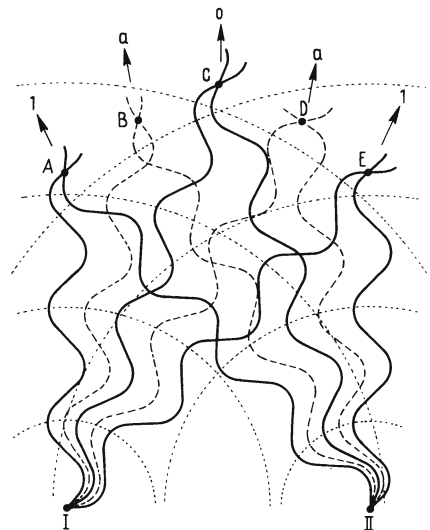


Bild 5.76a Erläuternde Details aus Bild 5.75
Die Wellen um die Zentren I und II sind sowohl als Kreisbögen (punktiert) als auch für einige Richtungen als Sinuslinien (ausgezogen und gestrichelt) gezeichnet.

¹⁾ s. z.B. [1], Abschn. 3.3.2.

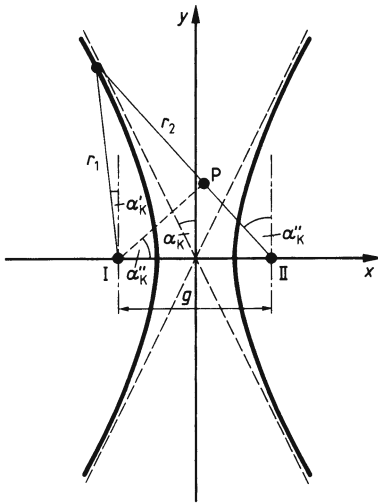


Bild 5.76b Erläuternde Details aus Bild 5.75 Die beiden Wellenzentren I und II im Abstand g sind in einem x - y -Koordinatensystem eingezeichnet; alle Punkte, deren Abstände r_1 und r_2 von I und II eine bestimmte Differenz d haben, liegen auf Hyperbeln, von denen ein Paar eingezeichnet ist.

ist (mit seinen langgestrichelten Asymptoten) eingezeichnet. Ist also diese Differenz gleich einem ganzzahligen Vielfachen von λ :

$$d = k \lambda \quad (\text{mit } k = 0; 1; 2 \dots)$$

dann sind die zugehörigen Hyperbelpaare die geometrischen Orte der Maxima 0-ter; 1-ter; 2-ter... k -ter Ordnung.

Für Entfernungen vom Ursprung, die groß sind gegen den Abstand g der Zentren, unterscheiden sich die Hyperbeln so gut wie nicht mehr von ihren Asymptoten, d.h. man kann als geometrischen Ort einfach die Asymptote angeben.

In Bild 5.76b ist kleingestrichelt das Lot von I auf r_2 gefällt (Fußpunkt P); dann ist die Strecke $\overline{IP} = r_2 - r_1 = d$ und

$$\sin \alpha''_k = d/g$$

für die schon genannte Bedingung „große Entfernung“ werden die Winkel α_k , α'_k und α''_k einander immer ähnlicher, wir können also $\sin \alpha_k = \sin \alpha''_k$ setzen, und mit $d = k \lambda$ wird die

Bedingung für die Richtungen α_k , in denen Intensitätsmaxima auftreten.

$$\sin \alpha_k = k \lambda / g$$

Dabei ist noch Folgendes zu betonen: Bei der Interferenz von Wellen muss eine wichtige Bedingung, nämlich die Kohärenzbedingung, erfüllt sein. Diese lautet: Interferenzen kommen nur dann zustande, wenn die interferierenden Wellen gleichzeitig durch das gemeinsame Medium laufen, wenn sie gleiche und konstante Frequenz haben und wenn der Gangunterschied d der Wellen konstant ist, wobei der Gangunterschied durch unterschiedliche Wege wie in Bild 5.76b, durch unterschiedliche Geschwindigkeiten oder durch verschiedene Nullphasenwinkel der Sender verursacht sein kann. Kohärenzlänge nennt man den maximalen Gangunterschied, den Wellengruppen endlicher Länge gegeneinander haben dürfen, sodass noch Interferenz eintritt.

Interferenz von Lichtwellen

Die Kohärenzbedingungen lassen sich oben bei den Wasserwellen ohne Weiteres erfüllen, indem man die Wellenzentren genügend lange im Gleichtakt erregt. Die Zentren von Licht-Lichtwellen jedoch sind immer einzelne, aber sehr viele Atome, und man kann diese –

außer beim Laser (s. Abschn. 6.1.3.1) – nicht so anregen, dass sie alle im Gleichtakt schwingen. Licht, das von verschiedenen Lichtquellen kommt, erfüllt daher die Kohärenzbedingungen nicht, kann also kein Interferenzmuster bilden. Man muss daher für Interferenzversuche das Licht von einer Lichtquelle aufteilen, zwischen diesen Teilen einen Gangunterschied erzeugen und sie dann wieder zusammenführen. Das Teilen wird häufig durch Beugung (s. Abschn. 5.2.6.4) ermöglicht.

□ **Versuch 32. Interferenz von Zylinderwellen** (Bild 5.77). Ein Doppelspalt aus zwei parallelen, etwa 0,1 mm dünnen Schnitten I und II im Abstand g (etwa 1 mm) in einer sonst lichtundurchlässigen Schicht 3 wird von unten mit Licht einer Wellenlänge oder eines engen Wellenlängenbereiches (sog. monochromatisches Licht) beleuchtet. Dadurch wird jeder Spalt zu einer sekundären Lichtquelle (s. Beugung Abschn. 5.2.6.4). Von jeder geht eine Welle mit zylinderförmigen Wellenfronten aus, analog zu den Kreiswellen in Versuch 31. (Gezeichnet sind davon nur einige Wellennormalen in den Richtungen 0; 1 und 2.) Diese beiden interferieren miteinander, und es bildet sich hier ein ganz analoges Interferenzmuster wie in Versuch 31 mit maximalen Intensitäten 0-ter, 1., ... Ordnung. Auf einem Schirm 4 sind abwechselnd helle und dunkle Streifen parallel zu den Spalten zu sehen, besonders dann, wenn man die einzelnen Wellenbündel mit einer Linse auf den Schirm fokussiert.

Wiederholt man den Versuch mit Licht einer anderen Frequenz und damit einer anderen Wellenlänge λ (Bild 5.77b), dann entstehen die Maxima 1., 2., ... Ordnung an anderen Stellen des Schirmes. Den vergrößerten Detailbildern in Bild 5.77a und b entnimmt man leicht, dass in großen Entfernungen, verglichen mit g , für die Richtungen, in denen Intensitätsmaxima auftreten, gilt

$$\sin \alpha_1 = \lambda/g \quad \text{und} \quad \sin \alpha_2 = 2\lambda/g \quad (5.100)$$

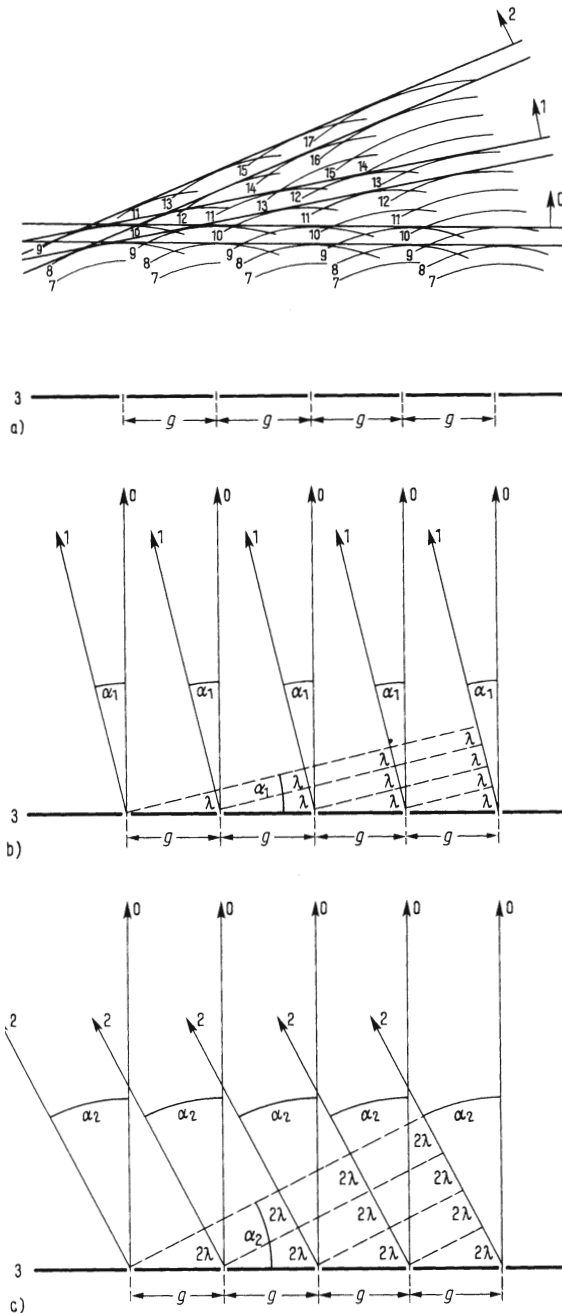


Bild 5.78 Interferenz von Zylinderwellen von einem ebenen Strichgitter

Das Interferenzmuster wird wesentlich deutlicher, wenn man statt der zwei Parallelspalte sehr viele – ein sog. ebenes Strichgitter (3 in Bild 5.78) – verwendet. Erhöht man dabei bei gleichbleibenden Abständen nur die Zahl der Spalte, so werden die einzelnen Maxima intensiver und schärfer. Meist ist jedoch mit der Erhöhung der Spaltzahl auch eine Verringerung der Spaltabstände verbunden (bei sog. Rowlandgittern hat man z.B. 1700 „Spalte“ pro mm). Dadurch vergrößern sich die Abstände der einzelnen Maxima auf dem Schirm.

Enthält das Licht mehrere diskrete Frequenzen, so erscheinen auch mehrere (verschiedenfarbige) Linien nebeneinander, ganz ähnlich den durch ein Prisma erzeugten Spektren in Abschn. 5.2.6.2. Die auffälligsten Unterschiede gegenüber den Prismenspektren sind, dass hier die violette Seite weniger abgelenkt erscheint als die rote, dass hier in jeder Ordnung ein Spektrum entsteht und dass in der 0-ten Ordnung das unzerlegte Licht erscheint, welches das Gitter ungestört passiert hat. \square

Bild 5.78a zeigt den Schnitt durch einen Teil eines ebenen Strichgitters 3. Von jedem Spalt gehen Zylinderwellen aus; Teile der Wellenberge zu einem bestimmten Zeitpunkt sind als Kreisbögen gezeichnet. Die Ziffern 7 bis 17 geben an, welchen Weg in Vielfachen der Wellenlänge der betreffende Wellenberg von seinem Ursprung her zurückgelegt hat. Die Überlagerung aller Zylinderwellen mit gleicher Ziffer (Gangunterschied 0) ergibt ebene Wellen, von denen zwei Wellenfronten mit ihrer Normalen in Rich-

tung 0 gezeichnet sind. Das ist also ein Parallellichtbündel, das ungestört durch das Gitter gegangen ist. Entsprechend ergibt die Überlagerung benachbarter Zylinderwellen mit dem Gangunterschied λ die ebenen Wellen in Richtung 1, die mit Gangunterschied 2λ in Richtung 2 usw. Diese ebenen Wellenbündel liefern die Intensitätsmaxima 0-ter, 1., 2., ..., k -ter Ordnung. In Bild 5.78b und c ist die gleiche Anordnung wie in a – jedoch nur mit Wellennormalen – nochmals gezeichnet (vgl. Bild 5.77).

Für die Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ zwischen dem Maximum 0-ter und dem 1., 2., ..., k -ter Ordnung ergibt sich

$$\sin \alpha_k = k \frac{\lambda}{g} \quad (5.101)$$

Der Abstand g der „Spalte“ oder Gitterstriche heißt Gitterkonstante.

Der Versuch 32 mit Gl. (5.101) erlaubt eine genaue Messung von Lichtwellenlängen.

Interferenz von ebenen Wellen. Zwei kohärente Lichtwellen mit Gangunterschied kann man z.B. dadurch erhalten, dass man eine ebene Welle an der Ober- und an der Unterseite einer keilförmigen Platte reflektieren lässt. Bild 5.79a zeigt einen Schnitt 1 durch eine solche Platte. Von rechts oben fällt eine ebene Welle ein, von der der Übersichtlichkeit halber nur die Wellennormale gezeichnet ist. An den Grenzflächen wird jeweils ein Teil reflektiert (an der ersten mit Phasensprung)¹⁾ und ein Teil gebrochen. Diejenigen beiden Teile der ebenen Welle, die in Bild 5.79a ausgezogen sind, sind in b als Momentaufnahme dargestellt. Dabei sollen die schwarzen Streifen die positiven Halbwellen, die weißen Zwischenräume die negativen Halbwellen bedeuten. Im Raum über der Platte sind die beiden ebenen Wellen leicht gegeneinander geneigt und haben wegen der verschiedenen langen Wege, die sie zurückgelegt haben, einen Gangunterschied, der von rechts nach links mit dicker werdender Platte zunimmt. Man sieht ebenso wie in Bild 5.75 und 5.77 Richtungen mit maximaler Intensität. Die Zahlen 4, 5 und 6 bezeichnen die Ordnung, d.h. das Vielfache der Wellenlänge, das die beiden interferierenden Wellen beim betreffenden Maximum als Gangunterschied haben²⁾. Fällt das Licht auf einen Schirm 2 (Bild 5.79a), so beleuchtet es

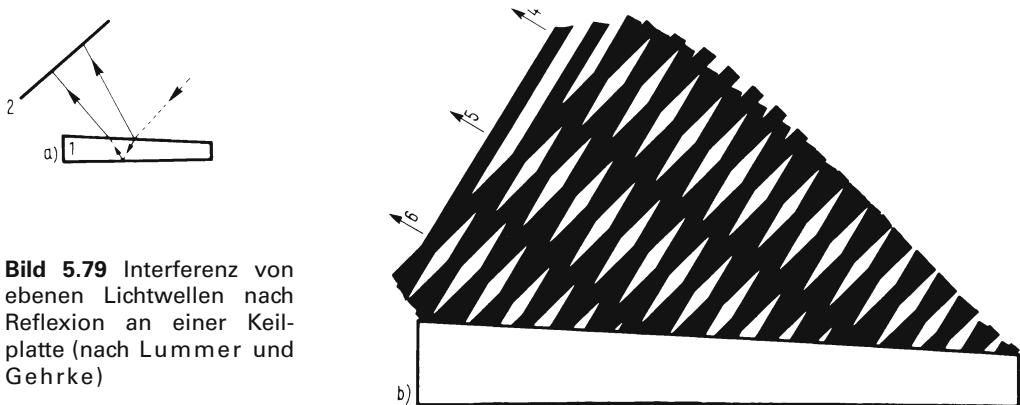


Bild 5.79 Interferenz von ebenen Lichtwellen nach Reflexion an einer Keilplatte (nach Lummer und Gehrke)

1) Sozusagen am „festen Ende“, vgl. Abschn. 5.2.3.

2) In Wirklichkeit sind die Platten im Verhältnis zur Wellenlänge rund 5000 mal so dick, und um diesen Faktor sind auch die Ordnungszahlen höher.

diesen in einzelnen parallelen Streifen, fokussiert man es mit einer Linse auf den Schirm, so erhält man die gleichen Linien wie oben von einem Strichgitter, und aus Lichtwellen mit mehreren Frequenzen entstehen ebenso Spektren. Anordnungen mit dieser Wirkung nennt man allgemein Interferometer.

Denkt man sich in Bild 5.79 statt der beiden gegeneinander geneigten Grenzflächen zwei planparallele, so ist der Gangunterschied der beiden interferierenden Wellen überall gleich. Je nach Dicke und Brechzahl der Platte und je nach Einfallswinkel und Wellenlänge des Lichtes löschen sich die Teilwellen dann überall aus oder addieren sich überall. Nur wenn alle möglichen Einfallrichtungen vorkommen, z.B. wenn das Licht von einer großen, diffus leuchtenden Fläche einfällt, erscheinen im ausfallenden Licht wieder Intensitätsmaxima und -minima in Abhängigkeit vom Ausfallswinkel. Enthält das Licht mehrere Frequenzen, so entstehen entsprechende Spektren. Diese sind als sog. Farben dünner Plättchen von Ölfilmen auf Wasser oder von Seifenblasen allgemein bekannt.

Interferenz von Kugel- und ebenen Wellen erhält man z.B. durch eine Anordnung nach Bild 5.80. Dort stehen sich die kugelförmige Grenzfläche 1 einer plankonvexen Linse und die ebene Grenzfläche 2 einer planparallelen Platte gegenüber. Eine z.B. von unten einfallende ebene Lichtwelle wird u.a. an der Kugelfläche 1 und an der Ebene 2 reflektiert.

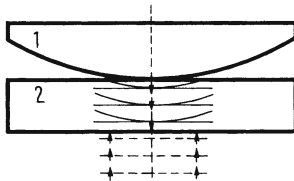


Bild 5.80 Zur Entstehung von Newtonschen Ringen

Dadurch entsteht eine Kugelwelle bzw. eine ebene Welle (vgl. Abschn. 5.2.6.1). Deren Gangunterschied nimmt mit dem radialen Abstand vom Berührungspunkt zu. Daher ist ihr Interferenzmuster ein System von konzentrischen hellen und dunklen oder farbigen Kreisringen um die gestrichelte Symmetrielinie (Bild 5.82a). Das sind die sog. Newtonschen Ringe¹⁾. Das Gleiche geschieht im Prinzip auch mit den nicht reflektierten, den durchgehenden Teilen der Lichtwelle.

Bei Glasdiapositiven spielt häufig der etwas gekrümmte Film die Rolle der Fläche 1, die anliegende Glasplatte die der Fläche 2. Dadurch sind bei der Projektion oft farbige Ringe in einfarbigen hellen Bildteilen zu sehen. Allerdings ist der Film nicht kugelförmig gekrümmt und deshalb hat auch die davon ausgehende Welle komplizierte Wellenfronten. Daher ist das Interferenzmuster entsprechend verformt.

Interferenz von Kugelwellen erhält man z.B., wenn man die von einer annähernd punktförmigen Lichtquelle ausgehende Kugelwelle an der Vorder- und Rückseite einer planparallelen Platte, z.B. einer Glimmerscheibe, reflektieren lässt. Als Interferenzmuster entstehen – ähnlich wie oben – konzentrische Kreisringe, abwechselnd hell und dunkel bei einfarbigem Licht oder farbig bei mehrfarbigem Licht. Verbiegt man die Glimmerschicht etwas, so verformen sich auch die Interferenzringe.

Wir fassen die einzelnen Aussagen über die Interferenz von Licht zusammen:

Bei der Interferenz von Zylinder- und ebenen Wellen bestehen die Interferenzmuster aus geraden parallelen Streifen. Interferieren konzentrische Kugelwellen oder eine Kugelwelle und eine ebene Welle, so sind die Interferenzmuster konzentrische Kreisringe. Haben die interferierenden Wellen geometrisch komplizierte Wellenfronten, so bestehen auch die Interferenzmuster aus komplizierteren Figuren.

¹⁾ Transparente Schwarzweißaufnahmen solcher Ringe oder von Bild 5.82a sind sog. Fresnelsche Zonenplatten, die wie Sammellinsen fokussierend wirken können.

Holografie

Hologramme kennt wohl jeder, z.B. von Scheckkarten. Das Prinzip dieses fotografischen Verfahrens, das es ermöglicht, von Gegenständen räumliche Bilder herzustellen und wiederzugeben, zeigt Bild 5.81: Das kohärente monofrequente Lichtbündel 1 z.B. eines Lasers (s. Abschn. 6.1.3.1) trifft z.T. auf einen Spiegel 2 und wird zur Fotoplatte 3 reflektiert. Dieser Teil dient als sog. Referenzwelle; mit dem anderen wird der aufzunehmende Gegenstand 4 beleuchtet. Von jedem Punkt seiner Oberfläche geht dann je eine Kugelwelle aus, die jede mit der Referenzwelle interferiert. Die Fotografie des entstehenden Interferenzmusters nennt man ein Hologramm. Bestünde der Gegenstand 4 in Bild 5.81 nur aus einem Punkt, so würde dieses Hologramm wie Bild 5.82a aussehen: ein konzentrisches Ringsystem. In Bild 5.82b ist 1 ein Stück einer derartigen Fotoplatte im Querschnitt gezeichnet. Von unten trifft eine ebene Welle 2 darauf. Dadurch wird nach dem Huygens-Fresnelschen Prinzip jeder Punkt der Platte, der transparent geblieben ist, weil er nicht belichtet wurde, zum Ausgangspunkt einer Elementarwelle. Einige davon sind als Kreisbögen gezeichnet. Die fortschreitenden Wellen sind die Resultierenden der Elementarwellen, d.h. ihre Wellenfronten sind die einhüllenden Tangentialflächen. In Bild 5.82b sind zwei Gruppen solcher Einhüllender gezeichnet¹⁾: einerseits die Wellenfronten 3, die konkav gekrümmt sind, also ein konvergentes Lichtbündel darstellen, das in einen (nicht gezeichneten) „reellen Bildpunkt“ zusammenläuft und danach von diesem ausgeht; andererseits die Wellenfronten 4, die konvex gekrümmt sind, also ein divergentes Lichtbündel darstellen, das von einem „virtuellen Bildpunkt“ zu kommen scheint. Das Hologramm, das aus der ebenen Welle des Referenzbündels und aus der Kugelwelle eines Objektpunktes entstanden ist, liefert also (bei Beleuchtung mit einer ebenen Welle!) ein reelles und ein virtuelles Bild des Objektpunktes (vgl. Abschn. 4.1.2.3). Besteht nun der holografiierte Gegenstand nicht aus einem, sondern aus vielen Punkten, wie in Bild 5.81, so besteht das zugehörige Hologramm nicht aus einem konzentrischen Ringsystem, sondern aus der Überlagerung entsprechend vieler Ringsysteme. Jedes von ihnen erzeugt bei Beleuchtung mit einer ebenen Welle von „seinem“ Objektpunkt einen reellen und einen virtuellen Bild-

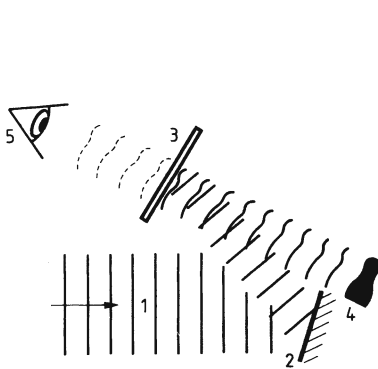


Bild 5.81 Herstellung und Betrachtung eines Hologramms

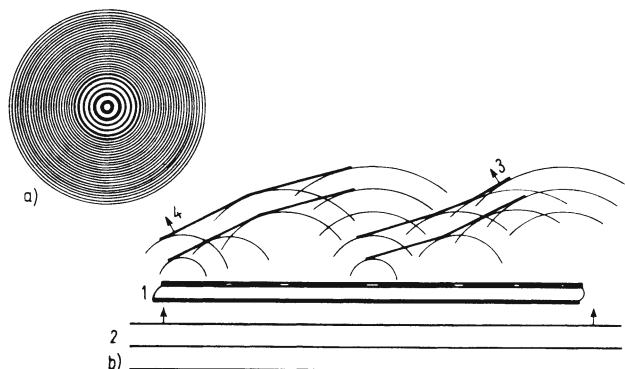


Bild 5.82 a) Aufnahme: Newtonsche Ringe = Fresnelsche Zonenplatte
b) Prinzip der Hologrammwiedergabe

¹⁾ Vgl. mit Bild 5.78

punkt, zusammen ein räumliches reelles und ein räumliches virtuelles Bild¹⁾. Von diesen Bildern gehen Wellen genauso aus – bzw. scheinen auszugehen –, als ob der Gegenstand selbst da wäre. Man kann sie unter verschiedenen Blickwinkeln betrachten und hat dabei einen echten räumlichen Eindruck oder man kann sie (z.B. auch mit verschiedenen Abbildungsmaßstäben) konventionell fotografieren. Verwendet man zur Wiedergabe des Hologramms eine ebene Welle mit größerer oder kleinerer Wellenlänge, so werden auch die Bilder größer bzw. kleiner.

Interferenz von Röntgenwellen

Die Brechzahl für Röntgenwellen ist bei allen Stoffen annähernd gleich 1, weswegen es keine Linsen für Röntgenstrahlen gibt. Materie reflektiert und absorbiert diese Wellen nur äußerst schwach und die Erzeugung „glatter“ Oberflächen mit Unebenheiten kleiner als die Wellenlänge ist äußerst schwierig und gelingt erst in jüngerer Zeit (1990), weswegen man lange auch keine Spiegel für Röntgenstrahlen hatte. Aus beiden Gründen gab es bis vor kurzem keine Abbildung wie in der Lichtoptik. Ebenfalls wegen der kleinen Wellenlänge (sowie wegen der minimalen Reflexion, Absorption und Brechung) lassen sich keine Strichgitter mit Strichabständen in der Größenordnung der Wellenlänge herstellen. Aus all diesen Gründen kann man nach den oben für Licht aufgeführten Methoden Interferenzen von Röntgenstrahlen nicht ohne weiteres beobachten²⁾. Trotzdem gelang es Max v. Laue (1879 bis 1960), Sir W. H. Bragg (1862 bis 1942), Sir W. L. Bragg (1890 bis 1971), Peter Debye (1884 bis 1966), Paul Scherrer (1890 bis 1969) und anderen, Interferenz von Röntgenstrahlen zu erzeugen. Im Wesentlichen dienen dazu die im Kristall regelmäßig angeordneten Atome. Sie bilden ein räumliches Punktgitter wie z.B. in Bild 5.83.

Zum genaueren Verständnis der Röntgeninterferenz betrachte man Bild 5.84a, das einen Schnitt durch einen Kristall darstellt. Die Punkte („Gitterpunkte“) sind die Atome, Moleküle oder Ionen, aus denen der Kristall besteht. Die gestrichelten Geraden a, b, c usw.

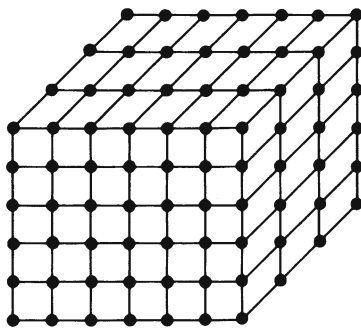


Bild 5.83 Kristall als räumliches Punktgitter

sind die Spuren von (gedachten) parallelen Ebenen senkrecht zur Zeichenebene, die so im Kristall liegen, dass auf ihnen Gitterpunkte regelmäßig angeordnet sind. Man nennt solche Ebenen Netzebenen. Natürlich kann man sich noch weitere derartige Gruppen von Netzebenen durch einen Kristall denken, z.B. die Gruppe, die aus den Ebenen A, B, C usw. besteht.

Die ausgezogenen Geraden 1 sollen Normalen eines ebenen Wellenbündels darstellen, das von links oben einfällt. Die zugehörigen Wellenfronten sind der Übersichtlichkeit halber nur am Anfang der Normalen angedeutet.

¹⁾ Praktisch benutzt man immer das virtuelle Bild, u.a. weil das reelle „pseudoskopisch“ ist, d.h. dass hohle Bildteile erhaben wirken und umgekehrt.

²⁾ Nur bei fast streifendem Einfall sehr langwelliger Röntgenwellen auf ein konventionelles Strichgitter, z.B. aus Silber, entstehen messbare Interferenzmuster wie bei Licht.

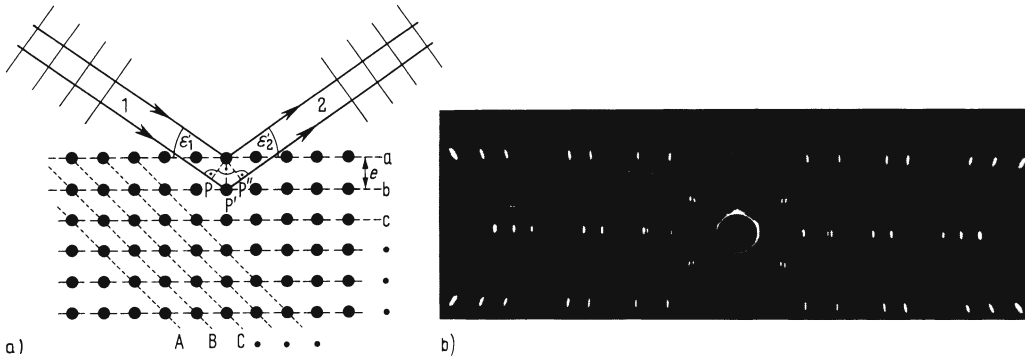


Bild 5.84 a) Ebener Schnitt durch einen Kristall
b) Interferenzmuster durch Röntgenstrahlen (Drehkristallverfahren)

Treffen diese Wellenfronten auf die Netzebene a, so werden alle Gitterpunkte nach dem Huygens-Fresnelschen Prinzip Ausgangspunkte von Elementarwellen, die zusammen eine neue Welle bilden: Die Geraden 2 sind Normalen dazu; an ihren Enden sind die Wellenfronten angedeutet. Das ist prinzipiell die gleiche Reflexion wie in Abschn. 5.2.6.1 mit den gleichen geometrischen Überlegungen wie in Abschn. 5.2.6.2 (Bild 5.68). Also gilt das dort gefundene Reflexionsgesetz

$$\varepsilon'_1 = \varepsilon'_2$$

Allerdings ist wegen der geringen Wechselwirkung zwischen Röntgenwelle und Materie die Intensität der nur an a reflektierten Welle äußerst gering. Aber im Kristall folgen ja viele weitere parallele Netzebenen b, c usw., die alle unter dem gleichen Winkel ε'_1 getroffen werden und alle in die gleiche Ausfallsrichtung reflektieren. All diese reflektierten Wellen können sich gegenseitig verstärken, d.h. ein Intensitätsmaximum in Richtung ε'_2 bilden, wenn ihre Gangunterschiede alle ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge λ sind.

In Bild 5.84a ist der Gangunterschied d zwischen Wellen von benachbarten Ebenen (hier a und b) zu sehen. Man entnimmt leicht, dass bei vorgegebenem Abstand e der einzelnen Netzebenen einer Gruppe gilt:

$$d = \overline{PP'} + \overline{P'P''} \quad \text{und} \quad \overline{PP'} = \overline{P'P''} = d/2 = e \sin \varepsilon'_1$$

$$\text{also } d = 2e \sin \varepsilon'_1$$

Die Gangunterschiede zwischen Wellen von weiter auseinanderliegenden Ebenen, z.B. a und c, sind ganzzahlige Vielfache davon. Daher lautet die Bedingung für das Zustandekommen eines Intensitätsmaximums, die

Braggsche Bedingung:

$$2e \sin \varepsilon'_1 = k \lambda \quad \text{mit} \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (5.102)$$

Wir wollen dieses Wellenbündel, diesen „Strahl“, der sowohl durch Reflexion, als auch durch Interferenz gerade in die Richtung 2 (Bild 5.84a) zustande kommt, im Folgenden kurz einen Reflex und die Winkel $\varepsilon'_1 = \varepsilon'_2$ Glanzwinkel nennen.

Richtet man einen Röntgenstrahl mit nur einer Wellenlänge λ unter einem festen Winkel auf einen in sich einheitlichen Kristall, so erhält man nur zufällig einen Reflex, wenn zufällig eine der denkbaren Netzebenen Gruppen den richtigen Glanzwinkel ε'_1 und den richtigen Ebenenabstand e hat, um die Braggsche Bedingung zu erfüllen. Um mit Sicherheit einen oder mehrere Reflexe zu erhalten, muss man von den drei Größen in Gl. (5.102) entweder ε'_1 oder λ oder beide variieren.

So rotiert z.B. beim Drehkristallverfahren (Bragg) der Kristall langsam, sodass nacheinander jede Netzebenen Gruppe einen passenden Glanzwinkel ε'_1 hat und ein Reflex entsteht (Bild 5.84b). Beim Debye-Scherrer-Verfahren dagegen liegt der Kristall, der untersucht werden soll, zerkleinert zu lauter Bruchstücken – als Kristallpulver – vor. Dadurch haben alle Netzebenen Gruppen statistisch verteilt alle Glanzwinkel, darunter auch alle jene, die Gl. (5.102) erfüllen; dadurch treten sämtliche Reflexe auf.

Richtet man andererseits einen Strahl mit mehreren Wellenlängen auf einen Kristall, so erhalten die einzelnen Reflexe in den verschiedenen Richtungen jeweils nur eine Wellenlänge, d.h. das einfallende Wellenlängengemisch wird spektral zerlegt. Um allerdings alle Wellenlängen des einfallenden Strahls zu erfassen, d.h. um ein vollständiges Spektrum zu bekommen, muss der Glanzwinkel ε'_1 wieder durch Drehen des Kristalls variiert werden.

Anwendungen. Spektren, die mit Hilfe von Strichgittern erzeugt werden, dienen ebenso wie die von Prismen zu atomphysikalischen Untersuchungen und zur Spektralanalyse. Mit sog. Interferometern, deren einfachste Form eine Keilplatte (Bild 5.79) ist, erreicht man sehr hohe spektrale Auflösungen. Sie dienen daher zur Untersuchung der feinsten Details von Spektren. Mit der Holografie lassen sich kleinste Formänderungen sichtbar machen und vermessen: Dazu wird das entwickelte Hologramm exakt an der Stelle belassen, an der es belichtet wurde (3 in Bild 5.81), ebenso der Gegenstand (4 in Bild 5.81). Dann müssen Hologramm- und Objektwelle identisch sein. Geringfügige Formänderungen des Objektes (z.B. durch Temperaturänderung) verändern die Objektwelle; dadurch entstehen Interferenzen, aus denen die Formänderungen berechnet werden können. Die Röntgeninterferenzen sind das wichtigste Mittel zur Aufklärung von Kristallstrukturen.

5.2.6.4 Beugung und Streuung

Immer dann, wenn eine Welle durch ein Hindernis an ihrer allseitigen Ausbreitung gehindert wird, sich z.B. nur durch ein Loch in einer Wand oder an einer Kante vorbei ausbreiten kann, zeigt sich Folgendes: Die Welle wird um die Begrenzung, z.B. um den Rand des Loches oder um die Kante herum gebeugt, d.h. sie gelangt auch in den Raum dahinter, der rein geometrisch „im Schatten“ liegen sollte. Gleichzeitig tritt dabei auch meist Interferenz auf. Beobachten wir zunächst Wasserwellen:

□ **Versuch 33. Beugung von Wasserwellen.** In Bild 5.85a läuft eine gerade Welle in Pfeilrichtung auf eine Wand 1 mit einem Durchbruch zu und wird von dieser teilweise an der weiteren Ausbreitung gehindert. Hinter der Wand beobachtet man auch außerhalb der gestrichelt eingezeichneten geometrischen Schattengrenzen einzelne Wellenbündel in bestimmten Richtungen und dazwischen Streifen ohne Intensität (vgl. Bild 5.75 und 5.77). Verkleinert man die Öffnung (Bild 5.85b) oder vergrößert man die Wellenlänge, so bilden die Minima mit der Richtung der geraden Welle größere Winkel. Ist schließlich die Öffnung kleiner als eine Wellenlänge (Bild 5.85c), so gehen von ihr Kreiswellen aus, die Öffnung ist ein „sekundäres Wellenzentrum“.

Bringt man an die Stelle der Öffnung in einer Wand ein gleichgroßes Hindernis (Bild 5.86), so erfolgt im Prinzip das Gleiche: Die Wellen werden in den Raum hinter dem Hindernis

hineingebeugt. Dadurch werden die geometrischen Schattengrenzen verwischt (a). Bei relativ zur Wellenlänge kleinerem Hindernis (b) verschwindet die Wirkung des Hindernisses nach einer gewissen Strecke fast. Ist schließlich das Hindernis kleiner als die Wellenlänge (c), so spricht man von Streuung: Die ursprüngliche Welle bleibt fast ungestört, vom Hindernis geht nur eine schwache Kreiswelle aus. Um diese beobachten zu können, lässt man am besten nur eine kurze Wellengruppe über das Hindernis laufen. □

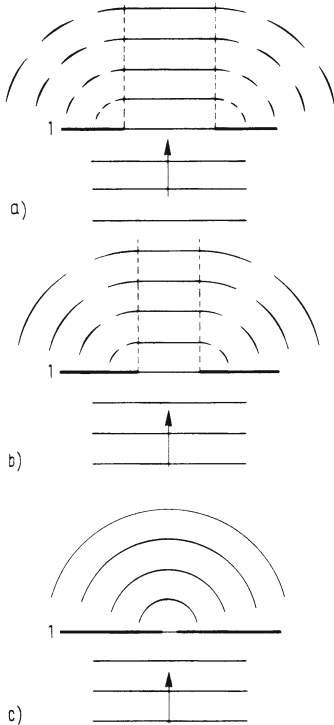


Bild 5.85 Beugung von Wasserwellen an Öffnungen

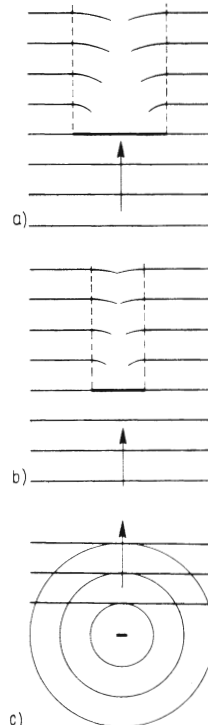


Bild 5.86 Beugung und Streuung von Wasserwellen an Hindernissen

Die Erklärung dafür, dass überhaupt Wellen in den Schattenraum gelangen, liefert wieder das Huygens-Fresnelsche Prinzip: Jeder Punkt des Mediums, also z.B. auch jeder Punkt in der Öffnung oder an den Hinderniskanten ist Ausgangspunkt einer Elementarwelle. Alle Elementarwellen überlagern sich innerhalb der geometrischen Schattengrenzen zu geraden Wellen, außerhalb zu dem abgebildeten Interferenzmuster, das ganz ähnlich zustande kommt wie bei einem Strichgitter (Bild 5.78). Prinzipiell genauso verhalten sich Lichtwellen:

□ **Versuch 34. Beugung von Lichtwellen.** In Bild 5.87a wirft von links kommendes Licht z.B. eines He-Ne-Lasers den Schatten eines Drahtes 1 (senkrecht zur Zeichenebene) auf den Schirm 2. Bild 5.87b zeigt das Positiv der Fotografie dieses Schattens. Die geometrische Schattengrenze ist darin gestrichelt eingezeichnet; demgegenüber ist die tatsächliche Grenze unscharf. Außerdem sieht man auch innerhalb dieser Grenzen in der Mitte einen hellen Streifen. Umgekehrt gibt es auch außerhalb Stellen mit verminderter Intensität (dunkle Streifen).

Ersetzt man den Draht 1 durch einen ebenso breiten Spalt in einem lichtundurchlässigen Schirm an der Stelle 1, so entsteht ein Schatten wie in Bild 5.87c mit ähnlichen Erscheinungen wie im vorigen Fall.

Bild 5.87d zeigt schließlich den Schatten, der auf dem Schirm 2 entsteht, wenn sich an der Stelle 1 ein kreisrundes Loch in einem sonst lichtundurchlässigen Schirm befindet. In Bild 5.87e ist die Intensitätsverteilung entlang einer Geraden durch die Beugungsfigur (Bild 5.87d) aufgezeichnet. □

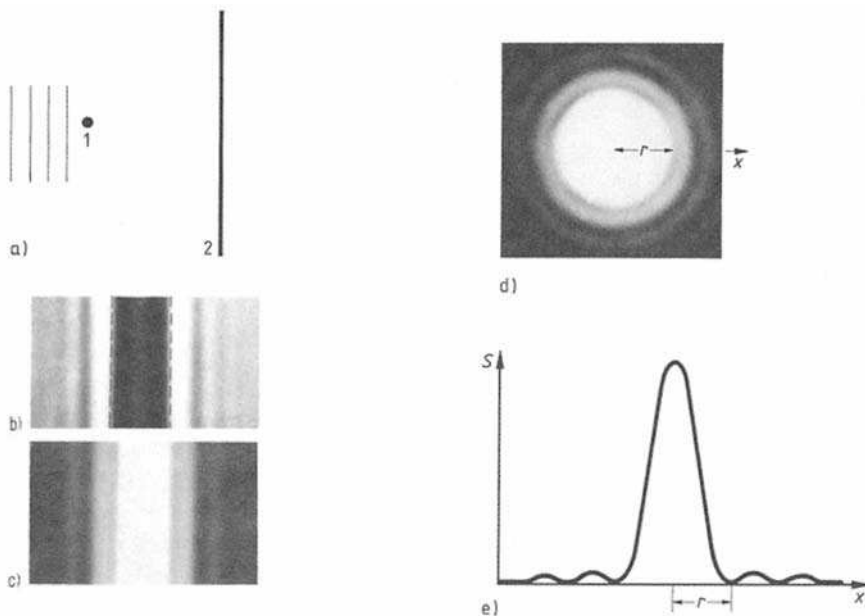


Bild 5.87 Beugung von Lichtwellen

Für den Fall des Spaltes (Bild 5.87c) wollen wir die Erscheinung mit Hilfe des Huygens-Fresnelschen Prinzips erklären: Bild 5.88a zeigt einen Schnitt durch den lichtundurchlässigen Schirm senkrecht zum Spalt mit der Breite s . Von jedem Punkt, also auch von den eingezeichneten 12 Punkten, geht je eine Elementarwelle aus. Daher gelangt nicht nur in die Richtung 0, sondern zunächst auch in alle anderen Richtungen Licht. Davon sind in der Richtung α 12 Wellennormalen gezeichnet. Bild 5.88b zeigt im Detail zwei der Punkte im Abstand s/N und zwei der Normalen; fällt man von der einen auf die andere das Lot, so sieht man den Gangunterschied $d = (s/N) \sin \alpha$ zwischen zwei benachbarten Wellen. Dem entspricht die Phasenverschiebung

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{s}{N} \sin \alpha$$

Mit Hilfe des Zeigerdiagramms Bild 5.88c erhält man die resultierende Amplitude \hat{y}_R . Hierbei sei \hat{y}_0 die Amplitude der ursprünglichen Welle, \hat{y}_0/N die einer Elementarwelle. Man liest ab:

$\frac{1}{2} \hat{y}_R = r \sin \varphi$, also $\hat{y}_R = 2r \sin \varphi$. Hierbei ist (wegen $N \rightarrow \infty$)

$$2r \varphi = N \frac{\hat{y}_0}{N} = \hat{y}_0 \quad \text{und} \quad 2\varphi = N \Delta \varphi = N \frac{2\pi}{\lambda} \frac{s}{N} \sin \alpha,$$

$$\text{also } \varphi = \frac{\pi}{\lambda} s \sin \alpha \tag{5.103}$$

und mit $r = \hat{y}_0 / 2\varphi$ wird schließlich die resultierende Amplitude

$$\hat{y}_R = \hat{y}_0 \frac{\sin \varphi}{\varphi} \tag{5.104}$$

Die Intensität S ist bekanntlich dem Quadrat der Amplitude proportional, also haben wir hier die resultierende Intensität

$$S_R = S_0 \frac{\sin^2 \varphi}{\varphi^2} \tag{5.105}$$

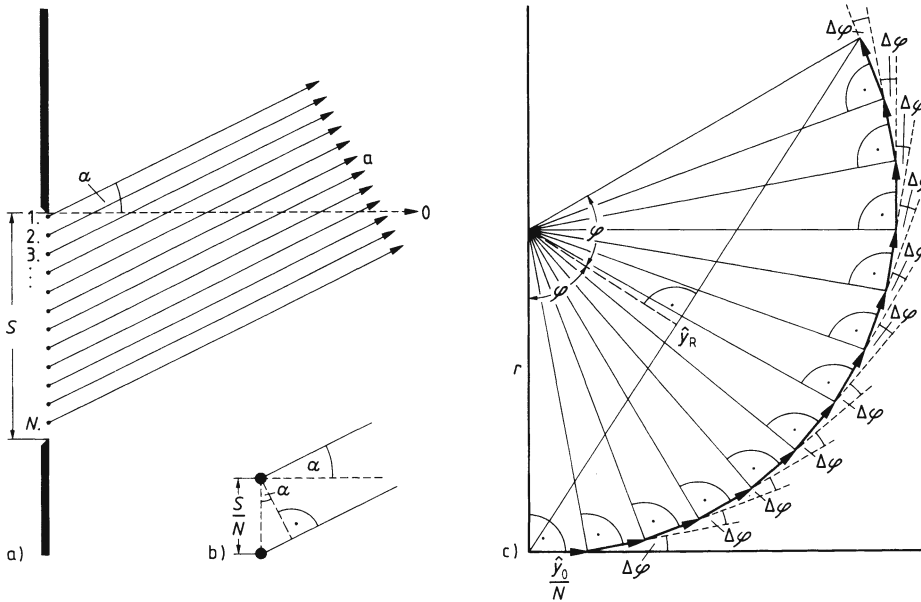


Bild 5.88 Zur Beugung am Spalt; hier ist $N = 12$ gezeichnet, in Wirklichkeit muss natürlich $N \rightarrow \infty$ angenommen werden.

Um nun eine Aussage zu erhalten, in welchen Richtungen α die Intensität Extrema hat, differenzieren wir diese Gleichung nach φ :

$$\frac{dS_R}{d\varphi} = S_0 \frac{\varphi^2 2 \sin \varphi \cos \varphi - \sin^2 \varphi 2\varphi}{\varphi^4}$$

und setzen die Ableitung gleich Null: $0 = \varphi \sin \varphi (\varphi \cos \varphi - \sin \varphi)$; dies ist der Fall, wenn die einzelnen Faktoren der rechten Seite null sind, also

1. wenn $\varphi = 0$ ist, d.h. in der Richtung $\alpha = 0$, dies ergibt das Maximum 0-ter Ordnung¹⁾

2. wenn $\sin \varphi = 0$ ist, d.h. wenn $\varphi = m \pi$ ist ($m = 1; 2; 3 \dots$) also mit Gl. (5.103) wenn $m \pi = (\pi s/\lambda) \sin \alpha$ ist; das sind die mit m nummerierten Nullstellen (Intensitätsprisma) in den Richtungen α_m

Bei der Beugung am Spalt mit der Breite s entstehen Intensitätsminima unter den Winkeln α_m , wenn

$$\sin \alpha_m = m \frac{\lambda}{s} \quad (m = 1; 2; 3; \dots). \quad (5.106)$$

3. Wenn $\varphi \cos \varphi - \sin \varphi = 0$, d.h. wenn $\varphi \cos \varphi = \sin \varphi$ ist. Das ergibt die Bedingung für die Intensitätsmaxima 1., 2., 3... Ordnung:

$\varphi = \tan \varphi$, die erfüllt wird für die Phasenverschiebungen

$\varphi_1 = 4,493$; $\varphi_2 = 7,725$; $\varphi_3 = 10,904$; ... also nicht, wie man annehmen könnte, für Werte

$3/2 \pi = 4,712$; $5/2 \pi = 7,854$; $7/2 \pi = 10,996$; ... allerdings sind die Abweichungen kleiner als 5%

Einsetzen dieser Werte in Gl. (5.105) ergibt schließlich die Intensitäten in den Maxima (im Verhältnis zur ursprünglichen Intensität):

$$S_1/S_0 = 0,047; \quad S_2/S_0 = 0,016; \quad S_3/S_0 = 0,008; \dots$$

Für die Beugung an der kreisrunden Öffnung gelten entsprechende Überlegungen, und es ergibt sich eine ähnliche Gleichung wie (5.106).

Die Streuung von Lichtwellen an Rauchteilchen und Nebeltröpfchen ist allgemein bekannt. Die Intensität des gestreuten Lichtes ist der 4. Potenz seiner Frequenz proportional. Aus einem Frequenzgemisch, wie z.B. dem Sonnenlicht, wird also vorwiegend der hochfrequente Anteil (blau und violett) z.B. an den Luftmolekülen zur Seite gestreut. Daher erscheint uns der Himmel blau und die untergehende Sonne rot.

Auflösungsgrenze von optischen Instrumenten.²⁾ Bei allen optischen Geräten werden Lichtwellenbündel durch die Fassungen der Linsen oder durch Blenden begrenzt. Dadurch entstehen immer Beugungserscheinungen. Man denke sich in Bild 5.87a als (sekundäre) Lichtquelle ein kleines Loch („Gegenstands- oder Objektpunkt“) und an der Stelle 1 eine Linse mit dem Durchmesser s . Dann entsteht auf dem Schirm 2 genau genommen kein Bildpunkt im Sinne der Strahlenoptik, sondern eine Beugungsfigur ähnlich Bild 5.87d. Ist die Objektweite groß gegen die Brennweite f und somit die Bildweite gleich der Brennweite³⁾, so folgt für den Radius r der inneren Beugungsscheibe bis zum ersten Minimum (Bild 5.87d und e)

¹⁾ $\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\sin \varphi}{\varphi} = 1.$

²⁾ Ernst Abbe (1840 bis 1905).

³⁾ Dies ist beim Fernrohr und beim Auge der Fall.

$$r \approx f \frac{\lambda}{s} \quad (5.107)$$

Von einem zweiten Gegenstandspunkt neben dem ersten entsteht auch eine zweite Beugungsfigur. Falls die beiden Beugungsfiguren näher als r beieinander liegen (Bild 5.89), kann man sie nicht mehr als getrennte „Bildpunkte“ wahrnehmen oder „auflösen“, auch nicht durch eine nachträgliche Vergrößerung mit Hilfe einer Lupe oder eines Okulars.

Der so festgelegte Minimalabstand r in Gl. (5.107) bestimmt auch einen Minimalwinkel φ , unter dem die beiden Gegenstandspunkte mindestens erscheinen müssen.

Aus $\tan \varphi = r_{\min}/f$ und Gl. (5.107) und weil für die oben schon vorausgesetzten kleinen Winkel $\tan \varphi \approx \varphi$ ist, ergibt sich für die

Auflösungsgrenze bei großen Gegenstandsweiten, z.B. bei Fernrohren:

$$r_{\min} \approx f \lambda / s \quad \text{oder} \quad \varphi_{\min} \approx \lambda / s$$

Ein großer Linsen- oder Hohlspiegeldurchmesser s erhöht also nicht nur die Lichtstärke (vgl. Abschn. 4.2.2), sondern verkleinert auch die Auflösungsgrenze.

Beispiel 1. Der Spiegeldurchmesser s eines astronomischen Fernrohres (z.B. auf dem Mt. Palomar) beträgt 5 m; mit einer Wellenlänge $\lambda = 500 \text{ nm}$ ergibt das ein $\varphi_{\min} = 10^{-7}$. Das bedeutet, dass auf dem Mond, also in rund 381 000 km Entfernung, zwei Punkte im Abstand von 40 m gerade noch getrennt gesehen werden könnten.

Beispiel 2. Bei heller Beleuchtung hat die Augenpupille einen Durchmesser $s \approx 2 \text{ mm}$. Die Brennweite der Linse ist etwa 22 mm. Die intensivste Frequenz des Sonnenlichtes $6,25 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ hat im Augeninneren wegen der Brechzahl $n = 1,33$ die Wellenlänge $\lambda = 360 \text{ nm}$. Damit ergibt sich der Minimalabstand $r = 4 \text{ }\mu\text{m}$, ein Wert, der auch ungefähr durch den Abstand der Sehzellen vorgegeben ist (vgl. Abschn. 4.2.1).

Die Auflösungsgrenze bei geringer Objektweite, z.B. beim Mikroskop, erhält man anhand von Bild 5.90a. In der Objektenebene 1 sind als Gegenstand zwei Spalte A und B im Abstand g . Sie werden von unten mit Licht der Wellenlänge λ beleuchtet.

Nach dem Fresnel-Huygensschen Prinzip gehen von ihnen Zylinderwellen aus, von denen der Einfachheit halber wieder nur einige Wellennormale („Strahlen“) gezeichnet sind (vgl. Versuch 32). Das Licht gelangt in das Objektiv 2 und das Okular 3 (vgl. Abschn. 4.2.2).

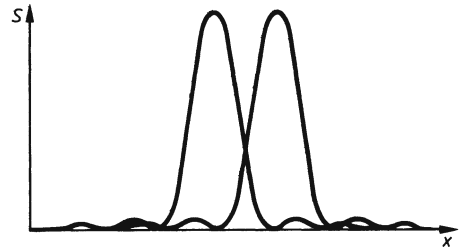


Bild 5.89 Überlagerung zweier Beugungsfiguren wie in Bild 5.87d und e

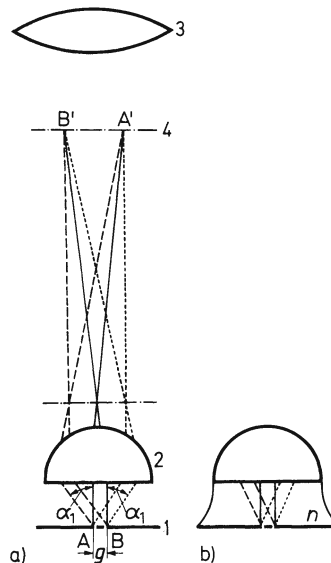


Bild 5.90 a) Auflösungsgrenze eines Mikroskops, b) Immersion

Kommt nur das ausgezogen gezeichnete Licht ins Objektiv, das die Spalte ungebeugt passiert hat, also das Licht 0-ter Ordnung, so sieht man durch das Okular 3 kein strukturiertes Bild, sondern nur eine gleichmäßig helle Fläche. Zur Entstehung eines Bildpunktes sind nämlich mindestens zwei sich schneidende, also aus verschiedenen Richtungen kommende „Strahlen“ nötig. Nur wenn auch das Licht, das am Gegenstand gebeugt wurde, mit zur Abbildung beiträgt, entsteht an der Stelle 4 ein Bild. Wegen der Interferenz tritt das gebeugte Licht aber nur unter bestimmten Winkeln α_k auf. Das Objektiv muss also mindestens das gestrichelt und punktiert gezeichnete Licht der 1. Ordnung mit erfassen. Dieses hat gegen die 0-te Ordnung den Winkel α_1 , für den nach Gl. (5.99) $\sin \alpha_1 = \lambda/g$ ist.

Unterschreitet g bei vorgegebener Wellenlänge λ einen Mindestwert g_{\min} , so überschreitet α_1 einen durch die Objektweite (Brennweite) und den Objektivdurchmesser vorgegebenen Höchstwert α_{\max} , sodass das Licht der 1. Ordnung nicht mehr ins Objektiv fällt. Nach Gl. (5.99) ist dieses

$$g_{\min} = \frac{\lambda}{\sin \alpha_{\max}}$$

worin $\sin \alpha_{\max}$ die Apertur des Mikroskops genannt wird. Ist zwischen Gegenstand und Objektiv eine sog. Immersionsflüssigkeit, z.B. ein Öl mit der Brechzahl n (Bild 5.90b, s. S. 483), so hat das Licht die kleinere Wellenlänge $\lambda' = \lambda_0/n$, und man erhält den

Mindestabstand, die Auflösungsgrenze bei kleinen Gegenstandsweiten:

$$g_{\min} = \frac{\lambda_0}{n \sin \alpha_{\max}} \quad (5.108)$$

mit der Vakuumwellenlänge λ_0 des verwendeten Lichtes.

Den Nenner $n \sin \alpha_{\max}$ nennt man auch die numerische Apertur.

Die Auflösungsgrenze kann außer durch große Apertur und durch Immersion noch dadurch verbessert werden, dass man die Vakuumwellenlänge des Lichtes klein wählt, z.B. indem man mit UV-Licht mikroskopiert, mit Röntgenwellen oder Elektronen (vgl. Abschn. 5.3).

Anwendungen. Man erreicht bei Lichtmikroskopen maximal numerische Aperturen von etwa 1,4. Das ergibt mit sichtbarem Licht (z.B. $\lambda_0 = 550$ nm) ein $g_{\min} = 390$ nm. Die Wellenlängen bei Elektronenmikroskopen lassen sich zwar etwa um den Faktor 10^{-6} kleiner als Lichtwellen machen, aber die Apertur ist auch um 10^{-3} kleiner, sodass sich die Auflösungsgrenze nur um 10^{-3} auf rund 0,5 nm verfeinern lässt. Mit Röntgenmikroskopen (verwendet werden Wellenlängen von z.B. 0,5 nm) erreicht man Auflösungsgrenzen von rund 4 nm. Als „Linsen“ dienen dabei z.T. winzige Fresnelsche Zonenplatten.

In der Radioastronomie werden häufig Wellenlängen um 10^{-1} m empfangen, also solche, die etwa 10^6 mal so lang sind wie Lichtwellen; da die Radioteleskope aber nicht auch Durchmesser von einigen 10^6 m haben können (vgl. Gl. (5.107)), erreichen sie bei weitem nicht die Auflösungsgrenzen der Lichtteleskope. Allerdings ist es heute möglich, viele Radioteleskope, die entlang einer kilometerlangen Strecke ausgerichtet stehen, zusammenzuschalten und so die Auflösungsgrenze zu verbessern.

Die Beugung von Lichtwellen begrenzt nicht nur die Auflösung optischer Instrumente, sondern ermöglicht auch Verbesserungen gegenüber der einfachen Strahlenoptik. Die Beugung von Radiowellen ermöglicht (neben der Reflexion) in vielen Fällen erst deren Empfang, z.B. im „geometrischen Schatten“ hinter Bergen. Das Gleiche gilt für den Empfang von Schallwellen hinter Mauern etc.

5.2.6.5 Dopplereffekt

Wellenquelle und -empfänger können relativ zum umgebenden Medium oder relativ zueinander eine Geschwindigkeit haben. Dabei tritt der Dopplereffekt¹⁾ auf. Wir können diesen am häufigsten hören:

Schallwellen. Wenn sich eine mit konstanter Frequenz f_0 schwingende Schallquelle, z.B. ein hupendes Auto, schnell an uns vorbeibewegt, oder wenn wir uns selbst an ihr vorbeibewegen, hören wir Folgendes: Während der Annäherung hat der Ton eine bestimmte Höhe ($f > f_0$) und sinkt im Augenblick der Begegnung auf eine tiefere Frequenz ($f < f_0$). Wir müssen dabei zwei Fälle unterscheiden:

Bewegter Empfänger. In Bild 5.91a ist eine Schallquelle 1 mit der Frequenz f_0 relativ zum umgebenden Medium in Ruhe. Sie sendet Kugelwellen aus. Die konzentrischen Kreise sollen z.B. die Orte maximalen Druckes zu einem Zeitpunkt t_1 bezeichnen. Die Wellenlänge ist konstant $\lambda_0 = c/f_0$. Der Empfänger 2 dagegen bewegt sich mit der Geschwindigkeit v_E . Er registriert nicht die Frequenz f_0 , sondern eine andere, f_E , weil sich seine Geschwindigkeit bei Annäherung an die Quelle zur Schallgeschwindigkeit addiert, bei Entfernung subtrahiert. Es ist also hier $f_E = c'/\lambda_0$ mit $c' = c \pm v_E$. Wegen $\lambda_0 = c/f_0$ wird daraus

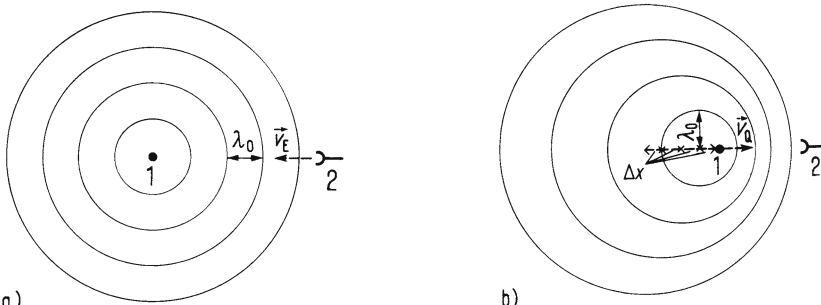
$$f_E = f_0 (1 \pm v_E/c) \quad \text{bei bewegtem Empfänger und ruhender Quelle} \quad (5.108)$$

Bewegte Schallquelle. In Bild 5.91b hat die gleiche Schallquelle wie in a eine Geschwindigkeit v_Q auf den im Medium ruhenden Empfänger 2 zu. Die Wellenfronten sind zwar noch Kugeln, aber keine konzentrischen, da das Zentrum ja während der Schwingungsdauer T_0 um die Strecke $\Delta x = v_Q T_0 = v_Q/f_0$ verschoben wird. Im Gegensatz zum obigen Fall ist hier also die Wellenlänge verändert. Die gegenüber der Ruhewellenlänge $\lambda_0 = c/f_0$ kürzeste veränderte Wellenlänge λ' tritt in Bild 5.91b rechts von der Quelle, also in der Richtung der Quellengeschwindigkeit v_Q , auf:

$$\lambda' = \lambda_0 - \Delta x = \frac{c}{f_0} - \frac{v_Q}{f_0} = \frac{c - v_Q}{f_0}$$

die längste in entgegengesetzter Richtung: $\lambda' T = (c + v_Q)/f_0$. Der Empfänger registriert eine veränderte Frequenz $f_Q = c/\lambda'$ oder

$$f_Q = f_0 \frac{1}{1 \pm v_Q/c} \quad \text{bei bewegter Quelle und ruhendem Empfänger} \quad (5.109)$$



a) **Bild 5.91** Entstehung des Dopplereffektes

¹⁾ Christian Doppler (1803 bis 1853).

Die Gleichungen (5.109) und (5.110) lassen sich zu einer zusammenfassen:

$$f = f_0 \frac{c \pm v_E}{c \mp v_Q} \quad \text{bei bewegter Quelle und bewegttem Empfänger} \quad (5.110)$$

Von den Plus- und den Minus-Zeichen gelten die oberen bei Annäherung, die unteren bei Entfernung.

Mit zunehmender Geschwindigkeit der Quelle wird die Wellenlänge in der Bewegungsrichtung immer kürzer, bei $v_0 = c$ ist sie null. Wird schließlich die Schallgeschwindigkeit überschritten, so entsteht der

Überschallknall. In Bild 5.92 bewegt sich ein Körper 1 – es muss keine Schallquelle sein – in Pfeilrichtung durch ein Medium, und zwar mit einer Geschwindigkeit v , die höher ist als die Schallgeschwindigkeit c in diesem Medium. An jedem Punkt seiner Bahn erzeugt der Körper vor sich eine Druckerhöhung, indem er die Moleküle des Mediums zusammendrängt, hinter sich entsprechend eine Druckerniedrigung. Diese „Störung“ breitet sich von jedem Punkt der Bahn als elementare Kugelwelle im Medium aus. Momentaufnahmen von einigen dieser Kugelwellen, deren Zentren früher durchlaufene Bahnpunkte sind, sind in Bild 5.92 gezeichnet. Die Überlagerung all dieser verschieden weit expandierten Kugelwellen ergibt eine Welle mit kegelförmiger Wellenfront. Die Kegelspitze bewegt sich mit der Geschwindigkeit v des Körpers.

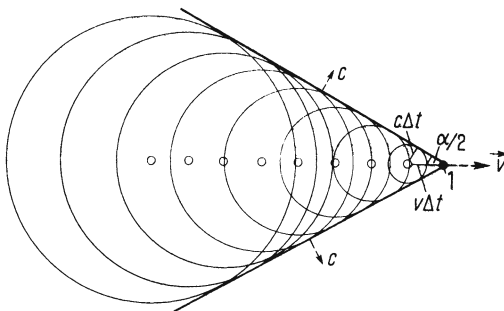


Bild 5.92 Entstehung einer Kopfwelle

Für den Öffnungswinkel α des Kegels liest man aus Bild 5.92 ab

$$\sin \alpha/2 = c/v$$

Jeder Beobachter, der von der kegelförmigen Wellenfront getroffen wird, hört einen Knall. Der Peitschenknall und der Knall, der von einem mit Überschallgeschwindigkeit fliegenden Flugzeug ausgeht, sind dreidimensionale Beispiele solcher Kopfwellen, die Bugwellen von Schiffen zweidimensionale.

Elektromagnetische Wellen. An diesen ist sowohl der eigentliche Dopplereffekt¹⁾ als auch die Ausbildung von Kopfwellen – hier Čerenkov-Strahlung genannt²⁾ – zu beobachten. Da die Frequenzänderung durch den Dopplereffekt vom Verhältnis der Quellen- oder Empfängergeschwindigkeit v zur Lichtgeschwindigkeit c abhängt, muss zu seiner Beobachtung entweder die Geschwindigkeit v oder die Genauigkeit der Frequenzmessung sehr groß sein.

Anwendungen. Hohe Geschwindigkeiten sind im Spiel bei der Rotverschiebung des Lichtes, das von weit entfernten Sternsystemen durch das Weltall zur Erde kommt. Es hat im Prinzip das gleiche

¹⁾ Gl. (5.110) gilt hier nur näherungsweise; s. Abschn. 8.2.3.

²⁾ P.A. Čerenkov (1904 bis 1990, Nobelpreis 1958).

Spektrum wie anderes Sternenlicht – z.B. von der Sonne – nur sind alle charakteristischen Linien zu längeren Wellen, also im Sichtbaren nach Rot, verschoben. Daraus schließt man, dass sich diese Lichtquellen z.T. mit sehr großer Geschwindigkeit von uns entfernen. Die Rotverschiebung dient in der Astronomie dazu, von sehr weit entfernten Objekten die Entfernung zu berechnen; dabei geht man von der Annahme aus, dass das Weltall ursprünglich in einem Punkt konzentriert war und nun expandiert; dabei müssen die Geschwindigkeiten der Objekte ihrem Abstand von der Erde proportional sein. Der Proportionalitätsfaktor zwischen Entfernung und Geschwindigkeit heißt Hubble-Konstante¹⁾.

Die Dopplerverbreiterung der Frequenzen des Lichtes, das von Atomen ausgeht, beruht darauf, dass die einzelnen Atome in Bezug auf den Empfänger die unterschiedlichsten thermischen Geschwindigkeiten haben und dadurch der Empfänger Frequenzen feststellt, die je nach den Beträgen und Vorzeichen der Geschwindigkeitskomponenten in Richtung der Verbindungslinie Sender-Empfänger vergrößert und verkleinert sind.

Die größte Genauigkeit bei der Messung der Frequenzänderung erreicht man zur Zeit mit dem Mößbauereffekt (s. Abschn. 6.2.3.2), wobei die Resonanzabsorption von γ -Strahlen in Atomkernen ausgenützt wird. Dabei bewirken Geschwindigkeiten von einigen Zehntelmillimetern pro Sekunde bereits messbare Frequenzverschiebungen.

Die analoge Erscheinung zum Überschallknall, die Čerenkov-Strahlung, tritt auf, wenn sich ein schnelles Teilchen, z.B. ein hochbeschleunigtes Elektron oder Proton, schneller durch ein Medium bewegt, als es elektromagnetische Wellen in diesem Medium tun. Das ist nur möglich, wenn die Brechzahl des betreffenden Mediums größer als 1 ist, d.h. wenn die Lichtgeschwindigkeit in ihm kleiner ist als im Vakuum, denn nach der Relativitätstheorie (s. Abschn. 8) kann ein Teilchen nicht auf höhere Geschwindigkeit als die Vakuumlichtgeschwindigkeit gebracht werden. Die Čerenkov-Strahlung dient zum Nachweis und zur Geschwindigkeitsmessung sehr schneller Elektronen, Protonen etc. Sie wird meist mit empfindlichen Photosekundärelektronenvervielfachern (vgl. Abschn. 3.2.6.1) nachgewiesen, ist jedoch unter Umständen auch mit dem Auge z.B. als blaues Leuchten zu erkennen.

Beim sog. Verkehrsradar werden elektromagnetische Wellen mit z.B. $f=9,4$ GHz ausgesendet. Falls die Wellen an einem fahrenden Auto reflektiert werden, ist ihre Frequenz danach verändert. Daraus kann die Geschwindigkeit des Autos bestimmt werden. Nach dem gleichen Prinzip – jedoch mit Ultraschallwellen – werden in der Medizin Geschwindigkeiten von Blutkörperchen im strömenden Blut gemessen.

5.2.7 Polarisation

Elektromagnetische Wellen sind Querwellen, haben also nach Abschn. 5.2.1.1 eine Polarisationsrichtung, und zwar ist die Richtung der elektrischen Feldstärke parallel zum Senderdipol, die der magnetischen Erregung senkrecht dazu (vgl. Abschn. 5.2.5.4). Willkürlich ist vereinbart, die elektrische Feldrichtung als die Polarisationsrichtung der Welle zu bezeichnen. Die „Senderdipole“ für sichtbares Licht sind die Atome der Lichtquelle, die normalerweise völlig ungeordnet alle möglichen Richtungen im Raum einnehmen. Daher enthält das Licht, das von einer makroskopischen Lichtquelle, also von einer großen Zahl von Atomen ausgeht, alle möglichen Schwingungsrichtungen, es ist unpolarisiert. (Ausnahme: Laser, s. Abschn. 6.1.3.1)

5.2.7.1 Erzeugung von polarisiertem Licht

Um aus unpolarisiertem Licht eine Komponente mit bestimmter Schwingungsrichtung herauszufiltern, gibt es u.a. Polarisationsfilter. Das können Kunststofffolien sein, in die nadelförmige Kristalle, z.B. aus Jodchinin, alle parallel zueinander, eingebettet sind. Auch Kunststofffolien, die in einer Richtung stark gereckt wurden, sodass ihre fadenförmigen Riesemoleküle ausgerichtet sind, dienen als Polarisationsfilter. Die gemeinsame Längsrichtung

¹⁾ Edwin P. Hubble (1889 bis 1953).

aller Kristalle bei den einen, bzw. die Richtung senkrecht zur Reckrichtung bei den anderen, soll im Folgenden „Vorzugsrichtung“ genannt werden; in ihr sind die Ladungswolken der Moleküle weniger verschiebbar, vgl. Abschn. 3.1.3.1. Die Wirkung zeigt folgender Versuch:

□ **Versuch 35** (Bild 5.93). Ein ebenes Wellenbündel (Wellennormale 1) erzeugt auf einer Wand 5 einen Lichtfleck. Hält man ein Polarisationsfilter 2 mit der Vorzugsrichtung x senkrecht zur Wellennormalen in den Strahlengang, so wird der Lichtfleck etwas dunkler. Dass das Licht nach dem Filter polarisiert ist, erkennt man erst, wenn man ein zweites Polarisationsfilter 4 mit der Vorzugsrichtung y zunächst parallel zum ersten in den Weg des Lichtes bringt und dann um eine Achse parallel zur Wellennormalen dreht. Dabei ändert sich die Helligkeit des Lichtflecks je nach dem Winkel zwischen den Vorzugsrichtungen der beiden Folien: Sind diese einander parallel, so ist die Helligkeit maximal, sind sie senkrecht zueinander, so ist sie null oder wenigstens minimal. Andere Winkel ergeben Helligkeiten zwischen diesen Extremen. □

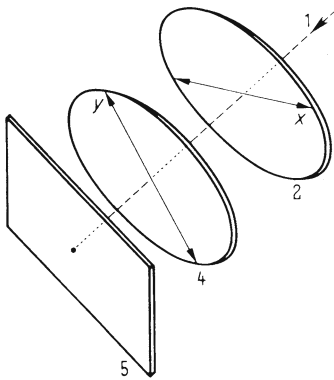


Bild 5.93 Erzeugung und Nachweis von polarisiertem Licht

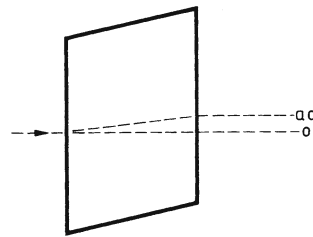


Bild 5.94 Doppelbrechung im Kalkspat (optische Achse senkrecht zur Zeichenebene)

Jedes der beiden Filter lässt von allem einfallenden Licht nur die Komponente durch, deren elektrische Feldstärke parallel zu seiner Vorzugsrichtung ist. Daher ist das ursprünglich unpolarisierte Licht nach Passieren des ersten Filters – Polarisator genannt – in dessen Vorzugsrichtung polarisiert. Durch das zweite Filter – Analysator genannt – gelangt hiervon wieder nur die Komponente in der Vorzugsrichtung, d.h. also nichts, wenn diese zu der des Polarisators senkrecht ist. Wir haben mit diesen Polarisationsfiltern die Möglichkeit, polarisiertes Licht herzustellen und damit weitere Untersuchungen durchzuführen:

Polarisation in anisotropen Körpern. Eine Reihe von durchsichtigen Körpern, z.B. viele Kristalle, sind optisch anisotrop, d.h. die Phasengeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen in ihnen hängt von der Ausbreitungsrichtung bezüglich der Kristallachsen ab. Ist die Anisotropie auch noch von der Schwingungsrichtung der Welle abhängig, so nennt man den betreffenden Stoff doppelbrechend. Der bekannteste doppelbrechende Kristall ist der Kalkspat. Geht ein ebenes unpolarisiertes Lichtbündel durch diesen Kristall, so wird es im Allgemeinen in zwei Teilbündel aufgespalten, von denen das eine dem Snelliusschen Brechungsgesetz gehorcht und daher „ordentliches Strahl“ (o in Bild 5.94) genannt wird. Das zweite Teilbündel wird anders abgelenkt – z.B. schon beim Einfallswinkel null gebrochen – und heißt daher „außerordentliches Strahl“ (ao in Bild 5.94).

Die Trennung dieser beiden Bündel erreicht man dadurch, dass man die Austrittsflächen so gegen die Wellennormalen geneigt wählt, dass eines der beiden Bündel an ihr totalreflektiert wird.

Es gibt im Kristall eine bestimmte Richtung, die der sog. optischen Achse, die dadurch ausgezeichnet ist, dass Licht, das parallel dazu durch den Kristall geht, nicht aufspaltet.

Untersucht man den ordentlichen und den außerordentlichen Strahl mit einem Polarisationsfilter als Analysator (vgl. Versuch 35), so zeigt sich, dass die beiden senkrecht zueinander polarisiert sind, und zwar der ordentliche senkrecht, der außerordentliche parallel zur optischen Achse. Zum Verständnis der Doppelbrechung muss man sich vorstellen, dass der Kristall für die Komponente des einfallenden Lichtes, die senkrecht zur optischen Achse schwingt, isotrop ist. D.h. die Phasengeschwindigkeit ist nach allen Seiten gleich, die Elementarwellen sind kugelförmig, die Ablenkung ergibt sich wie in Bild 5.68. Für die parallel zur optischen Achse schwingende Komponente dagegen ist der Kristall anisotrop, d.h. die Phasengeschwindigkeit hängt von der Richtung ab; dadurch sind die Elementarwellen ellipsoidförmig (Bild 5.95), und ihre Überlagerung ergibt eine andere Ausbreitungsrichtung als die der Kugelwellen.

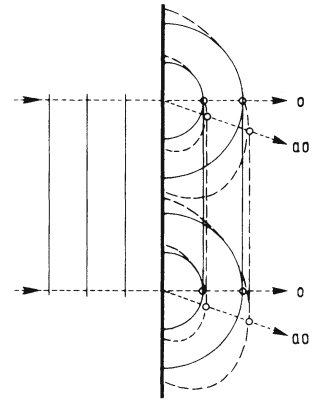


Bild 5.95 Kugelförmige und elliptische Elementarwellen bilden das ordentliche bzw. außerordentliche Wellenbündel

Weitere doppelbrechende Kristalle sind z.B. Quarz, Glimmer oder Turmalin. Außerdem werden die meisten durchsichtigen Stoffe doppelbrechend, wenn sie durch äußere Kräfte einseitig verspannt werden (s. Abschn. 5.2.7.2). Manche Stoffe werden beim Anlegen elektrischer Felder doppelbrechend, weil das Feld die Molekeln polarisiert (vgl. Abschn. 3.1.3.1), womit ja auch eine mechanische Deformation verbunden ist. Unpolarisiertes Licht spaltet dann z.B. in eine zum Feld senkrecht und eine zum Feld parallel schwingende Komponente auf. Geschieht dies durch ein zur Lichtrichtung transversales elektrisches Feld in einer Flüssigkeit (z.B. Nitrobenzol), so spricht man vom quadratischen elektrooptischen Effekt oder kurz Kerreffekt¹⁾. Liegt dagegen das elektrische Feld parallel zur Lichtrichtung an bestimmten piezoelektrischen Kristallen, so heißt die Erscheinung linearer elektro-optischer Effekt oder kurz Pockelseffekt²⁾.

Ähnlich, wenn auch verwickelter und schwieriger zu erklären, wirken magnetische Felder. Eine wichtige Rolle spielen Doppelbrechung und Polarisation auch bei den Flüssigkristallen in Abschn. 7.1.2.4.

Bei einigen Stoffen, wie z.B. dem Turmalin, kommt noch hinzu, dass einer der beiden Strahlen, z.B. der ordentliche, stärker absorbiert wird als der andere und dadurch nach einer bestimmten Schichtdicke praktisch ausgelöscht ist. Dieser Effekt heißt Dichroismus. Auf ihm beruht die Wirkung der in Versuch 35 verwendeten Polarisationsfolien.

¹⁾ J. Kerr (1824 bis 1907).

²⁾ F.R. Pockels (um 1893).

□ **Versuch 36. Polarisation durch Reflexion.** In Bild 5.96 erzeugt ein Lichtbündel, von dem eine Wellennormale gestrichelt gezeichnet ist, nach Reflexion an der Vorderseite einer Glasplatte 1 auf einer Wand 2 einen Lichtfleck. Lässt man das reflektierte Licht durch ein Polarisationsfilter 3 gehen und dreht dieses um die Wellennormale, so schwankt die Helligkeit des Lichtflecks ebenso wie in Versuch 35. Sie hat ein Maximum, wenn die Vorzugsrichtung des Filters parallel zur Glasoberfläche (senkrecht zur Zeichenebene) ist und ein Minimum, wenn das Filter senkrecht dazu gedreht ist. Die Resthelligkeit im Minimum hängt vom Winkel ε ab, sie wird z.B. bei $\varepsilon = 56^\circ$ null. □

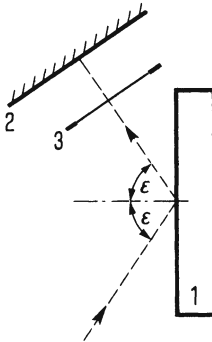


Bild 5.96 Polarisation durch Reflexion. (Die Rückseite der Platte 1 ist aufgeraut, damit an ihr keine gerichtete Reflexion erfolgt.)

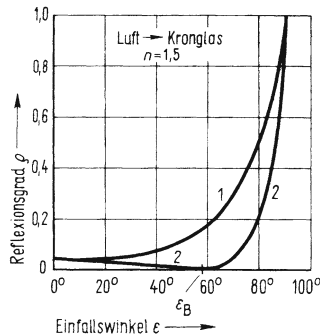


Bild 5.97 Reflexionsgrad von Kronglas in Luft

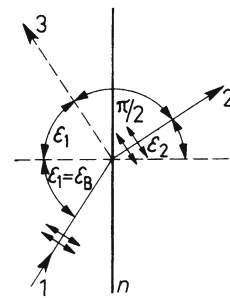


Bild 5.98 Brewsterscher Winkel ε_B

Der Quotient aus reflektierter und einfallender Intensität $S_r/S_0 = \rho$ heißt Reflexionsgrad. Er hängt vom Winkel ε , von der Brechzahl n und von der Polarisationsrichtung ab. Bild 5.97 zeigt diese Abhängigkeit für ein Wellenbündel, das parallel zur Glasoberfläche (Kurve 1) und für ein anderes, das senkrecht dazu polarisiert ist (Kurve 2). Dieses letztere Bündel ist mit dem Einfallswinkel ε_B , bei dem sein Reflexionsgrad $\rho = 0$ ist, in Bild 5.98 als Wellennormale 1 gezeichnet. Die beiden Doppelpfeile senkrecht dazu sollen die Schwingungsrichtung der elektrischen Feldstärke andeuten. Nach der Brechung läuft das Bündel im Glas weiter, dargestellt durch die Wellennormale 2 und die zugehörigen Doppelpfeile. Wir stellen uns die Molekeln des Glases als schwingungsfähige Systeme (positive und negative Ladungswolken, vgl. Abschn. 3.1.3.1) vor. Diese werden von der Welle zu erzwungenen Schwingungen angeregt und strahlen als Sendedipole ab. (Die Überlagerung all dieser Elementarwellen ergibt die weiterlaufende Welle.) Im gezeichneten Fall wäre aber der reflektierte Strahl 3 gerade senkrecht auf 2, also parallel zu den Längsachsen der atomaren Dipole. In diese Richtung strahlen Dipole aber nichts ab. Deshalb ist hier $\rho = 0$. Der Zeichnung entnimmt man: $\varepsilon_1 + \pi/2 + \varepsilon_2 = \pi$, und mit dem Brechungsgesetz Gl. (4.3) erhält man

$$\tan \varepsilon_B = n$$

Der Winkel ε_B heißt Brewsterscher Winkel¹⁾.

¹⁾ David Brewster (1781 bis 1868).

□ **Versuch 37. Polarisation und Streuung.** Schickt man Licht durch ein etwas trübes Medium, z.B. Wasser mit etwas Milch, so ist auch quer zur Ausbreitungsrichtung des Lichtbündels etwas Licht zu sehen, das an den feinen Teilchen der Trübung gestreut wurde. Polarisiert man das primäre Lichtbündel mit einem Polarisationsfilter und dreht dieses, so bemerkt man, dass die Streuung in der Polarisationsrichtung (Schwingungsrichtung der elektrischen Feldstärke) am schwächsten, senkrecht dazu am stärksten ist. Ist dagegen das primäre Lichtbündel unpolarisiert, betrachtet man aber das gestreute Licht durch ein Polarisationsfilter als Analysator, so zeigt sich, dass dieses polarisiert ist und zwar parallel zur Ausbreitungsrichtung. □

□ **Versuch 38. Drehung der Polarisationsrichtung.** Zwischen Polarisator und dazu senkrecht gerichtetem Analysator wie in Bild 5.93 bringt man ein Glasgefäß zunächst mit reinem Wasser. Es gelangt kein Licht durch die Anordnung. Löst man nun Traubenzucker in dem Wasser, so hellt sich der Schirm 5 auf und man muss den Analysator links herum (gegen das Licht blickend) um einen bestimmten Winkel α drehen, um wieder die ursprüngliche Lichtauslöschung zu erhalten. Der Winkel α wird umso größer, je höher die Konzentration des gelösten Zuckers und je dicker die Schicht ist. Bringt man ersatzweise eine Rohr- oder Rübenzuckerlösung in den Strahlengang, so muss die ausgleichende Drehung rechts herum und um vergleichsweise kleinere Winkel erfolgen. Eine Scheibe, senkrecht zur optischen Achse eines Quarzkristalls geschnitten, anstelle der Lösung in den Strahlengang gebracht, zeigt den gleichen Effekt, allerdings mit viel größerem Winkel α oder schon bei viel kleinerer Schichtdicke. Man findet sowohl linksdrehende wie rechtsdrehende Quarzscheiben.

Verwendet man Licht anderer Frequenz, so ergeben sich in allen aufgeführten Fällen etwas andere Winkel α . □

Ganz offensichtlich vermögen also die hier verwendeten Stoffe die Polarisationsrichtung des durchgehenden Lichtes zu drehen; man sagt, diese Stoffe seien optisch aktiv.

Bei Festkörpern ist der Drehwinkel α der Schichtdicke proportional: $\alpha = \alpha_0 d$; α_0 heißt „spezifischer Drehwinkel pro Länge“, ist seinerseits frequenzabhängig und ist z.B. für Quarz $25^\circ/\text{mm}$.

Kristallografische Untersuchungen zeigen: Die Siliziumatome in Quarzkristallen sind schraubenförmig verdrillt angeordnet; es kommen sowohl Kristalle mit Links- wie Rechts-schrauben vor, entsprechend ist deren optische Aktivität links- oder rechtsdrehend.

Bei den Substanzen, die in wässriger Lösung optisch aktiv sind, z.B. bei den Zuckern des Versuchs 39 oder bei organischen Säuren, z.B. der Milchsäure, ist der Drehwinkel der Schichtdicke und der Konzentration proportional: $\alpha = a_x d k$, mit der molekültypischen Konstanten a_x , der durchstrahlten Dicke d und der Konzentration k . Alle optisch aktiven Moleküle haben ein sog. asymmetrisches Kohlenstoffatom, d.h. eines, dessen 4 Valenzen mit 4 verschiedenen Atomen oder Atomgruppen abgesättigt sind.

Anwendungen. Störendes reflektiertes Licht beim Fotografieren, beim Autofahren auf nassen Straßen oder beim Angeln kann durch Polarisationsfilter unterdrückt werden. Die Projektion von stereoskopischen Dias und Filmen kann mit polarisiertem Licht und die Betrachtung durch Polarisationsfilter erfolgen. Wenn in der Opto-Elektronik Lichtwellen als „Trägerfrequenz“ zur Nachrichtenübermittlung verwendet werden, müssen diese moduliert werden. Das geschieht sowohl mit dem quadratischen, wie auch mit dem linearen elektro-optischen Effekt (Kerr- bzw. Pockelseffekt). Auf die gleiche Weise wird Licht mit sehr kurzen Schaltzeiten aus- und angeschaltet oder es wird mit einem sog. Q-Switch der

Gütefaktor Q eines Resonators (vgl. Abschn. 5.1.4.1 und 5.1.4.2) für Lichtwellen in kürzester Zeit geändert (s. „Laser“ in Abschn. 6.1.3.1). Medizinisch wird durch Drehung der Polarisations Ebene in der Lösung der Zuckergehalt im Urin gemessen.

5.2.7.3 Spannungsoptik

Wie im vorigen Abschnitt schon erwähnt, werden durchsichtige Stoffe doppelbrechend, wenn auf sie äußere Kräfte wirken. Man kann die Doppelbrechung und damit die durch die Kräfte erzeugten mechanischen Spannungen folgendermaßen sichtbar machen.

□ **Versuch 39** (Bild 5.99). Ein Lichtbündel 1 wird durch ein Polarisationsfilter 2 in der Richtung des Doppelpfeils x polarisiert. Dann durchsetzt es z.B. eine Epoxidharzplatte 3 und ein zweites Polarisationsfilter 4, dessen Durchlassrichtung y senkrecht zu der des ersten (x) ist. Normalerweise ist dadurch das Licht ausgelöscht, auf dem Schirm 5 herrscht Dunkelheit. Durch Kräfte auf Schneiden 6 können jedoch in der Platte 3 mechanische Spannungen erzeugt werden. Im Punkt A mögen z.B. die beiden Hauptspannungen $\vec{\sigma}_1$ und $\vec{\sigma}_2$ herrschen. Dadurch wird das durch A gehende, vorher in x -Richtung schwingende Licht in zwei Komponenten zerlegt. Diese sind einerseits parallel zu $\vec{\sigma}_1$ und $\vec{\sigma}_2$ polarisiert und haben andererseits einen Gangunterschied d , der durch die unterschiedlichen Phasengeschwindigkeiten entsteht und der Differenz der Beträge der Hauptspannungen ($|\vec{\sigma}_1| - |\vec{\sigma}_2|$) proportional ist. Durch das Polarisationsfilter 4 gelangen von jeder dieser beiden Komponenten wieder nur jeweils die Teilkomponenten in y -Richtung. Da diese letzteren in der gleichen Richtung (y) schwingen, können sie miteinander interferieren. Je nach ihrem Gangunterschied $d \sim (|\vec{\sigma}_1| - |\vec{\sigma}_2|)$ erscheint der Bildpunkt A' hell, dunkel oder in einem bestimmten Zwischenwert, falls man Licht einer bestimmten Frequenz oder in einer bestimmten Farbe, z.B. Glühlicht, nimmt. □

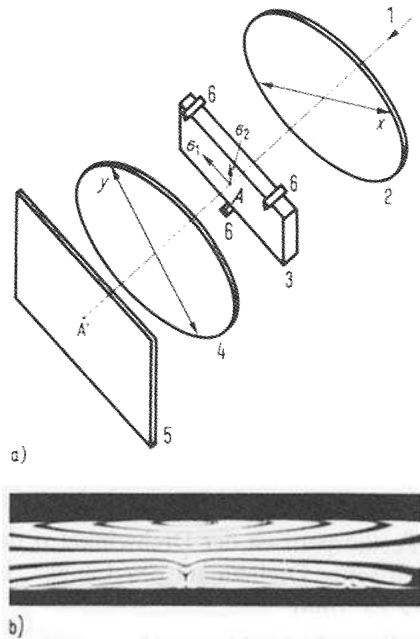


Bild 5.99 Spannungsoptik

Linien oder Gebiete gleicher Hauptspannungsdifferenz in der Platte 3 bilden sich also als Linien oder Gebiete gleicher Helligkeit oder gleicher Farbe auf dem Schirm 5 ab („Isochromaten“). Das Interferenzmuster auf dem Schirm 5 (Bild 5.99b) ist somit ein Bild der Spannungsverteilung in der Platte 3.

Bei der hier geschilderten Anordnung erscheinen im Interferenzmuster nicht nur die Stellen dunkel, wo die Hauptspannungsdifferenz null ist, sondern auch die Stellen, wo eine der Hauptspannungen parallel zu x oder y ist. Daher kann man diese beiden Fälle unter Um-

ständen nicht unterscheiden. Zur Abhilfe durchleuchtet man nicht wie hier mit linear polarisiertem Licht, sondern mit zirkular polarisiertem, indem man eine sog. $\lambda/4$ -Platte in den Strahlengang bringt.

Anwendungen. Die „Spannungsoptik“ dient zur Untersuchung der Verteilung mechanischer Spannungen in geometrisch komplizierten Bauteilen und/oder bei komplizierten Belastungen. Man fertigt von dem zu untersuchenden Bauteil ein Modell aus einem geeigneten durchsichtigen Kunststoff, bringt dieses in eine optische Anordnung wie Bild 5.99a und belastet es mit ähnlichen Kräften, wie sie auf das Originalbauteil wirken sollen.

5.2.8 Absorption von Wellen

Unsere bisherigen Betrachtungen über Wellen galten immer in verlustfreien Medien. Diese kommen aber in der Natur fast nie vor. In Wirklichkeit wird ein Teil der Energie mechanischer Wellen immer durch Reibung und Wärmeableitung verbraucht; elektromagnetische Wellen erleiden Energieverluste in magnetisierbaren Medien durch Hysterese, in elektrisch polarisierbaren durch dielektrische Verluste und in leitfähigen durch Joulesche Wärme. Nur im Vakuum breiten sie sich verlustfrei aus. Die relative Intensitätsabnahme dS/S einer ebenen Welle längs des Wegstückes dx ist erfahrungsgemäß dieser Länge dx proportional, also – mit einem Proportionalitätsfaktor β , der vom Medium abhängt –

$$dS/S = -\beta dx$$

Durch Integration erhält man daraus die Intensität S an der Stelle x ($S_0 =$ Anfangsintensität an der Stelle $x = 0$)

$$S = S_0 e^{-\beta x} \quad (5.111)$$

Da die Amplitude $\hat{s} \sim \sqrt{S}$ ist, ergibt sich hieraus mit Gl. (5.66) z.B. für eine ebene mechanische Welle die Amplitude \hat{s} an der Stelle x ($\hat{s}_0 =$ Anfangsamplitude an der Stelle $x = 0$)

$$\hat{s} = \hat{s}_0 e^{-(\beta/2)x}$$

und man erhält analog zur Wellengleichung für ebene Wellen im verlustfreien Medium Gl. (5.47)

Die Wellengleichung einer ebenen Welle im absorbierenden Medium

$$s = \hat{s}_0 e^{-(\beta/2)x} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

mit einer exponentiell von x abhängigen Amplitude.

$\beta/2 = \alpha$ wird Extinktionskoeffizient genannt (vgl. auch Abschn. 5.1.4).

Für ebene elektromagnetische Wellen erhält man durch gleiches Vorgehen ganz analoge Ausdrücke.

Den Zusammenhang zwischen der in Abschn. 5.2.5.3 benutzten Schallpegeldifferenz ΔL einer Wand, ihrer Dicke $x_2 - x_1 = x$ und dem Extinktionskoeffizienten α ihres Materials erhält man aus Gl. (5.77) und Gl. (5.111):

$$\Delta L = 10 \lg \frac{S_0 e^{-\beta x_1}}{S_0 e^{-\beta x_2}} = 0,4343 \cdot 10 \ln e^{-\beta(x_1-x_2)}$$

und mit $\beta = 2\alpha$

$$\Delta L = 8,69 \alpha x$$

Aufgaben zu Abschn. 5.2.6 bis 5.2.8

- Wie groß dürfen die Messfehler der Zeitmessung Δt_1 bzw. Δt_2 beim Radar bzw. bei einem Unterwasserecholot höchstens sein, um die Entfernung eines Objektes auf 10 m genau messen zu können ($c_1 = 3 \cdot 10^8$ m/s; $c_2 = 1450$ m/s)?
- Welche Brechzahl hat die Grenzfläche Luft–Wasser
 - für Schallwellen, b) für Radiowellen im kHz-Bereich?
 (Siehe dazu auch Aufgabe 7 in Abschn. 5.2.5.)
- Zwei parallele Senderdipole mit je 2 m Länge stehen vertikal in 10 m Abstand in Luft. Sie werden vom selben Sender mit ihrer niedrigsten Eigenfrequenz angeregt.
 - In welchen Richtungen ist kein Empfang der abgestrahlten Wellen möglich?
 - Wie ändert sich das, wenn nur kurze Wellengruppen von 8 m Länge gesendet werden?
- Ein ebenes Strichgitter mit 10000 Strichen pro cm erzeugt das Spektrum einer Gasentladung. Welche Wellenlänge hat das Licht einer blauen Linie, die in der ersten Ordnung den Winkelabstand 25° gegen die nullte Ordnung hat?
- Wie klein ist beim Verkehrsradar der Unterschied der Frequenzänderungen, die von einem 50 km/h und von einem 60 km/h fahrenden Auto hervorgerufen werden? (Sendefrequenz z.B. $f_S = 9,40$ GHz)
- Eine elektromagnetische und eine Schallwelle gehen durch eine 10 cm dicke Flüssigkeitsschicht. Vorher haben beide die Intensität $0,1 \text{ W/m}^2$, nachher die Schallwelle 10^{-3} W/m^2 , die elektromagnetische 10^{-2} W/m^2 . Welche Extinktionskoeffizienten gelten für die beiden Wellen?
- Ein schmales Lichtbündel (ebene Welle) soll von einem Punkt A zu einem Punkt B gelangen; A liegt in einem Medium 1 mit der Phasengeschwindigkeit c_1 , B in einem Medium 2 mit der Phasengeschwindigkeit c_2 . Die Winkel, die der Lichtweg gegen die Normale auf der Grenzfläche zwischen den Medien einschließt, seien ε_1 und ε_2 . Wie müssen sich die Sinus dieser beiden Winkel zueinander verhalten, damit der Weg in der kürzesten Zeit zurückgelegt wird?

5.3 Der Dualismus von Wellen und Teilchen

In der Strahlenoptik (Abschn. 4) benützt man eine einfache Modellvorstellung vom Licht: Man spricht einfach von „Strahlen“, ohne nähere Einzelheiten ihrer Natur zu untersuchen. Damit lassen sich bereits viele Eigenschaften des Lichtes verstehen und in optischen Instrumenten anwenden. Um jedoch die Dispersion, Interferenzerscheinungen, Beugung und Polarisation zu verstehen, muss man das Licht als elektromagnetische Welle betrachten, also eine verfeinerte Modellvorstellung benützen (Abschn. 5.2.6). Untersucht man die Wechselwirkung von Licht mit Atomen, insbesondere seine Entstehung und seine Absorption, so lassen sich einige Erscheinungen dabei nicht anhand des Wellenmodells erklären. Man muss vielmehr das Licht so betrachten, als bestehe es aus einzelnen Teilchen (Korpuskeln). Wellenmodell und Teilchenmodell lassen sich – im Gegensatz zu allen bisherigen Modellerweiterungen – nicht zu einer einzigen Vorstellung vereinigen.

5.3.1 Teilcheneigenschaften des Lichtes

Am einfachsten zeigen sich diese im Folgenden

□ **Versuch 40. Äußerer Fotoeffekt.** In Bild 5.100 beleuchtet eine Lichtquelle 1 einen Spalt 2. Diese „sekundäre Lichtquelle“ wird von der Linse 3 durch das Prisma 4 hindurch in die Ebene des Austrittsspalt 5 abgebildet. Dort entsteht also ein Spektrum. Der Spalt 5 kann zusammen mit der Vakuum-Fotозelle 6 entlang des Spektrums (in x -Richtung) bewegt werden. Dadurch fällt in die Fotозelle nur Licht einer bestimmten Frequenz f , je nach der Stellung des Spaltes. Das Licht trifft auf die Kathode der Fotозelle und befreit dort Elektronen, die dann zur Anode gelangen. Dieser Anodenstrom I_a wird gemessen. Bringt man den Spalt 5 zunächst in den violetten (hochfrequenten) Teil des Spektrums, so fließt ein bestimmter Sättigungsstrom I_s , wenn die Anodenspannung nur hoch genug ist, dass alle befreiten Elektronen abgesaugt werden (vgl. Abschn. 3.2.6.1). Der Wert von I_s hängt von der Intensität des einfallenden Lichtes ab.

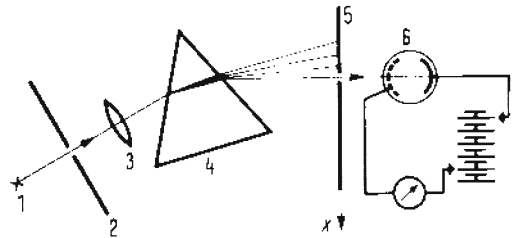


Bild 5.100 Messung des Fotoeffekts in Abhängigkeit der Frequenz

Verschiebt man den Spalt 5 zu kleinen Frequenzen, so nimmt die Intensität nach Abschn. 5.2.5.5 und folglich auch der Sättigungsstrom zunächst zu. Erreicht man jedoch eine bestimmte Grenzfrequenz f_G , so wird der Anodenstrom überhaupt null, gleichgültig wie groß die Intensität des Lichtes ist, das auf die Kathode fällt. Der Wert von f_G seinerseits hängt vom Kathodenmaterial ab.¹⁾

Legt man an die Anode eine geringe negative Spannung, dann fließt oberhalb der Grenzfrequenz kein Sättigungs-, sondern ein Anlaufstrom (vgl. Abschn. 3.2.6.1), d.h. nur die schnellsten der austretenden Elektronen haben genug kinetische Energie, um gegen das elektrische Feld zur Anode zu gelangen. Man kann nun die Gegenspannung so groß machen, dass gerade keine Elektronen mehr zur Anode kommen, d.h. kein Strom fließt.

Daran ändert sich nichts, wenn man mit höherer Intensität einstrahlt. Nur bei Erhöhung der eingestrahlten Frequenz oder bei Verwendung eines Kathodenmaterials mit einer niedrigeren Grenzfrequenz f_G fließt wieder ein Anlaufstrom. □

Zur Erklärung der Versuchsergebnisse muss man sich folgende Vorstellung machen (Einstein 1905)²⁾. Damit ein Elektron die Kathode verlassen kann, muss es mindestens die Austrittsarbeit W_a aufnehmen (vgl. Abschn. 3.2.6). Das geht aber offensichtlich nicht dadurch, dass das Elektron über längere Zeit Energie aus der Welle absorbiert. Vielmehr muss die Energieaufnahme in einem einmaligen Prozess, vergleichbar einem Stoß, erfolgen. Die Energie W , die es dabei erhält, ist der Frequenz f der Welle proportional, mit einem Proportionalitätsfaktor h

$$W = hf$$

$$(5.112)$$

¹⁾ Vorausgesetzt, man verwendet bei allen Versuchen das gleiche Anodenmaterial.

²⁾ Albert Einstein (1879 bis 1955)

Ist diese „Energieportion“ oder dieses Energiequantum W größer als die Austrittsarbeit W_a , so verbleibt dem Elektron nach dem Austritt noch kinetische Energie W_{kin} , mit der es z.B. gegen die negative Anodenspannung anlaufen kann. Die Energiebilanz lautet also

$$W = hf = W_a + W_{\text{kin}}$$

Ist $f = f_G$, dann treten die Elektronen gerade noch aus, es ist aber $W_{\text{kin}} = 0$. Also ist die Grenzfrequenz f_G eines Kathodenmaterials seiner Austrittsarbeit W_a proportional.

Der Faktor h hat die Dimension Energie \times Zeit = Wirkung und heißt Plancksche Konstante oder Plancksches Wirkungsquantum. Genaue Messungen ergeben

$$h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}^1)$$

Das Energiequantum $W = hf$, das die Lichtwelle an das Elektron abgibt, nennt man meist kurz ein Lichtquant, und man stellt sich das Lichtbündel vor als einen Strom von Teilchen – sog. Photonen –, die diese Energie haben. Ein intensives Lichtbündel ist in diesem Bild also eines, das viele Photonen enthält; hohe Energie der einzelnen Photonen dagegen bedeutet, dass die Lichtwelle eine hohe Frequenz hat. Dabei ist die Energie der Photonen nicht durch ihre Geschwindigkeit gegeben, denn die ist immer gleich der Lichtgeschwindigkeit. In Ruhe existieren die Photonen nicht.

Wie in Abschn. 8 gezeigt wird, sind Energie und Masse äquivalent, und zwar gilt

$$W = m c_0^2$$

(c_0 = Vakuum-Lichtgeschwindigkeit). Daraus ergibt sich mit Gl. (5.112)

$$hf = m c_0^2$$

Demnach kann man dem mit Lichtgeschwindigkeit fliegenden Photon die Masse

$$m = hf/c_0^2$$

zuordnen und den Impuls

$$m c_0 = hf/c_0 \tag{5.113}$$

oder mit $c_0 = \lambda_0 f$ den

Impuls des Photons

$$p = m c_0 = h/\lambda_0 \tag{5.114}$$

Den Strahlungsdruck bei Absorption oder Reflexion, der in Abschn. 5.2.5.4 als Folge der Lorentzkraft erklärt wird, kann man hier aus der Änderung des Impulses Gl. (5.114) verstehen (vgl. auch Abschn. 5.2.5.2).

Eine Welle mit bestimmter Intensität S enthält n „Photonen pro Volumen“. Im Volumen $A c_0 t$ sind demnach $n A c_0 t$ Photonen, die alle in der Zeit t mit der Geschwindigkeit c_0 auf die Fläche A treffen; werden sie dort z.B. reflektiert, so ist die gesamte Impulsänderung aller reflektierten Photonen mit Gl. (5.114).

¹⁾Häufig kommt in Gleichungen $h/2\pi$ vor; dafür hat sich die Kurzschreibweise \hbar (sprich „ha quer“) eingebürgert.

$$\sum \Delta |\vec{p}| = 2n A c_0 t \frac{h}{\lambda_0}$$

Diese Impulsänderung ist nach Abschn. 1.3.4 gleich dem Kraftstoß Ft und folglich der Strahlungsdruck bei Reflexionen (nach Division durch A und t)

$$p_R = 2 \frac{nc_0 h}{\lambda_0} = 2nhf$$

bei Absorption die Hälfte. Der Vergleich mit Gl. (5.70) liefert außerdem noch den Zusammenhang zwischen Intensität S und Photonendichte n :

$$S = n h f c_0$$

Wir fassen zusammen:

Bei der Wechselwirkung zwischen Licht der Frequenz f und Elektronen wird die Energie nur in bestimmten Portionen, Lichtquanten der Energie (Gl. (5.112))

$$W = h f$$

ausgetauscht ($h = 6,62611 \cdot 10^{-34}$ J s). Man kann daher das Licht auch als einen Strom von Teilchen – den Photonen – mit dieser Energie betrachten. Die Photonen haben keine Ruhemasse (s. Abschn. 8).

5.3.2 Welleneigenschaften von Teilchen

De Broglie¹⁾ überlegte 1924, ob der oben besprochene Dualismus zwischen Lichtwellen und Photonen vielleicht ein Beispiel einer viel allgemeineren Naturerscheinung wäre, d.h. ob nicht jedem Teilchen eine Welle zuzuordnen wäre und umgekehrt. In Umkehrung des Zusammenhanges zwischen Lichtwellen und Photonen und mit Gl. (5.114) leitete er her:

Bewegen sich viele gleiche Teilchen, alle mit der Masse m und der Geschwindigkeit v , dem Impuls p und der Energie W , so kann man diesem Teilchenstrom eine Welle zuordnen mit der sog.

$$\text{de Broglie-Wellenlänge} \quad \lambda = h/p, \quad (5.115)$$

$$\text{der de Broglie-Frequenz} \quad f = W/h \quad (5.116)$$

$$\text{der de Broglie-Kreisfrequenz} \quad \omega = W/\hbar^2 \quad (5.116)$$

$$\text{der de Broglie-Kreiswellenzahl} \quad k = 2\pi/\lambda = p/\hbar \quad (5.117)$$

$$\text{und der de Broglie-Phasengeschwindigkeit} \quad c = \lambda f$$

Die Gl. (5.117) wird oft auch vektoriell geschrieben:

$$\vec{p} = \hbar \vec{k}$$

worin die vektoriell verstandene Kreiswellenzahl „Ausbreitungsvektor“ heißt.

¹⁾ Louis Victor De Broglie (1892 bis 1987, Nobelpreis 1929).

²⁾ s. Fußnote auf S. 496.

Die Intensität dieser Welle ist ein Maß für die Teilchendichte.

Einem einzelnen Teilchen entspricht dann eine Wellengruppe nach Abschn. 5.2.6.2. Dort ergibt sich für die Gruppengeschwindigkeit Gl. (5.99) $v_{\text{Gr}} = d\omega/dk$. Mit Gl. (5.117) wird daraus

$$v_{\text{Gr}} = \hbar d\omega/dp \quad \text{und mit Gl. (5.112):} \quad v_{\text{Gr}} = dW/dp$$

Wegen $W = m v^2/2$ und $p = m v$ ist immer $W = p^2/(2m)$.

Also ist die Gruppengeschwindigkeit

$$v_{\text{Gr}} \frac{d(p^2/2m)}{dp} = \frac{2p}{2m} = v \quad \text{gleich der Teilchengeschwindigkeit}$$

Interessant ist noch der Zusammenhang zwischen der Gruppengeschwindigkeit $v_{\text{Gr}} = v$ und der Phasengeschwindigkeit c der Materiewellen. Für c ergibt sich mit Gl. (5.115)

$$c = \lambda f = \frac{h W}{p h} = \frac{W}{p}$$

Die Relativitätstheorie liefert mit Gl. (8.24) für die Gesamtenergie W unter Einschluss der Ruheenergie $m_0 c_0^2$ den Wert

$$W = \frac{m_0 c_0^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}} \quad \text{und gemäß Gl. (8.19) für den Impuls} \quad p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}}$$

Daraus erhält man $W = \frac{W}{p} = \frac{c_0^2}{v}$. Umformung liefert das bemerkenswerte

$$\text{Ergebnis } cv = c_0^2.$$

Es ist interessant, dass die gleiche Formel für klassische elektromagnetische Wellen in Hohlleitern gilt, in welchen gemäß Versuch 28b das c deutlich größer als c_0 sein kann.

Die Wellengruppe hat keine einheitliche Wellenlänge mehr; auf die Problematik der Laufzeitdispersion in diesem Zusammenhang kann jedoch nicht eingegangen werden.

1927 gelang es Davisson und Germer¹⁾, die Wellennatur von Elektronen nachzuweisen: Ein Elektronenstrahl zeigte nach Durchgang durch eine Silberfolie nicht einfache Streuung, sondern ein Interferenzmuster genau wie eine Röntgenwelle (vgl. Abschn. 5.2.6.3). Die Wellenlänge, die sich aus dem Interferenzmuster ermitteln ließ, stimmte genau mit derjenigen überein, die nach Gl. (5.115) zu erwarten ist. Später fand man noch eine Reihe weiterer Bestätigungen der de Broglieschen Theorie. Eine der wichtigsten ist der Comptoneffekt (Abschn. 6.2.1.1). Man schreibt daher allen Wellen und allen Teilchen (Korpuskeln) diese Doppelnatur zu und nennt diese Erscheinung den Dualismus von Wellen und Teilchen. Ob zur Erklärung einer physikalischen Erscheinung das Wellenmodell oder das Teilchenmodell besser geeignet ist, muss von Fall zu Fall entschieden werden. Eine unmittelbare Folge dieses Dualismus ist im Folgenden beschrieben.

¹⁾ Clinton J. Davisson (1881 bis 1958); Lester H. Germer (1896 bis 1971).

5.3.3 Heisenbergsche Unbestimmtheitsrelation

Wir denken uns in Bild 5.101 Elektronen mit der Geschwindigkeit v_z , die zur Zeit $t = 0$ einen Spalt in einer Wand in der x - y -Ebene passieren und auf einen Schirm 1 im Abstand l zufliegen. Der Spalt hat die endliche Breite Δx . Daher lassen sich die Orte der Elektronen in x -Richtung zur Zeit $t = 0$ nur mit dem Fehler Δx angeben und nur ebenso ungenau auf dem Schirm voraussagen, wenn man die Elektronen als Teilchen betrachtet.

Wollte man diesen Fehler verkleinern, müsste man den Spalt enger, also Δx kleiner machen. Wegen der Wellennatur der Elektronen tritt aber Beugung am Spalt auf (vgl. Abschn. 5.2.6.4), und die Elektronen können überall dort auftreffen, wo kein Intensitätsminimum herrscht. Für das erste Minimum gilt nach Gl. (5.106) (mit $s = \Delta x$): $\sin \alpha_1 = \lambda/\Delta x$; also ist die

Breite b bis zum ersten Minimum (mit $\sin \alpha_1 \approx \frac{b/2}{l}$)

$$b = 2l \frac{\lambda}{\Delta x} \quad (5.118)$$

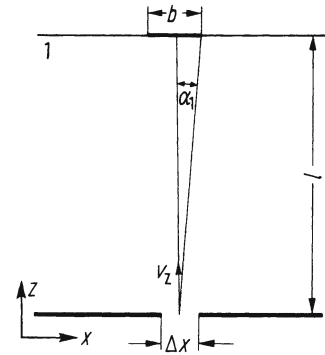


Bild 5.101 Zur Heisenbergschen Unbestimmtheitsrelation

Wegen der Wellennatur der Elektronen hat also eine Verkleinerung des Messfehlers Δx bei der Bestimmung ihres Ortes eine Vergrößerung der Streubreite b zur Folge. Dieses Ergebnis Gl. (5.118) kann man auch mit nur solchen physikalischen Größen formulieren, die allein dem Teilchenmodell zugeordnet sind: Um nämlich irgendwohin in den Bereich der Streubreite b zu gelangen, muss ein Elektron zusätzlich zu seinem Impuls in z -Richtung $p = m v_z = m l/\Delta t$ noch einen Impuls in x -Richtung, Δp_x , erhalten. Dieser ist jedoch nicht genau bestimmt, weil ja das Elektron irgendwo im Bereich des Intensitätsmaximums auftreffen kann. Sein größter Betrag und damit seine Unbestimmtheit ergibt sich folgendermaßen:

Ein Elektron legt während der Zeit Δt den Weg l mit der Geschwindigkeit $v_z = l/\Delta t$ zurück, also ist sein Impuls in z -Richtung

$$p = m v_z = m l/\Delta t$$

Damit es in x -Richtung gleichzeitig um bis zu $b/2$ abweichen kann, muss es die Geschwindigkeit

$$\Delta v_x = \frac{b/2}{\Delta t}$$

haben können, also kann sein Impuls in x -Richtung

$$\Delta p_x = m \Delta v_x = m \frac{b/2}{\Delta t}$$

betragen und mit Gl. (5.118) ist

$$\Delta p_x = \frac{m l \lambda}{\Delta t \Delta x}$$

Darin ist $m \lambda / \Delta t = p$ der Impuls in z -Richtung und nach Gl. (5.115) $\lambda = h/p$, also gilt für die Unbestimmtheit in x -Richtung

$$\Delta p_x = \frac{p}{\Delta x} \frac{h}{p} = \frac{h}{\Delta x} \quad \text{oder} \quad \Delta p_x \Delta x = h$$

Da die Elektronen aber auch weiter außen, bei den Intensitätsmaxima höherer Ordnung auftreffen können, hat man statt dessen zu schreiben:

$$\Delta p_x \Delta x \geq h$$

Heisenbergsche Unbestimmtheitsrelation: Der Impuls p_x eines Teilchens und sein Ort x lassen sich nicht gleichzeitig beliebig genau bestimmen, da das Produkt ihrer Abweichungen Δp_x und Δx nie kleiner als die Plancksche Konstante h ist. Diese Ungenauigkeit oder Unbestimmtheit tritt prinzipiell auf, unabhängig von der technischen Messgenauigkeit.

Für alle Produkte mit der Dimension Wirkung = Zeit \times Energie gilt die gleiche Unbestimmtheitsrelation, z.B. $\Delta W \Delta t \geq h$.

Wegen der Kleinheit der Planckschen Konstanten spielt die Unbestimmtheitsrelation bei makroskopischen Körpern keine Rolle.

Aufgaben zu Abschn. 5.3

1. Die Austrittsarbeit eines Fotokathodenmaterials beträgt 1,6 eV.

a) Welche negative Anodenspannung können die schnellsten der austretenden Elektronen gerade noch überwinden, wenn Licht mit der Wellenlänge 400 nm eingestrahlt wird?

b) Welche Grenzfrequenz f_G beobachtet man an der Fotozelle?

2. Warum spielt die Wellennatur der Materie bei einem Auto mit der Masse $m = 1$ t bei der Geschwindigkeit $v = 100$ km/h keine Rolle?

3. Der Ort eines Geschosses mit der Masse $m = 10$ g sei auf einen Atomdurchmesser genau (10^{-10} m) festgelegt. Wie genau lässt sich dann seine Geschwindigkeit „bestenfalls“ bestimmen?

6 Atom- und Kernphysik

Alle Stoffe lassen sich nicht beliebig fein unterteilen, sondern bestehen aus kleinsten Bauteilen, auf der Erde aus Atomen oder Atomgruppen, den Molekülen. Das zeigt sich besonders in der kinetischen Gastheorie (Abschn. 2.3.1) und ist die Grundlage der Chemie. Die Durchmesser der Atome ergeben sich z.B. aus der Gastheorie zu größenordnungsmäßig 10^{-10} m, ihre Massen liegen zwischen $1,672 \cdot 10^{-27}$ kg (Wasserstoffatom) und $423 \cdot 10^{-27}$ kg (Nobeliumatom). Ursprünglich galten die Atome als unteilbar. In der Elektrizitätslehre zeigt sich jedoch, dass die Atome in elektrisch positive und elektrisch negative Teilchen zerlegt werden können. Dabei sind die negativen Teilchen im einfachsten Fall die Elektronen mit einer Ladung $e_0 = -1,602 \cdot 10^{-19}$ As, der Elementarladung, und einer gegenüber der Atommasse verschwindend kleinen Masse $m_e = 9,109 \cdot 10^{-31}$ kg. Einem Wasserstoffatom kann man z.B. maximal ein, einem Heliumatom maximal zwei Elektronen entziehen (ionisieren). Die zurückbleibenden Teile haben eine bzw. zwei positive Elementarladungen und praktisch die ganze Masse des Atoms. Eine Aussage über die Abmessungen der Atomteile erhält man u.a. folgendermaßen:

Streuversuche

Lenard¹⁾ beschloss sehr dünne Aluminiumfolien mit schnellen Elektronen und stellte fest, dass ein Teil derselben die Folie fast ohne Energieverlust passiert. Er schloss daraus, dass sowohl seine Geschosse – die Elektronen – als auch die Teile der beschossenen Atome Durchmesser haben, die im Verhältnis zum ganzen Atom verschwindend klein sind. Dadurch ist im Innern der Atome sehr viel leerer Raum, und die schnellen Elektronen haben die Chance, eine nicht zu dicke Aluminiumschicht ohne Zusammenstoß zu passieren. Rutherford²⁾ beschloss sehr dünne Goldfolien und benützte statt der leichten Elektronen die etwa 7350 mal schwereren α -Teilchen, die von radioaktiven Stoffen ausgestrahlt werden (s. Abschn. 6.2.1.1). α -Teilchen sind Heliumatome, denen beide Elektronen fehlen. Diese schweren Teilchen geben an die leichten Elektronen der Goldatome beim Zusammenstoß praktisch keine Energie ab (vgl. Abschn. 1.3.4.5). Nur wenn ihre Bahn nahe an dem positiven, schweren Teil eines Goldatoms vorbeiführt, werden sie durch die elektrostatische Abstoßung abgelenkt, und zwar umso stärker, je zentraler sie auf den positiven Atomteil zufliegen. Sind die Geschosse (positive Atomteile des Heliums) und ihre Stoßpartner (positive Atomteile des Goldes) etwa so groß wie die ganzen Atome, so müssen schon bei sehr dünner Goldschicht alle Geschosse zurückgeworfen werden. Sind sie dagegen sehr viel kleiner, so muss die Rückwärtsstreuung viel seltener sein als der gerade, stoßfreie Durchgang oder die geringe Ablenkung. Es zeigte sich, dass die starken Ablenkungswinkel sehr selten sind, dass also beide Stoßpartner sehr kleine Durchmesser haben. Aus der Häufigkeitsverteilung der auftretenden Streuwinkel lassen sich die Durchmesser berechnen. Es ergeben sich Werte zwischen $2,5 \cdot 10^{-15}$ m (Wasserstoff) und etwa $16 \cdot 10^{-15}$ m bei sehr schweren Atomen.

¹⁾ Philip Lenard (1862 bis 1947).

²⁾ Ernest Lord Rutherford (1871 bis 1937, Nobelpreis 1908).

Demnach hat der positive Teil eines Atoms nur etwa $1/10000$ bis $1/100\,000$ des Atomdurchmessers. In ihm ist die positive Ladung und praktisch die ganze Masse vereinigt. Man nennt daher diesen Teil den Atomkern. Die Dichte der Materie im Kern hat den ungeheuren Wert $2 \cdot 10^{17} \text{ kg/m}^3$. Die Elektronen halten sich im übrigen Raum des Atoms auf, der im Vergleich zu ihrer Größe und zur Größe des Kerns riesig ist. Man nennt diesen übrigen Raum mit den Elektronen die Atomhülle.

Die Streuversuche gestatten außerdem auch die Bestimmung der Ladung des Kerns. Es zeigt sich dabei, dass die Kerne eines Elementes mit der Ordnungszahl Z alle die Z -fache positive Elementarladung $Z e_0$ haben. Wir fassen zusammen:

Ein Atom der Ordnungszahl Z hat einen Durchmesser in der Größenordnung 10^{-10} m . Es besteht aus einer Atomhülle mit Z Elektronen (jedes mit einer negativen Elementarladung $e_0 = -1,602 \cdot 10^{-19} \text{ As}$ und der Masse $m_e = 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$) sowie aus einem Atomkern mit Z positiven Elementarladungen, mit fast der ganzen Masse des Atoms und mit einem Durchmesser von einigen 10^{-15} m (also rund der hunderttausendste Teil des Atomdurchmessers).

Zunächst soll der Aufbau der Atomhülle näher untersucht werden.

6.1 Atomhülle

Einzelheiten des Aufbaus der Atomhülle sind zu klein, um direkt beobachtet zu werden. Wir sind daher im besonderen Maße darauf angewiesen, aus indirekten Beobachtungen Modellvorstellungen über diesen Aufbau zu entwickeln. Die wichtigsten dieser indirekten Beobachtungen an Atomhüllen sollen zunächst beschrieben werden:

6.1.1 Experimentelle Grundlagen

6.1.1.1 Emissionsspektren

□ **Versuch 1. Linienspektren.** Jedes chemische Element kann gasförmig vorliegen, es muss nur auf genügend hohe Temperatur gebracht werden; und durch alle diese Gase kann elektrischer Strom fließen, wenn nur genügend hohe Spannung anliegt und die Gasdichte genügend niedrig ist. Das Auffälligste an derartigen Gasentladungen sind die Leuchterscheinungen, die von ihnen ausgehen (vgl. auch Abschn. 3.2.6.2). Zerlegt man das Gasentladungslicht mit einem Spektralapparat (vgl. Abschn. 5.2.6), so erhält man Spektren wie z.B. die Nr. 3 bis 9 und die Nr. 11 auf der Spektraltafel im Anhang. □

Diese Spektren sind Linienspektren, d.h., die Lichtenergie wird nur bei einigen bestimmten, diskreten Frequenzen emittiert, von jeder Atomsorte mit anderer Verteilung.

Dehnt man die spektrale Zerlegung auch auf infrarote und ultraviolette elektromagnetische Wellen aus, so erhält man ebenfalls Linienspektren. Im Gegensatz dazu emittieren genügend heiße Festkörper oder Flüssigkeiten (aber auch sehr dichte Gase) fast immer alle Frequenzen wie z.B. Nr. 1 auf der Spektraltafel im Anhang.

Seriengesetze. In Bild 6.1 ist an eine Frequenzskala das Wasserstoffspektrum gezeichnet, nicht nur im sichtbaren Spektralbereich, wie Nr. 3 auf der Spektraltafel im Anhang, sondern auch im ultravioletten (UV) und infraroten (IR). Man kann deutlich vier Gruppen von Linien, sog. Serien, unterscheiden. Der Name des Entdeckers ist neben jede Serie zur Kennzeichnung geschrieben. Die Serien sind einander ähnlich, insofern als in jeder der Frequenzabstand von Linie zu Linie mit steigender Frequenz offensichtlich regelmäßig abnimmt. Die Frequenzabstände der Serien untereinander dagegen nehmen mit steigender Frequenz stark zu. Es liegt nahe, empirisch nach einer Gleichung zu suchen, die diese Regelmäßigkeiten wiedergibt. Dies gelang J. Rydberg¹⁾: Die Frequenzen des Wasserstoffspektrums ergeben sich aus der Rydberggleichung,

$$f = R_{\text{fH}} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right) \quad (6.1)$$

wenn man für n und n' die natürlichen Zahlen und für die sog. Rydbergfrequenz $R_{\text{fH}} = 3,2880 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$ einsetzt²⁾. Mit $n = 2$ und $n' = 3; 4; 5; \dots$ erhält man die Frequenzen der sichtbaren Wasserstofflinien:

H_{α} : $4,566 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ (rot); H_{β} : $6,163 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ (blau); H_{γ} : $6,903 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ (violett); usw. Das ist die Balmerserie³⁾. Die Frequenzen, die sich mit $n = 1$ und $n' = 2; 3; 4; \dots$ ergeben, liegen alle im Ultravioletten und bilden die Lymanserie⁴⁾. Für $n = 3$ und $n' = 4; 5; 6; \dots$ erhält man die Frequenzen der Paschenserie⁵⁾ und mit $n = 4$ und $n' = 5; 6; 7; \dots$ die Brackettserie⁶⁾, beide im Infraroten.

Auch für die Spektren einiger anderer Elemente – z.B. der Alkalimetalle – fanden J. Rydberg und unabhängig von ihm auch Ritz⁷⁾ heraus, dass sich deren Frequenzen in Serien ordnen und durch eine Gleichung der Form

$$f = Z^2 R_{\text{f}} \left(\frac{1}{(n+a)^2} - \frac{1}{(n'+b)^2} \right) \quad (6.2)$$

berechnen lassen. Darin ist Z die Ordnungszahl des Elementes. Die kleine natürliche Zahl n legt wie oben beim Wasserstoff eine bestimmte Serie fest, während die natürliche Zahl $n' (> n)$ die einzel-

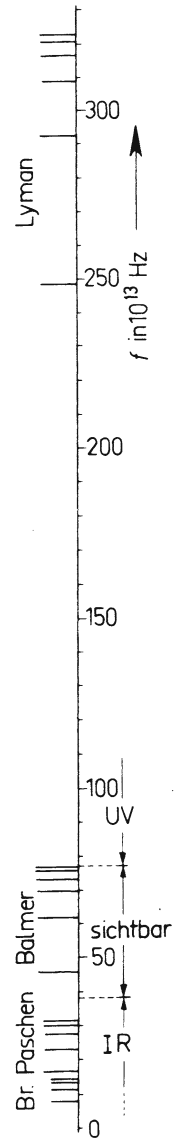


Bild 6.1 Wasserstoffspektrum

¹⁾ Janne Rydberg (1854 bis 1919).

²⁾ In einer entsprechenden Gleichung zur Berechnung der Kreiswellenzahlen k steht $R_{\text{kH}} = (2\pi/c_0) R_{\text{fH}} = 6,8950 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$ und in einer Gleichung zur Berechnung von Energiedifferenzen dementsprechend $R_{\text{WH}} = h R_{\text{fH}} = 2,1799 \cdot 10^{-18} \text{ J} = 13,606 \text{ eV}$ (s. Abschn. 6.1.2). Wegen R_{∞} siehe die Bemerkung nach Gl. (6.10). Jede dieser Konstanten wird oft ungenau nur „Rydbergkonstante“ genannt.

³⁾ Johann Jakob Balmer (1825 bis 1898).

⁴⁾ Theodore Lyman (1874 bis 1947).

⁵⁾ Friedrich Paschen (1865 bis 1947).

⁶⁾ F.P. Brackett (1865 bis 1953).

⁷⁾ Walter Ritz (1878 bis 1909).

nen Linien in einer Serie bestimmt; a und b sind zwei für jede Serie charakteristische Konstanten, die man bestimmen kann, wenn zwei Frequenzen der Serie und die zugehörigen n und n' bekannt sind. Alle anderen Frequenzen der betreffenden Serie ergeben sich dann durch Einsetzen der verschiedenen möglichen Werte n' . Von der Konstanten R_f glaubte man bei der damaligen Messgenauigkeit, sie hätte den gleichen Wert wie R_{H} in Gl. (6.1). Später zeigte sich, dass R_f für jedes Element etwas anders angenommen werden muss, mit relativen Unterschieden in der Größenordnung 10^{-4} und weniger. Diese empirischen Gleichungen (6.1) und (6.2) haben seinerzeit eine gewisse Ordnung in die ungeheure Vielzahl von Spektren gebracht, und sie stellen erste Schritte bei der Entwicklung brauchbarer Modellvorstellungen dar.

6.1.1.2 Energieaufnahme

Die Atome senden bei den besprochenen Gasentladungen Licht und damit Energie aus. Diese Energie muss von den Atomen aufgenommen worden sein, bevor sie wieder abgestrahlt werden kann. Wie diese Energieaufnahme erfolgt, untersuchten Franck und Hertz¹⁾, indem sie die Zufuhr elektrischer Energie viel feiner dosierten, als das in einer normalen Gasentladung (Versuch 1) möglich ist:

□ **Versuch 2. Franck-Hertz-Anregung** (1914). In einer mit Quecksilberdampf gefüllten Röhre (Bild 6.2a) werden die aus der Glühkathode 1 austretenden Elektronen durch eine veränderliche positive Spannung U am Gitter 2 beschleunigt. Sie gelangen durch das Gitter hindurch zum Auffänger 3, wenn sie genügend kinetische Energie haben, um gegen die etwa 0,5 bis 1 V negative Spannung anzulaufen. Erhöht man die Spannung U von null an, so steigt der Auffängerstrom I zunächst an (Bild 6.2b). Nähert man die Spannung jedoch $U = 4,9$ V, so sinkt I plötzlich ab und erreicht bei 4,9 V ein Minimum. Bei weiterer Erhöhung von U steigt auch I wieder an, bis bei Annäherung an $U = 9,8$ V ein erneutes Absinken von I erfolgt. Dies wiederholt sich bei allen ganzzahligen Vielfachen von 4,9 V. Besitzt die Röhre ein Fenster aus Quarzglas, so kann man bei $U \geq 4,9$ V die Aussendung von ultraviolettem Licht der Frequenz $1,185 \cdot 10^{15}$ Hz ($\lambda = 253$ nm) nachweisen. □

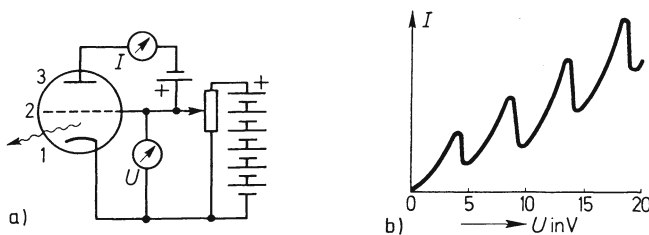


Bild 6.2 Franck-Hertz-Versuch

Die Beobachtungen des Franck-Hertz-Versuches kann man nur auf folgende Weise deuten: Ist die Gitterspannung kleiner als 4,9 V, so haben die Elektronen auch nur kinetische Energien unter 4,9 eV²⁾. Bei Zusammenstößen mit Hg-Atomen, deren Masse ja rund 370 000 mal so groß ist, verlieren sie offensichtlich auch keine Energie; also sind die Stöße rein elastisch. Bei $U = 4,9$ V ist am Ende der Beschleunigungsstrecke Kathode–Gitter $W_{\text{kin}} = 4,9$ eV, und nun erfolgen die Zusammenstöße unelastisch: Die Elektronen verlieren

¹⁾ James Franck (1882 bis 1964, Nobelpreis 1925); Gustav Hertz (1887 bis 1975, Nobelpreis 1925).

²⁾ Bei einem Teil der Elektronen kommt noch etwas kinetische Energie hinzu, die diese von der geheizten Kathode mitbringen.

ihre Energie an die Hüllen der Hg-Atome und können dann nicht mehr gegen die Auffängerspannung anlaufen. Wird $U > 4,9 \text{ V}$, so erreichen die Elektronen diese kritische kinetische Energie $4,9 \text{ eV}$ schon auf einer kleineren Strecke im elektrischen Feld und haben dann nach ihrem unelastischen Zusammenstoß noch Raum, wieder Energie aufzunehmen, um damit zum Auffänger zu gelangen. Eine zweite Möglichkeit ist, dass sie bis zum Zusammenstoß schon mehr als $4,9 \text{ eV}$ aufgenommen haben, beim Stoß gerade $4,9 \text{ eV}$ abgeben und mit dem Rest zum Auffänger kommen. Bei $U = 2 \cdot 4,9 \text{ V} = 9,8 \text{ V}$ reicht die nach einem ersten Stoß neu aufgenommene Energie gerade ab dem Ende der Beschleunigungsstrecke zu einem zweiten unelastischen Stoß, d.h. zu einem zweiten Energieverlust an eine Hg-Atomhülle; oder der beim ersten Stoß übrig gebliebene Energierest reicht gerade für einen zweiten unelastischen Stoß mit nun totalem Energieverlust; usw. Wir stellen also fest: Quecksilberatomhüllen können Energie nur in Portionen $\Delta W = 4,9 \text{ eV}$ aufnehmen. Sie geben sie wieder ab in Form elektromagnetischer Wellen der Frequenz $f = 1,185 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$. Bildet man $\Delta W/f$, so erhält man $4,13 \cdot 10^{-15} \text{ eVs} = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$. Das ist gerade die Plancksche Konstante h aus Abschn. 5.3 (und 5.2.5.5). Während aber dort, beim Fotoeffekt, die Frequenz der absorbierten Welle der Energie, die das Elektron bekommt, proportional ist, haben wir hier die Umkehrung: Die Energie, die ein Elektron an ein Atom abgibt, ist der Frequenz der daraufhin vom Atom abgestrahlten Welle proportional, in beiden Fällen mit dem Proportionalitätsfaktor h .

$$\Delta W = h f$$

Unter Verwendung des in Abschn. 5.3 eingeführten Photons lässt sich dieser Sachverhalt sehr kurz ausdrücken:

Beim Fotoeffekt verschwindet ein Photon und seine Energie $\Delta W = h f$ wird einem Elektron als kinetische Energie übertragen, beim Franck-Hertz-Versuch gibt ein Elektron kinetische Energie ΔW ab, und es entsteht ein Photon $h f = \Delta W$.

Ersetzt man im Franck-Hertz-Versuch das Quecksilber durch ein anderes Element (z.B. Lithium), so beobachtet man das Gleiche, nur mit jeweils einem anderen Betrag der Energieportion ΔW und anderer Frequenz f , aber immer gilt $\Delta W = h f$.

Die Frequenz, die beim Franck-Hertz-Versuch ausgestrahlt wird, ist auch in dem Spektrum enthalten, das man beobachtet, wenn man mit der gleichen Atomsorte eine Gasentladung erzeugt (Versuch 1).

Wir können – zusammen mit den Beobachtungen des vorigen Abschn. 6.1.1.1 – verallgemeinern:

Atomhüllen nehmen Energie nur in ganz bestimmten, diskreten Portionen (Quanten) auf und geben sie nur in bestimmten, diskreten Portionen (Photonen) als Welle mit entsprechender Frequenz ab.

Die bisher besprochenen Beobachtungen erlauben nun bereits, eine Modellvorstellung von der Atomhülle vorsichtig und vorläufig zu formulieren: Die Atomhülle ist normalerweise in einem „Zustand“ relativ niedriger Energie, den wir Grundzustand nennen wollen. Durch dosierte, messbare Energiezufuhr (Franck-Hertz) kann sie in einen Zustand höherer Energie gebracht werden, den wir angeregten Zustand nennen wollen. Sie kehrt wieder in den Grundzustand zurück und sendet die Energiedifferenz ΔW als elektromagnetische

Welle der Frequenz $\Delta f = \Delta W/h$ aus, kurz: Sie sendet ein Photon der Energie $\Delta W = hf$ aus. In der Gasentladung, d.h. bei nicht fein dosierter, sondern intensiver Energiezufuhr werden eine ganze Reihe von bestimmten Frequenzen ausgesendet, darunter auch die aus dem Franck-Hertz-Versuch. Also gibt es nicht nur einen, sondern eine ganze Reihe von angeregten Zuständen mit verschiedenen Energien. Die Energiedifferenzen ΔW_i zwischen diesen werden bei Übergängen entweder von Stoßpartnern aufgenommen oder als Wellen mit den Frequenzen $f_i = \Delta W_i/h$, kurz, als Photonen mit den Energien $\Delta W_i = hf_i$ abgegeben. Wie man sich diese „Zustände“ vorstellen kann, soll zunächst noch völlig offenbleiben. Die Energien, die die Atomhüllen in den einzelnen „Zuständen“ haben, werden Energieniveaus genannt.

6.1.1.3 Absorptionsspektren – Resonanzfluoreszenz

□ **Versuch 3.** Zerlegt man Licht von der Sonne mit einem Spektralapparat, so erhält man bei oberflächlicher Betrachtung ein kontinuierliches Spektrum ähnlich wie Nr. 1 auf der Spektraltafel im Anhang. Daraus schließt man, dass das beobachtete Licht aus einer Gasschicht mit der mittleren Temperatur 5870 K, der mittleren Dichte $2,5 \cdot 10^{-4} \text{ kg/m}^3$ und der Dicke 400 km stammt, die man Photosphäre nennt. Hierin stoßen die Gasatome bereits so oft aneinander, dass ein kontinuierliches Spektrum entsteht, wie es von sehr heißen Festkörpern oder Flüssigkeiten bekannt ist.

Bei genauerer Beobachtung zeigen sich jedoch in diesem Kontinuum eine Reihe von dunkleren Linien, z.B. die in Nr. 2 auf der Spektraltafel im Anhang. Sie heißen nach ihrem Entdecker¹⁾ Fraunhofersche Linien¹⁾.

Ganz ähnliche Spektren erhält man auch von allen anderen Fixsternen. □

Offensichtlich sind hier aus dem ursprünglich kontinuierlichen Spektrum bestimmte, diskrete Frequenzen herausgefiltert worden. Heute sind etwa 24 000 derartige Linien ausgemessen und jede ist derjenigen Atomsorte „zugeordnet“, die in ihrem Emissionsspektrum genau bei der gleichen Frequenz eine Linie liefert. Diese „Zuordnung“ ist begründet durch die folgende Erklärung:

Die frequenzselektive Absorption findet hauptsächlich statt in der sog. Chromosphäre der Sonne, einer etwa 10 000 km dicken Schicht oberhalb der Photosphäre. Das Gas der Chromosphäre ist zwar sehr heiß (bis 10^6 K), aber die Dichte ist im Mittel nur noch 10^{-13} kg/m^3 , sodass die Atome nur noch sehr selten zusammenstoßen. Mit unserer oben vorsichtig formulierten Modellvorstellung kann man den Absorptionsvorgang so deuten und formulieren: Offensichtlich kann eine Atomhülle vom Grundzustand in einen angeregten Zustand (Energiedifferenz ΔW) nicht nur durch Elektronenstoß ($W_{\text{kin}} \geq \Delta W$ in Versuch 1 und 2) gebracht werden, sondern auch durch Absorption einer elektromagnetischen Welle genau der Frequenz $f = \Delta W/h$, kurz: durch Absorption eines Photons der Energie ΔW . Dadurch eben haben in dem ursprünglich kontinuierlichen Spektrum der Photosphäre ganz bestimmte Frequenzen niedrigere Intensität; sie wurden von den Atomen der Chromosphäre selektiv durch Absorption geschwächt.

Natürlich kehren die Atomhüllen vom angeregten Zustand nach einiger Zeit wieder in den Grundzustand zurück und senden dabei ein gleiches Photon aus, aber selten gerade in der Richtung, in der alle nichtabsorbierten Photonen auf ihrem Weg zum Spektralapparat auf der Erde weitergefliegen sind. Wir stellen also fest:

¹⁾ Joseph Fraunhofer (1787 bis 1826).

Gasatome emittieren nicht nur, sondern absorbieren auch elektromagnetische Wellen mit ganz bestimmten, diskreten Frequenzen.

Zu jeder Fraunhoferschen Linie im Absorptionsspektrum einer Atomsorte gibt es eine gleichfrequente Linie im Emissionsspektrum der gleichen Atomsorte, aber nicht umgekehrt (s. unten).

Sekunden vor und nach einer totalen Sonnenfinsternis besteht die Möglichkeit, ausschließlich das verhältnismäßig sehr schwache Licht, das die Chromosphäre emittiert, aufzufangen. Seine spektrale Zerlegung ergibt ein Linienspektrum mit Emissionslinien genau bei den Frequenzen, bei denen im Sonnenlichtspektrum die stärksten Fraunhoferschen Absorptionslinien liegen.

Man nennt diese Erscheinung, dass ein Gas Lichtwellen einer ganz bestimmten Frequenz selektiv absorbiert und jeweils nach rund 10^{-8} s Wellen der gleichen Frequenz emittiert, Resonanzfluoreszenz. Dabei suggeriert das Wort Resonanz bereits die Vorstellung, dass die Atomhüllen schwingungsfähige Systeme sind mit Resonanzfrequenzen und -erscheinungen, wie in Abschn. 5.1.5 beschrieben. Als Fluoreszenz bezeichnet man allgemein jede Leuchterscheinung, die durch andere als thermische Energie angeregt wird und innerhalb etwa 10^{-8} s abklingt (s. auch Abschn. 7.5).

Die aus vielerlei Gründen in Sternen recht komplizierte Resonanzfluoreszenz lässt sich einfacher und damit übersichtlicher auch im Labor durchführen, z.B. im folgenden

□ **Versuch 4.** Eine Natriumdampfampe beleuchtet einen Schirm intensiv gelb. Zwischen Lampe und Schirm brennt die Flamme eines Gasbrenners mit reichlich Luftzufuhr. Die Flamme wirft wegen ihrer Durchsichtigkeit kaum einen Schatten auf den Schirm. Bringt man nun etwas NaCl in die Flamme, so leuchtet sie einerseits gelb auf, andererseits – und das ist hier das Wichtige – wird ihr Schatten auf dem Schirm deutlich sichtbar, offenbar, weil genügend Na-Atome in der Flamme sind, die einen Teil des Na-Dampflichtes von der Lampe absorbieren. □

□ **Versuch 5.** Man ersetzt die Flamme im vorigen Versuch durch ein heizbares abgeschlossenes Glasgefäß, das etwas metallisches Natrium, aber keinen Sauerstoff enthält, und das wenigstens zwei planparallele Wände (parallel zum Schirm) hat. Durch das kalte Gefäß geht das Licht der Na-Dampfampe praktisch ungeschwächt hindurch. Heizt man aber das Gefäß auf, sodass etwas Na verdampft, so wird einerseits die Intensität des durchgehenden Lichtes deutlich geschwächt, während andererseits der Gasraum – von der Seite beobachtet – gelb leuchtet. Ersetzt man die Na-Dampfampe durch irgendeine andere Gasentladungslampe, tritt weder die Intensitätsschwächung noch das Aufleuchten auf. □

Aus dem Licht einer Glühlampe filtert der Na-Dampf selektiv nur die Frequenzen $5,0847 \cdot 10^{14}$ Hz und $5,0899 \cdot 10^{14}$ Hz heraus, sodass im kontinuierlichen Emissionsspektrum der Glühlampe an dieser Stelle zwei dicht benachbarte Fraunhofersche Linien entstehen, während das Spektrum des filternden Na-Dampfes die zwei gelben Emissionslinien zeigt wie Nr. 5a auf der Spektraltafel im Anhang. Diese Beobachtungen an den Spektren sind aber erheblich schwieriger und eignen sich nicht für einen Demonstrationsversuch.

Die Atomhüllen des absorbierenden Na-Dampfes in Versuch 5 sind praktisch alle im Grundzustand. Da sie von Photonen aus einer Na-Dampfentladung zu Resonanzfluoreszenz angeregt werden, müssen diese Photonen entstanden sein durch Übergänge von angeregten Zuständen der emittierenden Atom-

hüllen zum Grundzustand; nur solche Photonen haben die genau passende Energie, um ihrerseits die absorbierenden Atomhüllen vom Grundzustand in die angeregten Zustände zu bringen. Im Absorptionsspektrum der Sonne finden sich aber u.a. auch Fraunhofersche Linien des Wasserstoffs im Sichtbaren mit den Frequenzen der roten und der blauen Wasserstoffemissionslinien (vgl. Nr. 2 und 3 auf der Spektraltafel im Anhang). In Abschn. 6.1.2.1 wird gezeigt, dass alle sichtbaren Linien des Wasserstoffspektrums (Balmerreihe) bei Übergängen emittiert werden, die nicht mit dem Grundzustand, sondern mit dem ersten angeregten Zustand enden. Folglich beginnen die zugehörigen Photonenabsorptionen auch von diesem angeregten Zustand aus. Demnach sind in der Sonnenchromosphäre neben der riesigen Zahl von H-Atomen im Grundzustand auch noch genügend viele im ersten angeregten Zustand anzutreffen. Das ist einer der Gründe für die oben erwähnte Kompliziertheit der Sonnen- oder Sternspektren.

Damit sind die wichtigsten experimentellen Grundlagen geschildert. Wir fassen die Ergebnisse aus Abschn. 6.1.1 zusammen:

In Atomhüllen gibt es bestimmte, diskrete Energieniveaus. Zum Übergang von einem niedrigeren auf ein höheres Energieniveau nimmt die Hülle ein entsprechendes Energiequant auf, beim Übergang von einem höheren auf ein niedrigeres Energieniveau kann die Hülle ein entsprechendes Lichtquant abgeben. Es gilt nun, eine verfeinerte Modellvorstellung der Atomhülle zu entwickeln, die die quantenhafte Aufnahme und Abgabe von Energie, die Existenz der Energieniveaus, die teilweise sehr komplizierten Spektren, das unterschiedliche chemische Verhalten der Elemente und viele weitere Eigenschaften der Atomhülle beschreibt.

6.1.2 Modellvorstellungen

Das erste brauchbare Modell stammt von Niels Bohr¹⁾. Die Mängel dieses Modells waren seinem Schöpfer – teils von Anfang an – bekannt; es aber als falsch zu bezeichnen, ist wohl nicht sinnvoll, denn ein Modell ist als vereinfachtes Bild der Wirklichkeit definiert, kann also immer nur einen Teil der Fakten richtig erklären. Heute gibt es Modelle mit weniger Mängeln als das Bohrsche. Sie sind mathematisch aufwendiger und unanschaulicher (s. Abschn. 6.1.2.3). Außerdem verwenden sie viele Bezeichnungen und Begriffe, die schon von den Namen her aus dem Bohrschen Modell stammen. Deshalb werden wir zunächst dieses vorstellen.

6.1.2.1 Bohrsches Atommodell

Die Grundvorstellung dieses Modells ist, dass die Elektronen um den Kern kreisen wie Planeten um die Sonne, allerdings mit der Coulombschen Anziehung als Zentripetalkraft. Diese Vorstellung stammt schon von E. Rutherford, war aber in dieser einfachen Form von Anfang an nicht haltbar, denn ein kreisendes Elektron ist eine (radial) beschleunigt bewegte Ladung, die nach den Gesetzen der Elektrodynamik eine elektromagnetische Welle und damit Energie abstrahlen müsste. Daher müssten die Elektronen innerhalb von 10^{-6} s auf Spiralbahnen in den Kern stürzen, womit die Atomhülle verschwunden wäre. Da aber die Atomhüllen dauerhaft existieren, bestimmte, diskrete „Zustände“ haben und Energie gequantelt aufnehmen und abgeben, stellte Bohr zur Ergänzung des „Planetenmodells“ noch zwei Forderungen auf, die Bohrschen Postulate:

¹⁾ Niels Bohr (1885 bis 1962, Nobelpreis 1922).

Erstes Bohrsches Postulat

Unter den unendlich vielen möglichen Kreisbahnen in der Atomhülle sind einzelne dadurch ausgezeichnet, dass auf ihnen ein Elektron umlaufen kann, ohne Energie in Form einer elektromagnetischen Welle abzustrahlen. Sie werden stationäre oder erlaubte Bahnen genannt. Für diese gilt die Bedingung: Das 2-fache des Bahndrehimpulses des Elektrons ist ein ganzzahliges Vielfaches des Planckschen Wirkungsquantums (s. Gl. (6.4)).

Bahnradius und -geschwindigkeit. Der Drehimpuls eines Elektrons (Masse m_e , Geschwindigkeit v_n), das auf einer Bahn mit dem Radius r_n um den Kern kreist, hat den Betrag

$$L = J\omega = m_e r_n^2 \omega_n = m_e r_n v_n \quad (6.3)$$

Diese Größe enthält einerseits alle Bestimmungsstücke einer Bahn, andererseits hat sie die Dimension einer Wirkung (= Energie \times Zeit). Bohr verknüpfte nun hiermit das Plancksche Wirkungsquantum h (vgl. Abschn. 5.3), d.h., er quantisierte die Elektronenbewegungen, indem er annahm, dass nur solche Bahnen im obigen Sinne „stabil“ oder „erlaubt“ sind, für die das Produkt aus dem Drehimpuls und dem Winkel einer ganzen Umdrehung (= 2π) ein ganzzahliges Vielfaches des Planckschen Wirkungsquantums ist. Mit Gl. (6.3) und der ganzen Zahl n also

$$2\pi L_n = 2\pi m_e r_n v_n = n h \quad (n = 1; 2; 3 \dots)^1 \quad (6.4)$$

oder mit der Abkürzung $h/2\pi = \hbar$

$$L_n = m_e r_n v_n = n \hbar \quad (6.5)$$

Außerdem muss die Zentripetalkraft $F_z = m_e v_n^2/r_n$ dem Betrag nach gleich sein der elektrostatischen Anziehung

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

wobei $Q_1 = Z e_0$ die Kernladung ($Z =$ Ordnungszahl) und $Q_2 = -e_0$ die Ladung des Elektrons ist. Daraus ergibt sich mit Gl. (6.4)

der Radius der n -ten stationären Bahn

$$r_n = n^2 \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi Z m_e e_0^2} \quad (6.6)$$

Die ganze Zahl n wird Hauptquantenzahl genannt.

Für die Geschwindigkeit v_n auf der n -ten Bahn ergibt sich ebenso

$$v_n = \frac{Z e_0^2}{2\epsilon_0 n h} \quad (6.7)$$

und daraus die Umlauffrequenz des Elektrons

¹⁾ s. hierzu auch Gl. (6.11).

$$f = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{v_n}{2\pi r_n} = \frac{Z^2 e_0^4 m_e}{4 \varepsilon_0^2 n^3 h^3}$$

Energieniveaus. Ein Körper, der einen bestimmten Abstand vom Erdmittelpunkt hat, besitzt eine bestimmte potentielle Energie. Ebenso hat ein Elektron im Abstand r_n vom Kern eine potentielle Energie W_{pot} ; da es außerdem mit der Geschwindigkeit v_n umläuft, hat es noch eine kinetische Energie W_{kin} . Seine Gesamtenergie $W = W_{\text{pot}} + W_{\text{kin}}$ nimmt zu, wenn es auf eine Bahn mit größerem Radius gebracht wird.

Um es gegen die elektrische Anziehung

$$F_e = \frac{Z e_0^2}{4\pi \varepsilon_0 r^2}$$

von der n -ten Bahn auf die n' -te Bahn zu „heben“, ist die Arbeit

$$\Delta W_{\text{pot}} = \int_{r_n}^{r_{n'}} \frac{Z e_0^2 dr}{4\pi \varepsilon_0 r^2} = \frac{Z e_0^2}{4\pi \varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_{n'}} \right)$$

notwendig. Setzt man r_n und $r_{n'}$ nach Gl. (6.6) ein, so erhält man die Zunahme der potentiellen Energie

$$\Delta W_{\text{pot}} = \frac{Z^2 e_0^4 m_e}{4 \varepsilon_0^2 h^2} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right)$$

Gleichzeitig nimmt die kinetische Energie um den Betrag $\Delta W_{\text{kin}} = (1/2)m_e(v_n^2 - v_{n'}^2)$ ab. Mit Gl. (6.7) erhält man daraus

$$\Delta W_{\text{kin}} = \frac{Z^2 e_0^4 m_e}{8 \varepsilon_0^2 h^2} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right)$$

Das ist gerade die Hälfte von ΔW_{pot} (vgl. Abschn. 1.5.3). Um

$$\Delta W = \Delta W_{\text{pot}} - \Delta W_{\text{kin}} = \frac{Z^2 e_0^4 m_e}{8 \varepsilon_0^2 h^2} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right) \quad (6.8)$$

nimmt also die Energie des Elektrons zu, diesen Betrag muss man dem Atom zuführen. Andererseits wird dieser Energiebetrag ΔW auch wieder frei, wenn das Elektron von der n' -ten Bahn zurück auf die n -te Bahn „fällt“. Da jeder stationären Bahn eine bestimmte Energie entspricht, die ein Elektron hat, wenn es auf ihr umläuft, spricht man häufig einfach von den erlaubten Energieniveaus, anstatt von den stationären Bahnen. Während nämlich die „Bahnen“ nur Bestandteile einer bestimmten Modellvorstellung sind, die durchaus ausgetauscht werden kann (s. Abschn. 6.1.2.3), sind die Energieniveaus messbare Realitäten, unabhängig von der Modellvorstellung. Bild 6.3a zeigt über dem Kern K Ausschnitte der stationären Bahnen zu den Hauptquantenzahlen $n = 1$ bis 5 mit den Radien r_1 bis r_5 , die nach Gl. (6.6) mit n^2 zunehmen. Die Pfeile stellen die zugehörigen Bahngeschwindigkeiten $v_1 \dots v_5$ dar, die nach Gl. (6.7) proportional $1/n$ sind. Die Energiedifferenzen ΔW zwischen den erlaubten Bahnen ergeben sich aus Gl. (6.8) mit $n = 1; 2; \dots$ und $n' = n + 1$; sie werden mit $1/n^2$ kleiner; in Bild 6.3b sind sie mit horizontalen Trennstrichen (den „Energieniveaus“) aneinandergereiht und bilden die W -Achse. Für $n \rightarrow \infty$ gehen die $\Delta W \rightarrow 0$ und die $r \rightarrow \infty$, d.h., das Atom ist ionisiert.

Daher heißt die gestrichelte Grenze, gegen die sich die Energieniveaus drängen, Ionisierungsgrenze und ihr Abstand zum Niveau $n = 1$ Ionisierungsenergie W_1 . Den Nullpunkt einer Energieskala kann man immer willkürlich festlegen. Hier legt man ihn häufig an die Ionisierungsgrenze. Dann ergibt sich:

Ein Elektron kann, wenn es an ein Atom gebunden ist, nur bestimmte, diskrete Energien haben; ein freies Elektron kann beliebige kinetische Energien haben.

Damit sind also die bestimmten, diskreten „Zustände“ der Atomhülle von Abschn. 6.1.1 als „erlaubte Elektronenbahnen“ erklärt. Die Abgabe und Aufnahme von Photonen und die Entstehung von Linienspektren erklärt sich aus der zweiten Bohrschen Forderung:

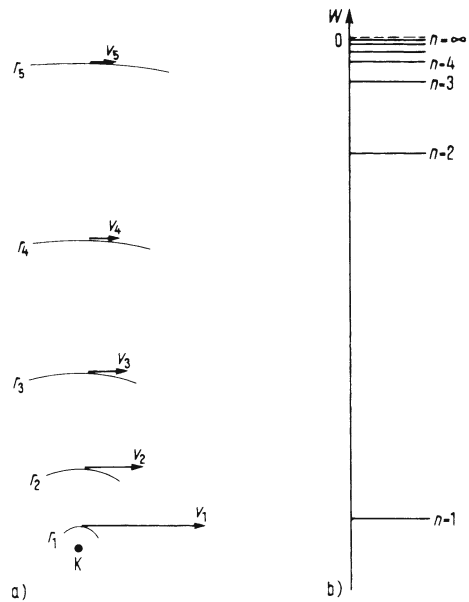


Bild 6.3 a) Stationäre Bahnen und Bahngeschwindigkeiten
b) Energieniveaus

Zweites Bohrsches Postulat

Wenn ein Elektron von einer stationären Bahn n' mit der höheren Energie $W_{n'}$, einem sog. angeregten Energieniveau, auf eine Bahn n mit niedrigerer Energie W_n überwechselt, wird die Energiedifferenz

$$\Delta W = W_{n'} - W_n$$

als elektromagnetische Welle ausgesendet, für die die Quantenbedingung Gl. (5.112)

$$\Delta W = h f \tag{6.9}$$

gilt. Diese Energieportion der elektromagnetischen Welle nennt man ein Lichtquant oder Photon.

Anwendung auf das Wasserstoffatom

Das Wasserstoffatom ist am einfachsten gebaut. Es besteht aus einem Kern mit einer positiven Elementarladung und einem Elektron in der Hülle. Wir wollen daran die Zweckmäßigkeit der Bohrschen Postulate prüfen.

Atomdurchmesser. Gl. (6.6) liefert mit ($n = 1$; $Z = 1$) den Radius der kleinsten Bahn, den sog. Bohrschen Radius

$$r_1 \approx 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

in bester Übereinstimmung mit dem aus der kinetischen Gastheorie und aus der Chemie bekannten Durchmesser des Wasserstoffatoms.

Spektrallinien. Nach Gl. (6.8) sind die Differenzen zwischen den Energieniveaus gegeben. Die Frequenzen der Wellen, die nach dem zweiten Bohrschen Postulat ausgesandt werden, ergeben sich daraus nach Gl. (6.9) durch Division mit h ; speziell für Wasserstoff ist außerdem $Z = 1$ einzusetzen. Also

$$f = \frac{e_0^4 m_e}{8 \varepsilon_0^2 h^3} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right)$$

Setzt man die bekannten Werte für e_0 , m_e , ε_0 und h ein, so erhält man

$$f = 3,28984 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right)$$

in guter Übereinstimmung mit der Rydberggleichung in Abschn. 6.1.1.1, die die Serien und Linien des Wasserstoffspektrums beschreibt. Demnach ist die Rydbergfrequenz

$$R_{f\infty} = \frac{e_0^4 m_e}{8 \varepsilon_0^2 h^3} \quad (6.10)$$

Die Masse des Protons m_p ist nur rund 2000 mal so groß wie die des kreisenden Elektrons m_e . Daher ist die Annahme, allein das Elektron kreise um den ruhenden Kern, nicht ganz exakt. Richtiger ist, sich vorzustellen, dass beide um ihren gemeinsamen Schwerpunkt kreisen. Dann tritt an die Stelle von m_e in Gl. (6.10) – wie hier nicht vorgerechnet werden soll – die sog. reduzierte Masse $m_{\text{red}} = m_e m_p / (m_e + m_p) = 9,10450 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$. Damit bekommt man für die Rydbergfrequenz den Wert

$$R_{fH} = 3,28805 \cdot 10^{15} \text{ Hz},$$

der dem empirisch gefundenen Wert bei Gl. (6.1) noch näher kommt.

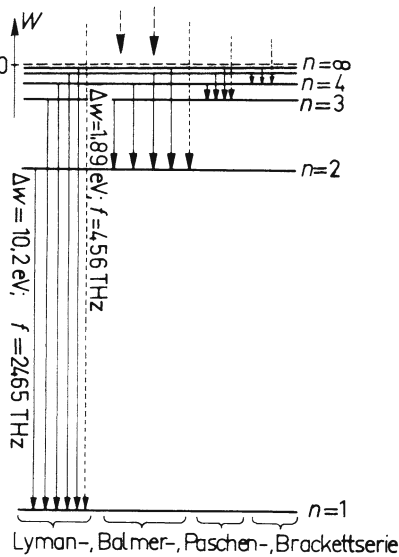


Bild 6.4 Energieniveauschema und Übergänge im Wasserstoffatom

Bild 6.4 zeigt nochmals das Energieniveauschema oder „Termschema“ (Bild 6.3b). Die einzelnen Übergangsmöglichkeiten sind als senkrechte Pfeile eingezeichnet und in Gruppen geordnet, entsprechend den Serien von Spektrallinien. Für einige Übergänge sind die Energiedifferenzen und die zugehörigen Frequenzen angeschrieben.

In der Gasentladung gibt es immer auch ionisierte H-Atome, die sich nach einiger Zeit ein freies Elektron einfangen. Dieses kann vorher jede beliebige Energie gehabt haben. Daher können bei den Einfangprozessen auch ganz beliebige Energiedifferenzen ΔW frei werden (punktierte Linien in Bild 6.4), und damit werden auch ganz beliebige Frequenzen emittiert. Tatsächlich kann man auch zu jeder Serie von Linien ein (sehr schwaches) kontinuierliches Spektrum beobachten, das sog. Grenzkontinuum.

Wasserstoffähnliche Spektren

Wenn man Atome mit einer Ordnungszahl $Z > 1$, die also schwerer als Wasserstoffatome sind, so weit ionisiert, bis sie nur noch ein Elektron haben, dann ist der verbleibende „Atomrumpf“ einem Wasserstoffatom ähnlich: Um einen Kern kreist ein Elektron. Nur ist die Anziehungskraft des Z -fach geladenen Kerns entsprechend größer, die Bahnradien nach Gl. (6.6) um den Faktor $1/Z$ kleiner und die Energiedifferenzen ΔW nach Gl. (6.8) um den Faktor Z^2 größer. Es müssen also im Spektrum im Prinzip die gleichen Serien wie im Wasserstoffspektrum auftreten, nur haben alle Linien eine um den Faktor Z^2 höhere Frequenz. Tatsächlich wurde bereits vor Bohr eine derartige Serie des He^+ in Sternspektren entdeckt. Im Labor kann man auch die Spektren hochionisierter schwerer Atome bis etwa zum 18-fach positiv geladenen Kalium K^{18+} beobachten. Ihre Frequenzen entsprechen sehr gut den theoretisch erwarteten Werten.

Grenzen des Bohrschen Atommodells

Es sind hauptsächlich folgende zwei Gruppen von Erscheinungen, die das Bohrsche Modell nicht erklären kann:

1. Feinstruktur. Untersucht man die einzelnen Linien der Balmerreihe des Wasserstoffspektrums mit höherer spektraler Auflösung, z.B. mit einem Interferometer (vgl. Abschn. 5.2.6.3), so zeigt sich, dass die „Linien“ in Wirklichkeit aus mehreren eng benachbarten Linien bestehen. Statt einer Frequenz werden also mehrere eng benachbarte ausgestrahlt, folglich müssen auch eng benachbarte Energieniveaus im Atom vorkommen.

2. Alkalispektren. Von den Alkaliatomen weiß man (s. Abschn. 6.1.1.5), dass ihre inneren stationären Bahnen ($n = 1$; $n = 2$ usw.) von ihren Elektronen besetzt sind. Durch genügend schwache Energiezufuhr wird nur das äußerste dieser Elektronen auf höhere (unbesetzte) Bahnen gehoben und fällt dann wieder unter Ausstrahlung auf seine Grundbahn ($n > 1$ (!)) zurück. Wir haben also eine wasserstoffähnliche Anordnung vor uns: Ein Elektron – das äußerste – kreist um einen Kern, von dessen Z -facher Ladung nur eine auf das äußerste Elektron wirkt, weil die übrigen $Z-1$ Ladungen durch die $Z-1$ Elektronen, die weiter innen kreisen, kompensiert werden. Man sagt, die inneren Elektronen schirmen das Kernfeld ab. Trotz dieser Ähnlichkeit der Anordnung sind die entstehenden Alkalispektren vom Wasserstoffspektrum recht verschieden. Eine Erklärung liefert die folgende Modellerweiterung.

6.1.2.2 Sommerfeldsche Erweiterung des Atommodells¹⁾

Die Nebenquantenzahl

Ellipsenbahnen. Genau wie bei der Planetenbewegung können bei diesem Modell die Elektronen statt auf Kreisbahnen ebenso gut auf Ellipsenbahnen umlaufen, wobei der Kern in einem Brennpunkt der Ellipse ist. Dabei hat nach den Gesetzen der klassischen Mechanik ein Elektron auf allen Ellipsen mit gleich großer Halbachse a die gleiche Energie wie auf einer Kreisbahn mit ebenso großem Radius r_n . Der Drehimpuls der Bahnbewegung dagegen wird mit zunehmender Exzentrizität (abnehmender kleiner Halbachse) immer kleiner. Der Drehimpuls hat aber die Dimension Wirkung und sollte daher nur in ganzzahligen Vielfachen von $\hbar/2\pi = \hbar$ vorkommen. Da sich diese Quanten-

¹⁾ A. A. Sommerfeld (1868 bis 1951).

lung als erstes Bohrsches Postulat bewährt hatte, wurde sie von Sommerfeld nochmals verwendet, um unter den unendlich vielen, verschieden exzentrischen Ellipsen einige bestimmte, „erlaubte“ auszuwählen: Es sollen nur jene kleinen Halbachsen von Ellipsen „erlaubt“ sein, für die sich für den Bahndrehimpuls L eines umlaufenden Elektrons (bei vorgegebener großer Halbachse) ein ganzzahliges Vielfaches von \hbar ergibt.

Im Einzelnen sieht Sommerfelds Modell so aus: Läuft das Elektron auf der untersten Kreisbahn ($n = 1$) um, so hat es bereits den kleinstmöglichen Bahndrehimpuls $L_1 = m_e r_1 v_1 = 1 \cdot \hbar$ (vgl. Gl. (6.5)), einen kleineren durch Umlauf auf einer elliptischen Bahn ($a = r_1$) anzunehmen, ist nicht möglich oder „nicht erlaubt“. Zur energetisch nächst höheren Bohrschen Kreisbahn ($n = 2$) dagegen gehört der Bahndrehimpuls $L_2 = m_e r_2 v_2 = 2 \cdot \hbar$. Ein angeregtes Elektron kann entweder auf dieser Bahn umlaufen oder – klassisch betrachtet mit gleicher Energie – auf einer Ellipsenbahn ($a = r_2$), wobei es nur den halben Bahndrehimpuls $L_2/2 = 1 \cdot \hbar$ hat.

Verallgemeinert kann man sich vorstellen, dass ein Elektron mit der Energie W_n des n -ten Energieniveaus entweder auf einer Kreisbahn mit Radius r_n und Bahndrehimpuls $L = n \cdot \hbar$ umlaufen kann oder – klassisch mit gleicher Energie – auf allen Ellipsen, die folgende Bedingungen erfüllen: Erstens müssen ihre großen Halbachsen a_n gleich dem Kreisradius r_n sein; zweitens haben sie verschiedene kleine Halbachsen b_l derart, dass die Bahndrehimpulse die Werte

$$L_l = (n - 1) \hbar; (n - 2) \hbar; \dots \hbar$$

haben. Wie hier nicht vorgerechnet werden soll, ergibt sich für die kleinen Halbachsen

$$b_{m,l} = a_n \frac{l+1}{n},$$

worin die ganze Zahl l die n Werte $l = 0; 1; \dots (n - 1)$ annehmen kann.

Bei $n = 1$ also nur $l = 0$ und damit $b_{1,0} = a_1 \frac{1}{1}$: eine Kreisbahn.

Bei $n = 2$ entweder $l = 0$ und damit $b_{2,0} = a_2 \frac{1}{2}$: eine Ellipsenbahn,

oder $l = 1$ und damit $b_{2,1} = a_2 \frac{2}{2}$: eine Kreisbahn.

Bei $n = 3$ entweder $l = 0$ und damit $b_{3,0} = a_3 \frac{1}{3}$: eine exzentrische Ellipsenbahn,

oder $l = 1$ und damit $b_{3,1} = a_3 \frac{2}{3}$: eine rundere Ellipsenbahn,

oder $l = 2$ und damit $b_{3,2} = a_3 \frac{3}{3}$: eine Kreisbahn.

usw.

Die Zahl l nummeriert also die verschiedenen Bahnformen, die zu einem bestimmten Bahnradius oder einer bestimmten großen Halbachse (nummeriert durch n) möglich sind.

Man nennt l die Bahndrehimpulsquantenzahl oder Nebenquantenzahl und n die Hauptquantenzahl. Ihr Zusammenhang ist

$$l = 0; 1; 2; \dots (n - 1)$$

Entscheidend ist nun, dass die Aussage der klassischen Mechanik über die Energiegleichheit der nur verschiedenen exzentrischen Bahnen im Atom offensichtlich nicht gilt: Das elliptisch umlaufende Elektron hat in Kernnähe eine größere Geschwindigkeit als im kernfernen Teil seiner Bahn. Berücksichtigt man die relativistische Massenänderung (s. Abschn. 8), die dabei auftritt, so ergibt sich, wie hier nicht weiter ausgeführt werden kann:

Die verschiedenen elliptischen Bahnen zu einer Hauptquantenzahl n haben etwas verschiedene Energien.

Das heißt, dass jedes der ursprünglich einfachen Energieniveaus in Bild 6.4 in Teilniveaus aufspaltet. Dadurch kommt die oben beschriebene Feinstruktur des Wasserstoffspektrums zustande.

Aus historischen Gründen bezeichnet man Bahnen mit $l = 0$ auch mit dem Buchstaben s, die mit $l = 1$ mit p, die mit $l = 2$ mit d und die mit $l = 3$ mit f.

Tauchbahnen. Für die Alkaliatome bedeutet die elliptische Form der Bahn des äußersten, des Leuchtelektrons, eine viel stärkere Änderung der Energie: Die elliptischen Bahnen tauchen in den inneren Teil der Hülle ein; das Elektron ist dadurch zeitweise der stärkeren Anziehung des Z -fach geladenen Kerns ausgesetzt, denn da die anderen Elektronen während des „Tauchens“ weiter vom Kern entfernt sind als das tauchende Elektron, ist die oben erwähnte Abschirmung nicht wirksam. Dadurch sind die Energieniveaus der Bahnen mit niedriger Nebenquantenzahl l gegenüber denen mit hohem l abgesenkt, und zwar um Differenzen von der gleichen Größenordnung wie die Energiedifferenzen zwischen Niveaus mit verschiedener Hauptquantenzahl. Dadurch wird dann das Energieniveauschema wesentlich komplizierter als Bild 6.4 (s. Bild 6.8).

Weitere Quantenzahlen

Untersucht man die Spektrallinien der Alkalien genauer, so zeigt sich, dass die meisten in Wirklichkeit aus zwei benachbarten bestehen (Dubletts), ähnlich wie die Feinstruktur des Wasserstoffspektrums, jedoch mit wesentlich größeren Frequenzunterschieden. Außerdem spalten die Linien beim Anlegen eines äußeren magnetischen oder elektrischen Feldes nochmals auf. Die zugehörigen Aufspaltungen der Energieniveaus lassen sich auch mit der elliptischen Form der Elektronenbahnen nicht erklären. Es sind vielmehr weitere Verfeinerungen des Modells notwendig:

Magnetisches Bahnmoment – Zeemaneffekt¹⁾. Das umlaufende Elektron stellt einen Kreisstrom dar, der ein magnetisches Moment \vec{j}_A hat (vgl. Abschn. 3.3.2.6 und 3.3.5.2). Dieses tritt mit einem äußeren Magnetfeld, das z.B. in z -Richtung angelegt wird, in Wechselwirkung. Und zwar auf zweierlei Weise: Erstens übt das äußere Feld \vec{B} auf das magnetische Bahnmoment \vec{j}_A ein Drehmoment aus, und zweitens hat ein im äußeren Magnetfeld \vec{B} umlaufendes Elektron eine andere Energie als ohne Feld. Vorzeichen und Größe dieser Energieänderung hängen u.a. von der Orientierung der Bahnebene, d.h. von der Richtung des magnetischen Bahnmoments \vec{j}_A zur Feldrichtung \vec{B} ab. Würde das besagte Drehmoment einfach alle magnetischen Bahnmomente \vec{j}_A parallel zu \vec{B} drehen, so müssten alle zugehörigen Spektrallinien gegenüber denen ohne äußeres Feld einfach ein Stück auf der Frequenzskala verschoben sein. Das ist nicht der Fall. Blieben andererseits alle Bahnebenen und \vec{j}_A beliebig orientiert in Bezug auf \vec{B} , dann müssten die Spektrallinien einer im Magnetfeld betriebenen Gasentladung zu ganzen Frequenzbändern verbreitert sein. Das ist auch nicht der Fall, die Linien spalten vielmehr in einige wenige, diskrete Linien auf. Also stellt man sich modellmäßig vor, dass wieder nur einige bestimmte Lagen der Ebene der Umlaufbahn möglich oder „erlaubt“ sind. Sie werden durch eine ganze Zahl, die magnetische oder Richtungsquantenzahl m , charakterisiert. Dieses m kann die

¹⁾ Peter Zeeman (1865 bis 1944, Nobelpreis 1902).

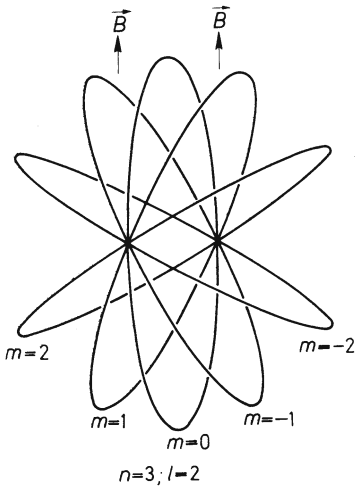


Bild 6.5 Die 5 „erlaubten“ Orientierungen der Ellipsen ($n = 3, l = 2$) im Magnetfeld \vec{B}

Der Spin von Elementarteilchen

Elektronenspin. Eine Reihe von Experimenten zeigt, dass jedes einzelne Elektron – unabhängig von seiner Bahn – einen Drehimpuls besitzt, den man Spin nennt (vgl. Abschn. 3.3.5.2). (Ein nur sehr beschränkt brauchbares Modell ist die Vorstellung, das Elektron sei eine kleine rotierende Kugel.) Da das Elektron geladen ist, ist mit dem Spin auch ein magnetisches Moment – das Spinnmoment – fest verbunden. Dieses tritt mit jedem anderen Magnetfeld, z.B. dem magnetischen Bahnmoment, in Wechselwirkung. Eine wichtige (quantenmechanische) Eigenschaft des Spinnmomentes ist nun, dass es sich zu dem anderen magnetischen Moment nur parallel oder antiparallel einstellen kann, d.h., Bahnmoment und Spinnmoment sind immer parallel oder antiparallel. Die gleiche Aussage gilt dann auch für Bahndrehimpuls und Spin, denn das magnetische Bahnmoment ist ja mit dem mechanischen Bahndrehimpuls und das magnetische Spinnmoment mit dem mechanischen Spin fest verbunden. Die wesentliche Auswirkung ist: Die parallel stehenden Elektronen haben etwas andere Energie als die antiparallel stehenden; so erklären sich weitere Einzelheiten im Helium- und in Alkalispektren.

Der Spin hat den Betrag $L_e = s\hbar$ mit der Spinquantenzahl s . Diese hat für Elektronen den einzigen Wert $s = 1/2$. Beim gebundenen Elektron beobachtet man immer nur die vektorielle Summe aus Bahndrehimpuls und Spin. Da sich Letzterer immer nur parallel oder antiparallel zum Bahndrehimpuls einstellt, bemerkt man vom Spin nur die Komponente in Richtung des Bahnmomentes (oder des äußeren Magnetfeldes in z -Richtung) $L_{ez} = m_s\hbar$ mit der Orientierungsquantenzahl $m_s = \pm s$, sodass sich die beiden Werte $L_{ez} = \pm\hbar/2$ bemerkbar machen, je nachdem ob der Spin parallel oder antiparallel zum Bahndrehimpuls (oder zum äußeren Magnetfeld) steht. Dadurch unterscheiden sich auch alle erlaubten Gesamtdrehimpulse L_{ges} – die vektoriellen Summen aus Bahndrehimpuls und Spin – um ganzzahlige Vielfache von \hbar .

Beim „Umklappen“ von einer in die andere Spinstellung ist $\Delta m_s = 1$ und die Änderung des Spins selbst $\Delta L_e = \hbar$ (s. unten „Auswahlregel“). Dass der Betrag des Spins nur $L_e = \hbar/2$ ist,

Werte $0; \pm 1; \pm 2; \dots \pm l$ annehmen. In Bild 6.5 sind z.B. die 5 Kreisbahnen in Bezug zum Magnetfeld \vec{B} gezeichnet, die sich bei den angeschriebenen Quantenzahlen ergeben.

Ohne äußeres Feld haben wieder alle Bahnen mit gleichen n und l gleiche Energie, die Aufspaltungen im Spektrum verschwinden. Es ist ja auch die räumliche Orientierung von Bahnebenen zu einem Feld nicht mehr definiert. Trotzdem stellt man sich im Bohr-Sommerfeldschen Modell vor, dass bei Atomen mit mehreren Elektronen die gegenseitige Orientierung der Bahnen untereinander erhalten bleibt. Diese Vorstellung ermöglicht eine plausible Erklärung des Periodischen Systems der Elemente (s. unten).

während doch sonst immer die Drehimpulse $L = \hbar$ sind, ist besonders bemerkenswert. Dies liegt daran, dass Drehimpulse sich grundsätzlich immer nur um $\pm\hbar$ ändern können, im Falle des Elektrons also von $+\hbar/2$ nach $-\hbar/2$ und umgekehrt.

Der Spin anderer Elementarteilchen. Die Eigenschaft, einen Eigendrehimpuls oder Spin zu besitzen, ist nicht auf Elektronen beschränkt. Vielmehr zeigen viele Experimente, dass auch andere Elementarteilchen einen Spin haben. Dieser kann je nach Teilchenart allerdings in Bezug auf eine durch die physikalische Situation vorgegebene Richtung – das ist, wie oben beschrieben, bei Elektronen z.B. die Richtung des Bahndrehimpulses – nicht nur halbzahlige, sondern auch ganzzahlige Vielfache von \hbar betragen. Es gibt auch Teilchen ohne Spin, z.B. He-Atomkerne, sog. α -Teilchen (s. Abschn. 6.2.1.1).

Selbst Photonen muss man einen Spin zuordnen. Denn, wie die im nächsten Abschnitt „Alkalispektren“ beschriebenen sog. Auswahlregeln für Spektrallinien zeigen, kommen nur solche Übergänge von einem Energieniveau zu einem anderen vor, bei denen sich der gesamte atomare Drehimpuls um $\pm\hbar$ ändert. Wegen des Satzes von der Erhaltung des Drehimpulses müssen die Photonen also den Drehimpuls $+\hbar$ oder $-\hbar$ in Bezug auf ihre Bewegungsrichtung „mitnehmen“. Dies entspricht im Wellenbild übrigens einer rechts- bzw. links-zirkular polarisierten Welle. Interessanterweise ist demnach linear polarisiertes Licht immer eine Überlagerung von rechts- und linkspolarisiertem Licht, d. h. eine Mischung von Photonen mit dem Spin $+\hbar$ und $-\hbar$.

Es sei noch angemerkt, dass es auch strahlungslose Übergänge gibt, bei denen die erwähnte Auswahlregel verletzt wird. Dies liegt einfach daran, dass kein Photon ausgesandt wird. Die Energie wird hierbei z.B. durch Stöße an andere Atome oder die Wände des Gefäßes, in dem sich die angeregten Atome befinden, abgegeben.

Die Tafel 6.6 zeigt Beispiele für den Spin verschiedener Teilchen.

Tafel 6.6 Beispiele für den Spin verschiedener Teilchen

Teilchenart	Mögliche Orientierungen	Spinquantenzahl
He-Atomkerne (α -Teilchen)		0
Elektronen } Protonen } Neutrinos }	$-\frac{1}{2}\hbar; +\frac{1}{2}\hbar$	1/2
${}^2_1\text{H}$ -Kerne (Deuteronen)	$-\hbar; 0; +\hbar$	0;1
Photonen	$+\hbar; -\hbar$	1

Fermionen und Bosonen

Elementarteilchen mit ungeradzahligem Spinquantenzahl (also z.B. Elektronen und Protonen) fasst man in der Gruppe der sog. Fermionen¹⁾ zusammen, solche mit ganzzahligem Spin (also z.B. α -Teilchen, Deuteronen und Photonen) in der Gruppe der sog. Bosonen²⁾. Diese Einteilung ist zweckmäßig und besonders bemerkenswert, weil beide Teilchenarten immer dann, wenn mindestens zwei von ihnen in einem Kollektiv miteinander wechselwirken können, ein völlig verschiedenes Verhalten zeigen. Auf die theoretische Begründung müssen wir hier leider verzichten. Alle Ergebnisse, unter anderem z.B. der im nächsten Abschnitt behandelte Schalenaufbau der Atomhülle, bestätigen dies jedoch glänzend.

¹⁾ Enrico Fermi (1901 bis 1954, Nobelpreis 1938) s. auch Abschn. 7.3.

²⁾ Satyendra Nath Bose (1894 bis 1974, Nobelpreis 1945).

Erstaunlicherweise gilt:

Fermionen gehorchen dem sog. Pauliprinzip¹⁾: In einem System, in dem identische Fermionen miteinander wechselwirken können, stimmen niemals zwei Teilchen in allen quantenmechanischen Zustandsgrößen (z.B. Quantenzahlen) überein. Die Wahrscheinlichkeit dafür, in einem noch so großen Kollektiv, z.B. den Elektronen in einem Stück Silizium, zwei Fermionen im gleichen Quantenzustand zu finden, ist identisch gleich null.

Darauf beruht z.B. der unten beschriebene Aufbau der Elektronenhüllen der Atome oder die ganze Mikroelektronik (s. Abschn. 7.4). Ebenso verwunderlich ist das völlig entgegengesetzte Verhalten von Bosonen, für die gilt:

Identische Bosonen neigen in einem Kollektiv dazu, nach Möglichkeit alle den gleichen Quantenzustand einzunehmen. Befinden sich bereits N Bosonen im gleichen Zustand, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein weiteres Boson in denselben Zustand geht, $(N+1)$ mal so groß als dafür, N Teilchen in diesem Zustand zu finden.

Dieses Verhalten ist wichtig z.B. für das Verständnis des Lasers (s. Abschn. 6.1.3.1) oder der Supraleitung (Abschn. 7.4.4).

Schalenaufbau der Atomhülle

Wir fassen die Quantenzahlen und ihre Bedeutung zusammen:

1. Die Hauptquantenzahl n bestimmt den Radius der Kreisbahn oder die große Halbachse der zugehörigen Ellipsenbahnen; sie legt die Energie in groben Zügen fest.
2. Die Nebenquantenzahl l bestimmt die Exzentrizität der verschiedenen Ellipsenbahnen mit gleichem n ; sie kann n Werte annehmen, nämlich $0; 1; 2; \dots; n-1$.
3. Die magnetische Quantenzahl m bestimmt die Orientierung der einzelnen Bahnen im Raum; sie kann $2l+1$ Werte annehmen, nämlich $-l; -l+1; \dots; 0; 1; \dots; l$.
4. Die Orientierungsquantenzahl m_s bestimmt die Orientierung des Elektronendrehimpulses zum Bahndrehimpuls; sie kann 2 Werte annehmen, nämlich $+1/2$ und $-1/2$.

Alle Bahnen mit gleicher Hauptquantenzahl n , also mit ungefähr gleicher Energie, fasst man zu einer sog. Schale zusammen. Die innerste Schale ($n=1$) heißt aus historischen Gründen K-Schale, die zweite ($n=2$) L-Schale, die dritte ($n=3$) M-Schale usw. Wie viele Bahnen die einzelnen Schalen enthalten, zeigt Tafel 6.7.

Allgemein enthält eine Schale mit der Hauptquantenzahl n jeweils n^2 Bahnen mit etwas verschiedener Energie.

Systematik der chemischen Elemente. Ordnet man alle chemischen Elemente nach steigenden relativen Atommassen (Nummerierung ergibt Ordnungszahl Z), so stellt man eine Periodizität der chemischen Eigenschaften fest. Dies führte rein empirisch zur Aufstellung des „Periodensystems der Elemente“ durch Mendelejeff und Meyer²⁾ (siehe Anhang).

¹⁾ Wolfgang Pauli (1900 bis 1958, Nobelpreis 1945).

²⁾ Dimitri Iwanowitsch Mendelejeff (1834 bis 1907) und Julius Lothar Meyer (1830 bis 1895).

Man kann dieses System in allen Einzelheiten verstehen, wenn man für den Aufbau der Atomhüllen folgende „Bauprinzipien“ annimmt:

1. Alle Z Elektronen eines Atoms laufen auf denjenigen, nach dem Schalenmodell erlaubten Bahnen (vgl. Tafel 6.7) um, auf denen sie eine möglichst niedrige Energie haben.
2. Sie befinden sich aber nicht alle auf der innersten Bahn ($n = 1$), denn es gilt das Pauliprinzip (vgl. den obigen Abschn. „Fermionen und Bosonen“).

Auf jeder der in Tafel 6.7 genannten Bahnen können demnach zwei Elektronen kreisen, wenn beide antiparallele Spins haben; denn dann unterscheiden sie sich in der Orientierungsquantenzahl m_s . In der K-Schale haben 2, in der L-Schale 8, in der M-Schale 18 usw. Elektronen Platz; also allgemein:

In der n -ten Schale haben $2n^2$ Elektronen Platz.

Tafel 6.7 Schalenaufbau der Atomhülle

K	$n = 1$	$l = 0$	$m = 0$	eine Kreisbahn		
L	$n = 2$	$l = 0$	$m = 0$	eine Ellipsenbahn und 3 Kreisbahnen	auf jeder Bahn 2 Einstellmöglichkeiten des Spins: $\uparrow\uparrow$ und $\uparrow\downarrow$ zum Bahnmoment ($m_s = \pm 1/2$)	
			$m = -1$			
			$m = 1$			
M	$n = 3$	$l = 0$	$m = 0$	eine stark exzentr. Ellipsenbahn drei schwächer exzentr. Ellipsenbahnen und fünf Kreisbahnen		
			$l = 1$			$m = 0$
						$m = \pm 1$
			$l = 2$			$m = 0$
						$m = \pm 1$ $m = \pm 2$

Im nicht angeregten, im Grundzustand, hat ein Wasserstoffatom ein Elektron auf einer „1s-Bahn“ (1 für $n = 1$, s für $l = 0$) oder kurz ein 1s-Elektron. Helium hat zwei 1s-Elektronen und damit eine abgeschlossene Schale. Beide Elektronen haben sehr niedrige Energie, d.h., sie sind fest an das Atom gebunden, andererseits passt kein drittes Elektron in diesen energetisch niedrigen Zustand. Daher geht das Helium kaum chemische Bindungen ein (s. unten), es ist ein Edelgas. Das dritte Elektron des Lithiums ist ein 2s-Elektron; es ist wegen des großen Bahnradius und wegen der Abschirmung der Kernanziehung durch die beiden inneren 1s-Elektronen nur schwach gebunden. Das bedingt die hohe chemische Aktivität – den Alkalicharakter – des Lithiums. Ebenso beruht die etwas geringere chemische Aktivität des Erdkalielementes Beryllium auf seinen zwei 2s-Elektronen. Bei den weiteren Elementen von Bor bis Neon werden der Reihe nach die sechs 2p-Elektronen eingebaut. Dann ist die L-Schale voll: Neon ist wieder ein Edelgas. Das elfte Elektron des Natriums steht wieder allein als 3s-Elektron in der M-Schale (Alkali!) usw., bis beim Argon die M-Schale zwar noch nicht voll ist, aber doch wieder acht Elektronen (zwei 3s, sechs 3p) enthält (vgl. Neon). Dieses Elektronenoktett ist offensichtlich eine besonders stabile Anordnung, denn erstens ist Argon ein Edelgas, zweitens haben auch die schwereren Edelgase Krypton und Radon dieses Oktett in ihrer äußersten Schale, und drittens versuchen sich Atome immer so zu Molekülen zu verbinden, dass dann beide gemeinsam ein

Elektronenoktett haben (außer H_2). Bei den nächsten Elementen Kalium und Calcium werden nicht die noch freien 5 Kreisbahnen (3d) der M-Schale aufgefüllt, sondern die stark elliptische 4s-Bahn, da sie als „Tauchbahn“ niedrigere Energie hat. Ähnlich lassen sich auch weitere scheinbare Unregelmäßigkeiten aus den Energieniveaus des Schalenmodells erklären. Darauf soll jedoch hier nicht weiter eingegangen werden.

Alkalispektren

Wie oben im Absatz „Tauchbahnen“ schon besprochen, haben die Alkaliatome eine „wasserstoffähnliche“ Elektronenanordnung. Trotzdem unterscheiden sich die Alkalispektren wesentlich vom Wasserstoffspektrum. Das können wir jetzt erklären. Bild 6.8 zeigt das Energieniveauschema des äußersten Elektrons am Kaliumatom, des sog. Leuchtelektrons. Dabei ist die Energie in eV angegeben (vgl. Abschn. 3.2.6.1). Die erlaubten Energieniveaus sind als waagrechte Striche eingezeichnet, und zwar der Übersichtlichkeit halber in mehreren Spalten nebeneinander. Der Wert der Hauptquantenzahl n ist vor jedem Niveau angeschrieben.

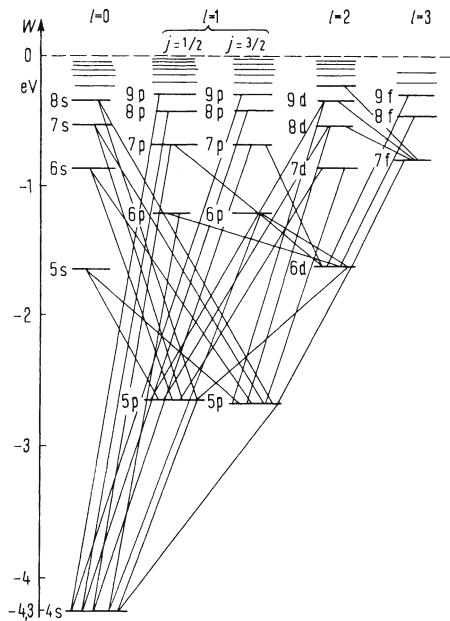


Bild 6.8 Energieniveauschema für das Leuchtelektron des Kaliumatoms

Die erste Spalte enthält alle Niveaus mit der Nebenquantenzahl $l = 0$, die man s-Niveaus oder s-Terme nennt. Die zweite und dritte Spalte enthält alle Niveaus mit der Nebenquantenzahl $l = 1$, die p-Terme, unterteilt nach den beiden Gesamtdrehimpulsen $L_{\text{ges}} = (1/2) \hbar$ und $L_{\text{ges}} = (3/2) \hbar$. Nur die drei untersten, die 5p-, 6p- und 7p-Niveaus unterscheiden sich merklich voneinander. In der vierten und fünften Spalte sind schließlich die Niveaus mit $l = 2$ und die mit $l = 3$ (d- und f-Terme) zusammengefasst. Eine Unterscheidung nach verschiedenen Gesamtdrehimpulsen ist hier wegen der verschwindend kleinen Energieunterschiede nicht mehr nötig. Von allen möglichen Übergängen zwischen verschiedenen Niveaus sind in das Schema nur diejenigen eingetragen, deren Spektrallinien tatsächlich beobachtet werden. Dabei fällt auf, dass nur Übergänge zwischen benachbarten s-, p-, d- oder f-Spalten vorkommen.

Das drückt man durch die sog. Auswahlregel aus: Erlaubt sind nur solche Übergänge, bei denen sich der Gesamtdrehimpuls um \hbar ändert ($\Delta l = \pm 1$ oder $\Delta m_s = \pm 1$).

Spektren bei mehreren Leuchtelektronen

Außer Wasserstoff und Alkalien besitzen alle Atome mehrere Elektronen in der äußersten Schale. Es gelingt bei diesen nicht mehr, ein Energieniveauschema theoretisch aus dem Schalenmodell herzuleiten. Man kann nur aus den sehr linienreichen und zunächst unübersichtlichen Spektren empirisch Niveauschemata ausprobieren mit dem Ziel, die Spektral-

linien nach Serien zu ordnen. Meist sind dazu mehrere voneinander unabhängige Schemata sowie die Einführung weiterer Auswahlregeln notwendig. So findet man z.B. für das Zwei-Elektronen-System Helium die beiden Schemata in Bild 6.9.

Das linke gehört zu Heliumatomen, bei denen beide Elektronenspins antiparallel stehen; alle Niveaus darin haben zur Kennzeichnung eine hochgestellte 1; das rechte gehört zu solchen mit parallelen Spins, zur Kennzeichnung dient die hochgestellte 3. Dieses rechte hat kein Grundniveau $1s$, denn das hieße, dass sich beide Elektronen in allen Quantenzahlen gleichen, im Widerspruch zum Pauliprinzip.

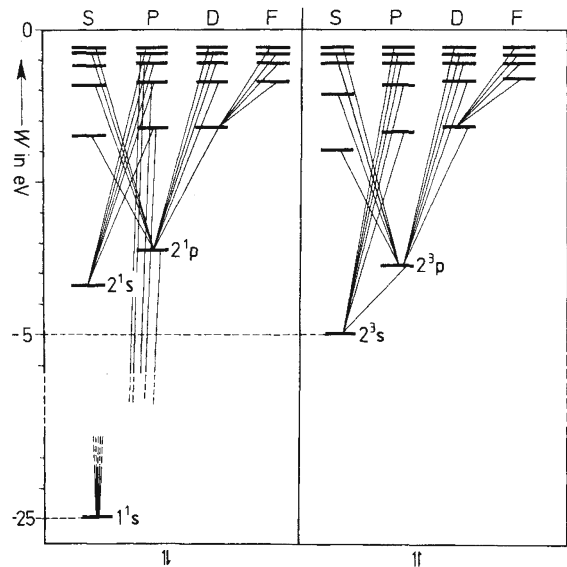


Bild 6.9 Energieniveaus und Übergänge des Heliums

Zu allen beobachteten Spektrallinien sind die Übergänge zwischen Energieniveaus eingezeichnet. Jedes Bündel von Übergangslinien definiert eine Serie von Spektrallinien. So kommt die angestrebte Ordnung zustande. Die erwähnte zusätzliche Auswahlregel ist hier: Es gibt keine Übergänge von einem Schema ins andere.

Metastabile Zustände oder Energieniveaus nennt man solche angeregten Zustände oder Niveaus, auf denen Elektronen bis zu 10^5 mal so lang verweilen als auf normalen (welche sie im Durchschnitt nach 10^{-8} s wieder verlassen). Der Grund für das längere Verweilen – oder die längere „Lebensdauer“ τ – ist immer, dass es von derartigen Niveaus zu einem niedrigeren Niveau nur „verbotene“ Übergänge gibt, d.h. solche, die eine Auswahlregel verletzen. Zum Beispiel gibt es einen Übergang vom 2^1s -Niveau des Heliums (Bild 6.9) zum einzigen tieferen, zum 1^1s -Niveau nur unter Verletzung der oben genannten Auswahlregel „ $\Delta L_{\text{ges}} = \hbar$ “ und vom 2^3s -Niveau zum 1^1s -Niveau nur gegen die hier genannte Auswahlregel „kein Übergang von Schema zu Schema“. Daher sind die Heliumniveaus 2^1s und 2^3s metastabil.

Für das Folgende ist außerdem noch wichtig, dass Elektronen nicht dadurch in metastabile Zustände gelangen können, dass sie ein Photon absorbieren, dessen Energie gerade dem verbotenen Übergang entspricht. Vielmehr gelangen sie dorthin immer nur auf Umwegen (s. unten).

Atome ohne metastabile Niveaus sind fast alle immer im Grundzustand, auch wenn man mit sehr hohen Energiedichten anregt. Das liegt an der sehr kurzen Lebensdauer der angeregten Atome auf den normalen Niveaus. Von Atomen mit metastabilen Niveaus dagegen kann man durch genügend starkes Anregen (Pumpen) einen großen Prozentsatz gleichzeitig im angeregten (metastabilen) Zustand haben. Diese stellen dann einen „atomaren Energiespeicher“ dar (s. Abschn. 6.1.3.1).

Röntgenspektren

Wie in Abschn. 5.2.5.5 beschrieben, sind Röntgenstrahlen elektromagnetische Wellen mit sehr hohen Frequenzen in der Größenordnung 10^{16} bis 10^{20} Hz. Sie müssen nach Gl. (6.9) also aus Photonen mit sehr hohen Energien in der Größenordnung bis 100 keV bestehen. Ihre Entstehung soll im Folgenden beschrieben werden:

Bild 6.10a zeigt eine Röntgenröhre. Aus der Glühkathode 1 treten Elektronen aus, werden durch den Wehneltzylinder 2 gebündelt und durch eine Spannung U von mehreren tausend bis mehreren zehntausend Volt auf die Anode 3 zu beschleunigt. Diese besteht meistens aus einem schweren Metall, z.B. Wolfram. Die kinetische Energie der Elektronen wird beim Aufprall hauptsächlich in Wärme umgewandelt; daher muss die Anode gekühlt werden. Nur ein kleiner Teil der Energie wird als sehr hochfrequente (kurzwellige) elektromagnetische Welle – sog. Röntgenstrahlung – abgestrahlt (vgl. Abschn. 5.2.5.5). Untersucht man die Abhängigkeit der Intensität von der Wellenlänge (vgl. Abschn. 5.2.6.3), so erhält man ein Spektrum wie in Bild 6.10b. Es ist die Überlagerung eines kontinuierlichen Spektrums und eines Linienspektrums, hier mit den Linien K_{α} , K_{β} usw.

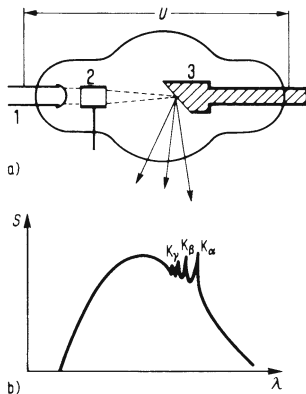


Bild 6.10 Röntgenröhre und Röntgenspektrum

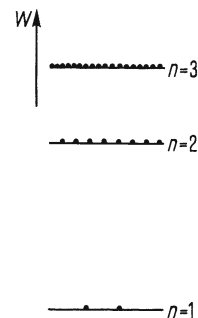


Bild 6.11 Die drei innersten Energieniveaus eines Wolframatoms

Bremsspektrum. Den kontinuierlichen Anteil nennt man das Bremsspektrum, da es durch die Abbremsung der schnellen Elektronen an den Kernen des Anodenmaterials entsteht. Da diese Elektronen nicht an ein Atom gebunden, sondern frei sind, können sie beliebige Energiebeträge ΔW in Form von Wellen mit beliebiger Frequenz f abgeben, jedoch höchstens ihre gesamte kinetische Energie $\Delta W_{\text{kin}} = e_0 U$ (vgl. Abschn. 3.2.6.1). Daher gibt es eine höchste Frequenz $f_{\text{max}} = e_0 U/h$ und entsprechend eine kürzeste Wellenlänge λ_{min} , bei der das kontinuierliche Spektrum abbricht.

Charakteristisches Spektrum heißt der andere Anteil, weil er sich in charakteristischer Weise mit dem verwendeten Anodenmaterial ändert. Im Gegensatz zu den bisher besprochenen Linienspektren im infraroten, sichtbaren und ultravioletten Bereich, die durch die Elektronen auf den äußersten Bahnen verursacht werden, stammt das charakteristische Röntgenspektrum aus den innersten Bahnen. Bild 6.11 zeigt einen Teil des Energieniveauschemas der Anodenatome. Dabei bedeutet wieder $n = 1$ die innerste Bahn, die K-Schale, $n = 2$ die Bahnen der L-Schale usw. Die Aufspaltung nach der Nebenquantenzahl (s-, p-, d-Terme)

ist der Einfachheit halber nicht gezeichnet. Diese innersten Schalen sind alle voll mit $2n^2$ Elektronen besetzt, was durch die Punkte angedeutet sein soll. Trifft nun eines der Elektronen von der Kathode z.B. auf ein Elektron der K-Schale und hat es genügend Energie, um das K-Elektron aus dem Atom herauszuschlagen, dann ist in der K-Schale ein freier Platz. Auf diesen kann ein Elektron aus einer höheren Bahn, z.B. aus der L-Schale „fallen“. Die freiwerdende Energie ΔW wird als elektromagnetische Welle ausgestrahlt. Wegen des Faktors Z^2 in Gl. (6.8) ist ΔW bei den schweren Atomen der Anode so hoch, dass die zugehörigen Frequenzen im Bereich der Röntgenstrahlung liegen. Alle Frequenzen, die durch Übergänge zur K-Schale entstehen, erhalten die Bezeichnung K, und zwar K_{α} , wenn der Übergang von der L-Schale aus erfolgte, K_{β} , wenn er aus der M-Schale erfolgte usw. Entsprechend sind L-Linien solche, bei deren Entstehung ein Elektron in die L-Schale „fiel“ usw.

Die hier geschilderte Ausstrahlung der charakteristischen Röntgenphotonen beim „Fallen“ innerer Elektronen ist häufig nicht der Normalfall. Vielmehr kommt es bei Atomen mit $Z < 32$ statt zur L-Linienemission häufig und statt zur K-Linienemission fast immer zu strahlungslosen Übergängen der inneren Elektronen, wobei ein äußeres Elektron ganz befreit und weggeschleudert wird. Dieser Vorgang heißt Auger-Effekt¹⁾.

Grenzen des Bohr-Sommerfeldschen Modells

Die oben beschriebenen Anwendungen der Bohrschen und Sommerfeldschen Vorstellungen zeigen die Brauchbarkeit dieses Modells. Es hat aber doch eine Reihe von Mängeln, von denen wir die beiden schwerwiegendsten hervorheben wollen:

Erstens bleibt völlig unerklärt, wieso es strahlungslose (stabile) Bahnen gibt.

Zweitens steht das Modell im Widerspruch zur Heisenbergschen Unbestimmtheitsrelation. Diese besagt doch, dass das Produkt aus der Unbestimmtheit (dem Fehler) des Ortes und der des Impulses mindestens gleich h ist (vgl. Abschn. 5.3). Ortsangaben sind hier die Radien r_n der Bohrschen Bahnen, Impulse sind – bei festem m_e – durch die Bahngeschwindigkeiten v_n bestimmt. Beim Wasserstoff im Grundzustand z.B. ergibt Gl. (6.7) die Geschwindigkeit $v_1 = 2,2 \cdot 10^6$ m/s und Gl. (6.6) den Radius $r_1 \approx 5 \cdot 10^{-11}$ m. Nehmen wir willkürlich eine Geschwindigkeitsunbestimmtheit Δv von 1‰ an (das hieße bereits eine Unbestimmtheit der Energie von rund 2‰), so wäre der Radius von $5 \cdot 10^{-11}$ m nur auf $\Delta r = h/\Delta p = h/(m\Delta v) = 3,3 \cdot 10^{-7}$ m bestimmt, also bezogen auf $5 \cdot 10^{-11}$ m völlig unbestimmt!

Es liegt nun nahe, die Welleneigenschaften des Elektrons (vgl. Abschn. 5.3) mit ins Spiel zu bringen. In einem ersten Versuch behandelte de Broglie das um den Wasserstoffkern umlaufende Elektron als eindimensionale Welle mit der Wellenlänge $\lambda = h/(m_e v)$. Eine derartige Welle existiert nur dann dauernd, wenn sie sich nicht bei jedem erneuten Umlauf durch Interferenz selbst auslöscht (vgl. Abschn. 5.2.6.3), sondern, wenn immer wieder Wellenberg auf Wellenberg trifft. Dazu muss der Umfang der Elektronenbahn ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge sein, sodass sich eine stehende Welle ausbildet. Dann verstärken sich die Amplituden, die Intensität der Elektronenwelle hat ein Maximum. Von allen möglichen Bahnen sind also diejenigen ausgezeichnet, für deren Radius r_n gilt:

$$2 r_n \pi = n \lambda \quad (6.11)$$

¹⁾ Pierre Auger (geb. 1926).

Mit der Elektronenmasse m_e , der Geschwindigkeit v_n auf der n -ten Bahn nach Gl. (6.7) und mit Gl. (5.115) $\lambda = h/(m_e v_n)$ erhalten wir hieraus

$$2r_n \pi = \frac{nh}{m_e v_n} \quad \text{oder} \quad 2\pi m_e r_n v_n = nh$$

Das ist genau Gl. (6.4)! Durch Einführung der Elektronenwellen erhalten wir also eine einigermaßen anschauliche Begründung des ersten Bohrschen Postulates und dieselbe Auswahlregel für die Radien der stationären Bahnen. Dieser Anfangserfolg veranlasste Schrödinger¹⁾, die sog. klassische Quantenmechanik Bohrs und Sommerfelds durch seine Wellenmechanik zu ersetzen.

6.1.2.3 Wellenmodell des Atoms – Schrödingergleichung

Die oben zur Beschreibung des Elektrons eingeführte eindimensionale Welle ist nur eine grobe Näherung. Tatsächlich bewegen sich die Elektronen in den drei Dimensionen des Raumes, allerdings in einem begrenzten Raum, da die Elektronen ja an ihren Atomkern gebunden sind.

Analog zu der Differentialgleichung einer elastischen Querwelle in Abschn. 5.2.2.3, $\partial^2 s / \partial x^2 = (1/c^2) \partial^2 s / \partial t^2$, gilt für die Elektronenwelle die entsprechende dreidimensionale Differentialgleichung

$$\Delta \Psi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad (6.12)$$

Darin ist $\Delta \Psi$ die übliche Abkürzung für $\partial^2 \Psi / \partial x^2 + \partial^2 \Psi / \partial y^2 + \partial^2 \Psi / \partial z^2$. Das Zeichen Δ , das hier „auf die Größe Ψ angewendet wird“, heißt Delta- oder Laplaceoperator. Ψ selbst ist die „Schwingungsgröße“ der Elektronenwellen, entsprechend der Auslenkung s , dem Druck p , der elektrischen Feldstärke E oder ähnlichen Größen in Abschn. 5.2. Über die physikalischen Eigenschaften von Ψ lässt sich nur Folgendes sagen (vgl. Abschn. 5.3, Herleitung der Unbestimmtheitsrelation):

Die Intensität der Welle an einer Stelle, die (wie bei allen Wellen) dem Quadrat der Amplitude Ψ^2 proportional ist, ist ein Maß für die Wahrscheinlichkeit, das zugehörige Elektron an dieser Stelle anzutreffen.

Nach Gl. (5.45) gilt für die Phasengeschwindigkeit $c = \lambda f$, und mit Gl. (5.115) ist dann $c = h f / p$. Wir ersetzen darin den Impuls $p = m_e v$ durch die kinetische Energie

$W_{\text{kin}} = (1/2) m_e v^2$, $p = \sqrt{2m_e W_{\text{kin}}}$, und darin die kinetische Energie durch die Differenz aus Gesamtenergie W und potentieller Energie W_{pot} , also $p = \sqrt{2m_e (W - W_{\text{pot}})}$ und folglich $c = h f / \sqrt{2m_e (W - W_{\text{pot}})}$; damit wird aus Gl. (6.12)

$$\Delta \Psi = \frac{2m_e (W - W_{\text{pot}})}{h^2 f^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad (6.13)$$

Im Atom interessieren zunächst nicht die zeitabhängigen Vorgänge, sondern die nur ortsabhängigen, stationären Zustände, d.h. stehende Wellen analog zu den in Abschn. 5.4.2

¹⁾ Erwin Schrödinger (1787 bis 1961, Nobelpreis 1933).

behandelten; dort zeigte sich, dass ihre Gleichung aus zwei Teilen besteht: der ortsabhängigen Amplitude – z.B. $2\hat{s} \cos 2\pi c/\lambda$ in Gl. (5.64) – und der zeitabhängigen Schwingung ($\sin\omega t$ in Gl. (5.64)). Entsprechend zerlegen wir auch die Wellenfunktion Ψ :

$$\Psi(x; y; z; t) = \psi(x; y; z) \sin \omega t \quad (6.14)$$

Zweimaliges Differenzieren nach Zeit und Ort ($\Delta\Psi$) und Einsetzen in Gl. (6.13) liefert schließlich die

Zeitunabhängige Schrödingergleichung

$$\Delta\psi + \frac{2m_e}{\hbar^2}(W - W_{\text{pot}}) \psi = 0 \quad (6.15)$$

6.1.2.4 Einfache Lösungen der Schrödingergleichung

Die Schrödingergleichung (6.15) ist eine homogene partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung. Es würde hier viel zu weit führen, Lösungen dieser Differentialgleichung für reale Atome ganz herzuleiten (s. Abschn. 6.1.2.5). Wir wollen aber zunächst die Bedeutung der Schrödingergleichung klarmachen, indem wir sie hier für zwei stark vereinfachte Modelle lösen.

Elektron im eindimensionalen Potentialtopf mit unendlich hohen Wänden

Die starke Vereinfachung besteht aus drei Schritten:

Erstens nehmen wir an, dass die potentielle Energie nur von x abhängt.

Zweitens soll diese Abhängigkeit sehr einfach sein, nämlich $W_{\text{pot}} = 0$ für $0 < x < l$ und $W_{\text{pot}} = \infty$ für $0 \geq x \geq l$, wie in Bild 6.12 gezeichnet.

Drittens soll sich hier das Elektron nur in x -Richtung bewegen können.

Für das Elektron stellt dieser Potentialverlauf einen „Potentialtopf“ dar, denn da es sicher nur endliche Gesamtenergie W haben kann, ist es im Bereich $0 < x < l$ eingesperrt. Die Schrödingergleichung (6.15) lautet für $0 < x < l$, wo $W_{\text{pot}} = 0$ ist

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m_e}{\hbar^2} W \psi = 0 \quad (6.16)$$

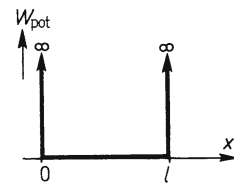


Bild 6.12 Eindimensionaler Potentialtopf

Diese Differentialgleichung ist Gl. (5.3), $\ddot{s} + \omega_0^2 s = 0$, der Differentialgleichung der ungedämpften Schwingung analog, von der wir die Lösung (Gl. (5.4)) kennen. Darin müssen \hat{s} und φ_0 noch durch Randbedingungen gegeben sein. Unsere analoge Lösung von Gl. (6.16) lautet also

$$\psi = \hat{\psi} \sin \left(\frac{\sqrt{2m_e W}}{\hbar} x + \varphi_0 \right) \quad (6.17)$$

Als Randbedingung haben wir noch die Forderung, dass bei $x = 0$ und bei $x = l$ das $\psi^2 = 0$ sein muss, da dort die Aufenthaltswahrscheinlichkeit ja null sein soll. Aus $\psi^2 = 0$ folgt $\psi = 0$. Das ist erfüllt, wenn der Sinus in Gl. (6.17) null ist. Dies hinwiederum ist bei $x = 0$ und $\varphi_0 = 0$ der Fall sowie bei $x = l$ (und $\varphi_0 = 0$), wenn gilt

$$\frac{\sqrt{2m_e W}}{\hbar} l = n\pi \quad (6.18)$$

Darin ist $n = 1; 2; 3; \dots$, nicht jedoch null, denn das hieße, dass $W = 0$ ist, und damit wäre nach Gl. (6.17) auch $\psi = 0$ für alle x , ebenso dann auch $\psi^2 = 0$; somit wäre die Aufenthaltswahrscheinlichkeit überall null, d.h. das Elektron wäre weder im Potentialtopf noch sonst irgendwo, also ein Fall, der uns nicht interessiert.

Setzt man $\sqrt{2m_e W/\hbar}$ aus Gl. (6.18) in Gl. (6.17) ein, so wird mit $\varphi_0 = 0$

$$\psi = \psi_n = \hat{\psi} \sin\left(n \frac{\pi}{l} x\right) \quad \text{mit } n = 1; 2; 3; \dots \quad (6.19)$$

Das heißt: Nur bestimmte, diskrete, aber in x periodische Funktionen sind Lösungen der Schrödingergleichung. Sie heißen Eigenfunktionen.

Bild 6.13a zeigt die ersten vier Eigenfunktionen $\psi_n^2(x)$ zwischen 0 und l . Man vergleiche diese Eigenfunktionen mit den stehenden Wellen auf begrenzten Medien in Abschn. 5.2.4.

In Bild 6.13b sind über den gleichen x -Achsen die Werte von ψ^2 aufgetragen. Dies sind also Angaben über die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons innerhalb des Potentialtopfes, die ganz verschieden ausfallen, je nachdem in welchem „Zustand“ das Elektron ist, d.h. welche Eigenfunktion wirksam ist; das wiederum hängt mit der Energie zusammen: Eine Aussage, welche Gesamtenergie W das Elektron hat, bekommen wir, wenn wir Gl. (6.18) nach W auflösen:

$$W = n^2 \frac{h^2}{8m_e l^2} \quad \text{mit } n = 1; 2; 3; \dots$$

Das heißt: Auch die Energie des Elektrons im Potentialtopf ist gequantelt in bestimmte, diskrete Werte, die Eigenwerte genannt werden und in Bild 6.13c als Energieniveaus gezeichnet sind.

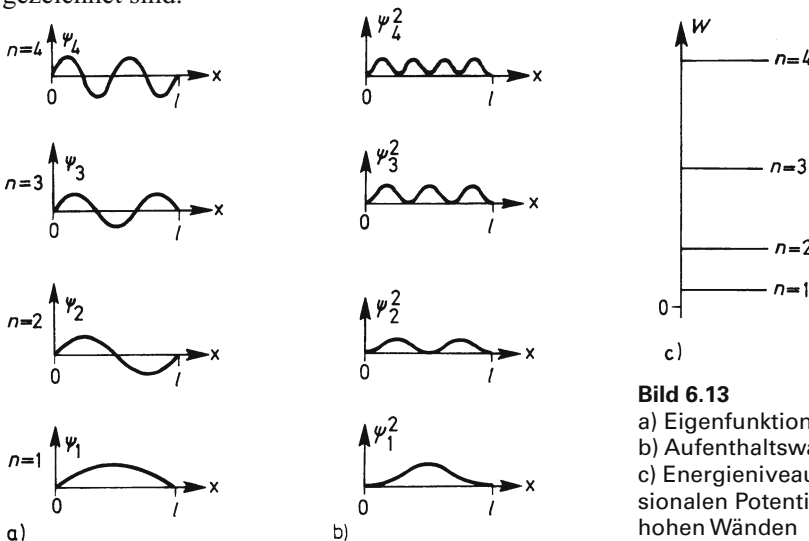


Bild 6.13

- Eigenfunktionen
- Aufenthaltswahrscheinlichkeiten
- Energieniveaus beim eindimensionalen Potentialtopf mit unendlich hohen Wänden

Streng genommen ist hier die Schrödinger-Gleichung noch nicht vollständig gelöst, da wir noch keine Aussage über den Höchstwert $\hat{\psi}$ in Gl. (6.17) und (6.19) haben. Diese ist aus folgender Randbedingung zu gewinnen: Das Elektron im Potentialtopf muss auf jeden Fall irgendwo im Potentialtopf sein, d.h., die Summe aller seiner Aufenthaltswahrscheinlichkeiten muss 1 sein

$$\frac{1}{l} \int_0^l \psi^2 dx = 1$$

Daraus ergibt sich, wie hier nicht vorgerechnet werden soll,

$$\hat{\psi} = \sqrt{2}$$

Fassen wir zusammen: Selbst in diesem nun wirklich äußerst vereinfachten Modell erhalten wir folgende Aussagen:

1. Die Schrödinger-Gleichung erlaubt die Berechnung der Eigenfunktionen, welche die Formen der stehenden Materiewellen liefern und damit die Information über die räumliche Aufenthaltswahrscheinlichkeit.
2. Sie ergibt die zu den einzelnen Wellenformen gehörenden, gequantelten Energieniveaus.
3. Hierbei fällt auf, dass ein Elektron, das in einem beschränkten Raum eingeschlossen ist, nicht die Energie null, sondern nur endliche Energie – die sog. Nullpunktsenergie – haben kann.

Die Existenz der Nullpunktsenergie folgt übrigens auch aus der Heisenbergschen Unbestimmtheitsrelation (vgl. Abschn. 5.3), denn je enger der Bereich Δx ist, in welchem ein Teilchen eingesperrt ist, desto genauer ist sein Ort bekannt; und deshalb muss sein Impuls eine immer größere Unbestimmtheit Δp_x aufweisen, was wegen $W_{\text{kin}} = p^2/2m$ eine entsprechend hohe Energie zur Folge hat. In unserem Fall ist $\Delta x = l$ und da der Impuls zwischen $+\vec{p}$ und $-\vec{p}$ liegen kann, $\Delta p_x = 2p$. Wegen $\Delta x \Delta p_x \geq h$ gilt $l \cdot 2p \geq h$. Daraus folgt für den kleinsten Wert des Impulses $p = h/2l$ und schließlich

$$W = \frac{p^2}{2m_e} = \frac{h^2}{4l^2} \frac{1}{2m_e} = \frac{h^2}{8m_e l^2}$$

in Übereinstimmung mit dem Ergebnis, das wir mit Hilfe der Schrödinger-Gleichung gewonnen haben.

Fermi-Energie W_F . Jedes der Energieniveaus des eindimensionalen Potentialtopfes kann wegen des Pauliprinzip (vgl. Abschn. 6.1.2.2) von je zwei Elektronen mit entgegengesetzten Spins besetzt werden. Stehen daher gerade N Elektronen zur Verfügung, so gilt wegen $N = 2n$:

Die höchste besetzte Energie ist

$$W_F = \left(\frac{N}{2}\right)^2 \frac{h^2}{8m_e l^2} = \frac{h^2}{32m_e} \left(\frac{N}{l}\right)^2$$

Diese heißt „Fermi-Energie“ (s. auch Abschn. 7.3). N/l ist hierbei die Zahl der Elektronen pro Länge.

Beispiel 1. In einem Potentialtopf der Länge 10^{-6} m befinden sich 10^3 Elektronen, entsprechend $10^9/\text{m}$. Dann ergibt sich, wie man leicht nachrechnet, $W_F = 9,32 \cdot 10^{-2}$ eV.

Ohne Herleitung seien noch die Formeln für die Fermi-Energie im zweidimensionalen und im dreidimensionalen Fall angegeben. Es gilt:

Die Fermi-Energie in einer mit Elektronen besetzten Fläche beträgt

$$W_F = \frac{h^2}{4\pi m_e} \left(\frac{N}{A} \right)$$

wobei N/A die Zahl der Elektronen pro Fläche ist.

In einem dreidimensionalen Körper ist

$$W_F = \left(\frac{3}{\pi} \right)^{2/3} \frac{h^2}{8m_e} \left(\frac{N}{V} \right)^{2/3}$$

wobei (N/V) die Zahl der Elektronen pro Volumen ist.

Eindimensionaler Potentialtopf mit endlich hohen Wänden – Tunneleffekt

Bild 6.14 zeigt den Verlauf der potentiellen Energie W_{pot} über der einzigen Ortskoordinate x . Hier sind jetzt die Randbedingungen: $W_{\text{pot}} = 0$ für $0 < x < l$ und $W_{\text{pot}} = W_0$ für $0 \geq x \geq l$. Außerdem soll das Elektron eine Gesamtenergie $W < W_0$ haben, z.B. die eingezeichnete. Wegen dieser letzten Bedingung könnte das Elektron nach der klassischen Physik auch diesen Potentialtopf nicht verlassen. Anders, wenn wir die Schrödingergleichung anwenden.

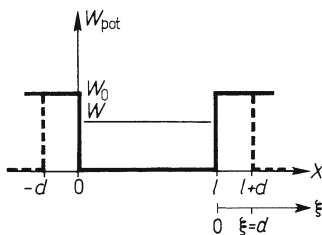


Bild 6.14 Eindimensionaler Potentialtopf mit endlich hohen und (gestrichelt) endlich dicken „Wänden“

Dabei soll jetzt nicht untersucht werden, wie sich das Elektron im Innern des Potentialtopfes verhält; für dieses Gebiet ist kein prinzipiell anderes Ergebnis als im vorigen Abschnitt zu erwarten, auch wenn die Randbedingung $\psi = 0$ für $x = 0$ und $x = l$ nicht mehr gelten soll. Diese Randbedingung wird aufgegeben, weil gerade das Verhalten bei $0 > x > l$, also sozusagen im Potentialwall, untersucht werden soll. Wir beschränken uns der Einfachheit halber auf die Untersuchung des Verhaltens am rechten Rand und benutzen hierfür eine neue Ortskoordinate $\xi = x - l$ (Bild 6.14).

Mit $W_{\text{pot}} = W_0$ und weil $(W - W_0) < 0$ ist, schreiben wir die Schrödingergleichung:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - \frac{2m_e}{\hbar^2} (W_0 - W) \psi = 0$$

oder abgekürzt mit dem positiven Faktor $K = 2m_e/\hbar^2 (W_0 - W)$:

$$\partial^2 \psi / \partial \xi^2 = K \psi$$

Differentialgleichungen dieser Form haben Lösungen der Art

$$\psi = \psi_{0A} e^{\sqrt{K}\xi} + \psi_{0B} e^{-\sqrt{K}\xi}$$

wie man durch zweimaliges Differenzieren und Einsetzen nachweisen kann. In unserem Fall muss $\psi_{0A} = 0$ sein und damit der ganze erste Summand in der Gleichung, nämlich der mit positivem Exponenten, andernfalls würde für $\xi \rightarrow +\infty$ auch $\psi \rightarrow +\infty$ gehen. Das aber widerspräche der Auffassung, dass ψ^2 ein Maß für die Aufenthaltswahrscheinlichkeit ist. Also kann die Lösung für $\xi > 0$ nur die Form

$$\psi = \psi_{0B} e^{-\frac{\sqrt{2m_e(W_0-W)}}{\hbar}\xi} \quad (6.21)$$

haben.

Darin muss noch das ψ_{0B} bestimmt werden, z.B. aus der Bedingung, dass an der Grenze des Potentialtopfes ψ_{innen} stetig und differenzierbar in $\psi_{\text{außen}}$ übergehen soll. Das soll hier jedoch nicht weiter verfolgt werden.

Gleichung (6.21) besagt also, dass die ψ -Funktion (zur Erinnerung: der „Amplitudenfaktor“ der Wellenfunktion) außerhalb des Potentialtopfes keineswegs null ist, sondern exponentiell abnimmt. Das Gleiche gilt praktisch für die Aufenthaltswahrscheinlichkeit, die proportional zu

$$\psi^2 = \psi_{0B}^2 e^{-\frac{\sqrt{8m_e(W_0-W)}}{\hbar}\xi}$$

abnimmt. Interessant wird dieses Ergebnis, wenn die Gebiete mit erhöhter potentieller Energie nur eine endliche Dicke d haben (gestrichelt in Bild 6.14), der Potentialtopf sozusagen „dünne Wände“ hat. Dann ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons außen an der Potentialwand, sozusagen „im Freien“, wo es ja nicht mehr gebunden ist, proportional zu

$$\psi^2(d) = \psi_{0B}^2 e^{-\frac{1}{\hbar}\sqrt{8m_e(W_0-W)}d}$$

also keineswegs null!

Das nach klassischer Physik durch $W < W_0$ eingeschlossene Elektron kann also nach der Wellenmechanik mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit den endlich tiefen Potentialtopf mit endlich dicken Wänden verlassen, man sagt dazu: den Potentialwall durchtunneln.

Um eine Aussage über die Wahrscheinlichkeit D dieses Durchtunnelns zu erhalten, machen wir die sicher grob vereinfachende Annahme, im Innern sei die Aufenthaltswahrscheinlichkeit konstant und einfach proportional ψ_{0B}^2 . Dann wäre die gesuchte Tunnelwahrscheinlichkeit D der Quotient aus den Aufenthaltswahrscheinlichkeiten außen ($\sim \psi^2(d)$) und innen ($\sim \psi_{0B}^2$), also

$$D = \frac{\psi^2(d)}{\psi_{0B}^2} = e^{-\frac{1}{\hbar}\sqrt{8m_e(W_0-W)}d}$$

oder mit den Werten von \hbar und m_e sowie den Einheiten eV und m

$$D = \exp\left(-1,03 \cdot 10^{10} \sqrt{\frac{W_0 - W}{\text{eV}}} \frac{d}{\text{m}}\right)$$

Wegen des Faktors 10^{10} im Exponenten kann das Tunneln nur bei atomaren Abmessungen von d eine Rolle spielen; schon eine Vergrößerung des d von 10^{-10} m auf 10^{-9} m erniedrigt z.B. bei $W_0 - W = 2$ eV die Tunnelwahrscheinlichkeit um den Faktor $2 \cdot 10^{-6}$.

Widersprüche zwischen klassischer Physik und Wellenmechanik

Man muss sich fragen, wieso die obigen Quanteneffekte nicht längst in der Elektronik, z.B. an Elektronen zwischen den Elektroden einer Vakuumröhre bemerkt worden sind. Dazu die folgenden Zahlenbeispiele:

Beispiel 2. Ein Elektron habe die Energie 37,6 eV und befinde sich zwischen zwei reflektierenden Wänden im Abstand $l = 10^{-2}$ m. Nach Gl. (6.20) gehört dazu die „Quantenzahl“ $n = 10^8$. Das heißt: Die Eigenfunktion ist eine stehende Welle mit 10^8 Bäuchen und Knoten auf der Strecke von 1 cm. Jede makroskopische Messung würde also trotz Wellenmechanik das klassische Ergebnis liefern, dass das Elektron überall gleich wahrscheinlich ist.

Beispiel 3. Damit das Elektron zwischen den reflektierenden Wänden von Beispiel 2 im Quantenzustand $n = 1$ (1 Bauch, 2 Knoten) wäre, müsste es nach Gl. (6.20) die Energie $3,76 \cdot 10^{-15}$ eV haben, was natürlich wieder weit unter der Grenze des Messbaren liegt.

Die beiden Beispiele zeigen also:

Bei makroskopischen Abmessungen gilt die klassische Physik als Grenzfall der Quantenphysik.

Beispiel 4. Verkleinern wir nun die Abmessungen des Potentialtopfs auf atomare Größenordnung, z.B. $l = 10^{-10}$ m, dann ist das Elektron mit 37,6 eV nach Gl. (6.20) gerade im Grundzustand $n = 1$.

Erst bei atomaren Abmessungen löst die Quantenmechanik die klassische Physik ab.

Reale zwei-, ein- und nulldimensionale Potentialtöpfe. Die Carbocyanine sind Farbstoffe, deren Moleküle aus CH-Ketten bestehen, die über N^- - und N^+ -Brücken an beiden Enden mit C_2H_5 abschließen. Entlang der CH-Kette können sich einige der Elektronen des Moleküls frei bewegen wie im eindimensionalen Potentialtopf. Die Längen der CH-Ketten der verschiedenen Farbstoffmoleküle sind genau bekannt. Mit Gl. (6.20) lassen sich die Energieniveaus dieser Potentialtöpfe und damit die Frequenzen ihrer Resonanzabsorptionen ausrechnen. Diese stimmen bis auf wenige Prozent mit den gemessenen Werten überein.

In vielen Laboratorien experimentiert man zur Zeit mit sog. „Quantenmulden“, das sind nur wenige Nanometer, d.h. nur wenige Atomlagen dicke Halbleiterschichten, in denen Elektronen sich nur in zwei Dimensionen bewegen können und sich daher anders, nämlich quantenhaft verhalten; dies eröffnet neue Möglichkeiten in der Halbleiterelektronik und in der Optoelektronik¹⁾. Man versucht auch, solche dünnen Schichten entsprechend schmal zu machen, sodass Elektronen darin in einem eindimensionalen Potentialtopf (hier „Quantendraht“ genannt) eingeschlossen sind. Damit sollten sich extrem kleine, schnelle und verlustarme elektronische Schaltelemente und Laser herstellen lassen. Es wird auch versucht, solche Quantendrähte nur wenige Nanometer kurz zu machen oder zu unterteilen zu sog. „Quantenpunkten“ oder quasinulldimensionalen Potentialtöpfen; das ergibt noch interessantere elektronische, optische und optoelektronische Bauelemente. Elektronen in einem Quantenpunkt verhalten sich wie die Elektronen in einem natürlichen Atom. Aus vielen solcher künstlicher Atome kann man z.B. einen Laser²⁾ bilden, dessen Eigenschaften durch die Wahl der Dimensionen der Quantenpunkte mehr oder weniger frei wählbar sind (im Gegensatz zu den Eigenschaften natürlicher Atome).

¹⁾ Siehe hierzu auch Abschn. 7.4.6 Quanten-Halleffekt.

²⁾ Siehe hierzu auch Abschn. 6.1.3.1.

6.1.2.5 Elektronen im Coulombfeld

Beim Wasserstoffatom und bei den $(Z - 1)$ -fach geladenen Ionen befindet sich ein Elektron im zentralsymmetrischen Coulombfeld des Atomkerns. Dieses bildet einen Potentialtopf mit endlich hohen, aber unendlich dicken Potentialwällen. Er ist zwar geometrisch noch recht einfach, aber wegen der drei Dimensionen und der nicht mehr senkrechten Wände viel komplizierter als unsere obigen Potentialtöpfe. Es würde hier zu weit führen, die Lösung der Schrödingergleichung ausführlich zu besprechen. Es soll nur ungefähr der Weg angedeutet und die Ergebnisse gezeigt werden. Wichtig ist aber wieder Folgendes: Wie bei den oben behandelten eindimensionalen Potentialtopfmodellen liefert die dreidimensionale Schrödingergleichung auch hier:

1. die Eigenfunktionen und damit die Formen stehender Elektronenwellen, nur dass diese jetzt natürlich dreidimensional sind und deshalb ein komplizierteres Aussehen haben als im eindimensionalen Fall (s. unten);
2. die zu den einzelnen Eigenfunktionen gehörenden Energieniveaus und damit das Energieniveauschema des Wasserstoffs.

Das zu erwartende Aussehen der stehenden Materiewellen wollen wir uns zunächst am Beispiel stehender mechanischer Wellen plausibel machen: Auf einer Saite unterscheiden sich die verschiedenen stehenden Wellen einfach durch die Zahl der Bäuche zwischen den Knotenpunkten; sie bilden eine sog. einfache Mannigfaltigkeit (vgl. Abschn. 5.2.4 und 6.1.3.2). Auf zweidimensionalen Platten oder Membranen gibt es schon viel mehr Möglichkeiten für stehende Wellen, wie die Chladnischen Klangfiguren in Abschn. 5.2.4 deutlich machen; die Angabe der Zahl der Bäuche zwischen den Knotenlinien und -punkten reicht nicht mehr zur Beschreibung, vielmehr muss noch – da alle Figuren symmetrisch sind – angegeben werden, ob Punktsymmetrie oder wievielfache Achssymmetrie herrscht. So kommt man zu einer zweifachen Mannigfaltigkeit. Entsprechend muss man zum Ordnen der stehenden Wellen in dreidimensionalen begrenzten Räumen, wo Knotenflächen, -linien und -punkte auftreten, drei Angaben machen und spricht daher von einer dreifachen Mannigfaltigkeit.

Mathematisch beschreibt man diesen Sachverhalt folgendermaßen:

Schrödingergleichung und Eigenfunktionen

Wegen der Zentralsymmetrie des elektrischen Feldes des Atomkerns ist die potentielle Energie kugelsymmetrisch. Es ist daher sinnvoll, die Schrödingergleichung von x -, y -, z -Koordinaten auf Kugelkoordinaten r ; ϑ ; φ umzuschreiben, wobei r der Radius, ϑ der Winkel gegen eine vorgegebene Richtung, z.B. die z -Achse, und φ der Winkel in einer dazu senkrechten Ebene ist.

Wie oben gezeigt wurde, ist anschaulich verständlich, dass die hier in Frage kommenden Lösungen der Schrödingergleichung, die Eigenfunktionen $\psi(r; \vartheta; \varphi)$ eine dreifache Mannigfaltigkeit bilden. Die Theorie bestätigt dies und liefert zusätzlich die Aussage, dass die Lösungen jeweils aus zwei Faktoren bestehen: Einer, ${}_r\psi$, hängt nur von der Koordinate r ab, der andere, ${}_{\vartheta\varphi}\psi$, nur von den Koordinaten ϑ und φ . Die Eigenfunktionen lassen sich daher folgendermaßen schreiben:

$$\psi_{n|l|m}(r; \vartheta; \varphi) = {}_r\psi_{n|l}(r) \cdot {}_{\vartheta\varphi}\psi_{l|m}(\vartheta; \varphi) \quad (6.23)$$

Darin sind n , l und m ganze Zahlen mit folgenden Eigenschaften und Funktionen:

Erstens sind sie voneinander abhängig, und zwar gilt

$$0 \leq l \leq n-1 \quad \text{und} \quad |m| \leq l$$

Zweitens nummerieren sie als Indizes die verschiedenen Eigenfunktionen (der besagten dreifachen Mannigfaltigkeit, s. unten) und drittens gehen sie in die Eigenfunktionen und Eigenwerte parameterartig ein.

Radiusabhängiger Teil der Eigenfunktion. Die potentielle Energie W_{pot} eines Elektrons im Coulombfeld eines punktförmig angenommenen Z -fach geladenen Kerns ist nach Abschn. 3.1.2: $W_{\text{pot}} = -Ze_0^2/(4\pi\epsilon_0 r)$. Wenn die Schrödingergleichung (6.15) mit diesem W_{pot} gelöst wird, ergeben sich für $r\psi_{n,l}(r)$ recht komplizierte Funktionen der Form

$$(a_0 - a_1 r + a_2 r^2 - + \dots a_n r^n) e^{-br}$$

worin die Faktoren a_0 bis a_n und b ihrerseits von n und l abhängen. Einige dieser Funktionen sind hier in Bild 6.15a grafisch dargestellt.

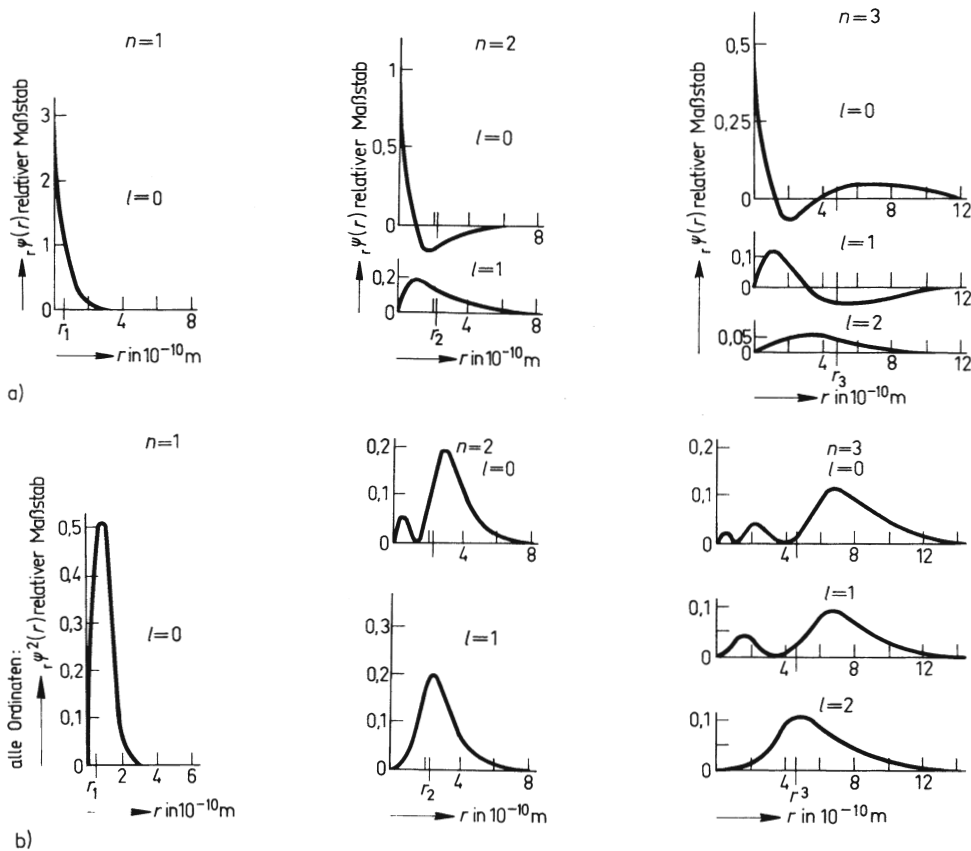


Bild 6.15 a) Die radiusabhängigen Teile der Eigenfunktionen des Wasserstoffs für $n = 1$ bis 3. Die Ordinaten sind aus Platzgründen für die verschiedenen n mit verschiedenen Maßstäben gezeichnet; vergleichbar sind nur die angeschriebenen Zahlen.

b) Aufenthaltswahrscheinlichkeiten beim Wasserstoff, soweit diese von r abhängen. r_1 bis r_3 auf den Abszissen: Radien nach dem Bohrschen Modell

In Bild 6.15b sind außerdem die quadrierten Kurven hierzu gezeichnet; da ψ^2 ja ein Maß für die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons ist, zeigen sie, wie diese vom Radius r abhängt. Die tatsächliche Aufenthaltswahrscheinlichkeit hängt aber von der kompletten Eigenfunktion ab. Diese ergibt sich darum erst, wenn man den nur vom Radius abhängigen Faktor mit dem winkelabhängigen Faktor multipliziert, der im übernächsten Abschnitt behandelt wird. Vorher soll noch die

Energiequantelung untersucht werden: Der radiusabhängige Teil $r\psi$ in Gl. (6.23) enthält die Energie W des Elektrons, ähnlich wie Gl. (6.17) beim eindimensionalen Potentialtopf (Abschn. 6.1.2.4). Und analog wie dort ergeben die Randbedingungen, dass W nur bestimmte, diskrete Werte annehmen kann, nämlich

Die Eigenwerte W_n der Energie

$$W_n = \frac{e_0^4 m_e Z^2}{8\epsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2} \quad \text{mit } n = 1; 2; 3; \dots$$

Das sind die gleichen Energien wie im Bohrschen Modell, wenn man dort den Nullpunkt der Energieskala an die Ionisationsgrenze legt.

Daher heißt die natürliche Zahl n weiterhin Hauptquantenzahl.

Winkelabhängiger Teil der Eigenfunktion. Auch für die $\psi_{l/m}(\vartheta; \varphi)$ in Gl. (6.23) ergeben sich aus der Schrödingergleichung kompliziertere Funktionen, sog. Kugelfunktionen. Die Quadrate davon bedeuten wieder Aufenthaltswahrscheinlichkeiten des Elektrons, soweit diese von den Winkelkoordinaten ϑ und φ abhängen.

Um die Verteilung im Raum grafisch darzustellen, kann man „Flächen gleicher Aufenthaltswahrscheinlichkeiten“ bilden – vergleichbar z.B. mit Äquipotentialflächen im Gravitationsfeld o.Ä. – und dann Schnitte durch solche Flächen eben aufzeichnen. Die geschlossenen Kurven in Bild 6.16 sind solche Schnitte, und zwar so gewählt, dass im Innern die Aufenthaltswahrscheinlichkeit insgesamt 95% ist und außen asymptotisch von 5% gegen null geht.

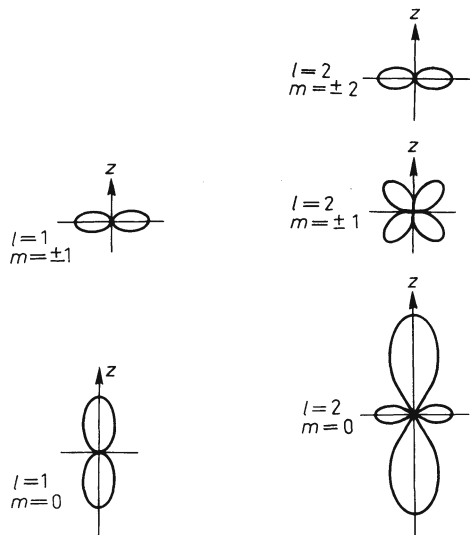


Bild 6.16 Aufenthaltswahrscheinlichkeiten des Elektrons beim Wasserstoff, soweit sie winkelabhängig sind

Drehimpuls- und Richtungsquantelung. Dass das Elektron in der Atomhülle einen Bahndrehimpuls hat, ist im Bohrschen Atommodell anschaulich klar und wird durch eine Reihe von Experimenten bestätigt. Im wellenmechanischen Bild dagegen bleibt dieser Drehimpuls unanschaulich.

Der mathematische Vorgang, wie durch die Schrödingergleichung die Eigenwerte der Energie entstehen, wird plausibel, wenn man, wie wir hier, die Rechnung nur andeutet. Leider ist dies für den Drehimpuls nicht so; um zu verstehen, dass auch er nur bestimmte, diskrete Werte annehmen kann, muss man erheblich mehr Mathematik treiben, als hier möglich ist. Wir müssen uns darauf beschränken, die zwei Ergebnisse dieser Mathematik zu übernehmen:

Erstens: Der Drehimpuls des Elektrons in der Atomhülle kann nur die diskreten Eigenwerte

$$L = \sqrt{l(l+1)} \hbar \quad \text{mit } l = 0; 1; \dots n-1$$

haben.

Die ganze Zahl l heißt Drehimpuls- oder Nebenquantenzahl. Es bedeutet $l = 0$ also einerseits, dass der Drehimpuls $L = 0$ ist, andererseits, dass der winkelabhängige Teil der Eigenfunktion $\psi_{0|0|0}$ eine reine Zahl ist, die ganze Eigenfunktion $\psi_{n|0|0}$ also nur von r abhängt, d.h. kugelsymmetrisch ist. Höhere Werte von l (bei $n > 1$) bedeuten dann, dass die Eigenfunktionen niedrigere Symmetrien haben, z.B. axialsymmetrisch und spiegelsymmetrisch sind. Analog zum Bohr-Sommerfeld-Modell spricht man wieder von s-, p-, d-, f- usw. Zuständen, wenn $l = 0; 1; 2; 3; \dots$ usw. ist.

Das zweite Ergebnis lautet:

Die Komponente des Drehimpulses L in z -Richtung (gegen die der Winkel definiert ist) kann ebenfalls nur bestimmte, diskrete Werte haben, nämlich

$$L_z = m\hbar \quad \text{mit } m = 0; \pm 1; \pm 2; \dots \pm l \quad (6.24)$$

Darin heißt m wieder Richtungsquantenzahl, weil Gl. (6.24) bedeutet, dass der Drehimpuls, und damit die (nicht kugelsymmetrische) Eigenfunktion nur bestimmte Richtungen bezüglich der z -Achse haben kann. Physikalisch kann die z -Achse z.B. durch ein äußeres Feld für viele Atome oder in jedem einzelnen Atom durch das magnetische Moment des Kerns vorgegeben sein.

Aufenthaltswahrscheinlichkeiten. Die radiusabhängige Aufenthaltswahrscheinlichkeit $\psi_{n|l|l}^2(r)$ nach (Bild 6.15b) und die winkelabhängige $\psi_{n|l|l}^2(\vartheta; \varphi)$ nach (Bild 6.16) ergeben die ganze Aufenthaltswahrscheinlichkeit $\psi_{n|l|l}^2(r; \vartheta; \varphi)$ nach Gl. (6.23).

Einige ebene Bilder solcher räumlicher „Wolken“ sind in Bild 6.17 wiedergegeben, wobei zunehmende Schwärzung abnehmende Aufenthaltswahrscheinlichkeit bedeuten soll. Die Figuren sind jeweils zur eingezeichneten Achse rotationssymmetrisch.

Elektronenspin. Wie bereits in Abschn. 6.1.2.2 beschrieben, hat jedes Elektron einen Eigendrehimpuls $L_e = (1/2) \hbar$, der Spin genannt wird. Dieser wird von der Schrödingergleichung nicht erfasst. Dazu ist eine nach Dirac¹⁾ benannte Erweiterung nötig.

¹⁾ Paul Adrien Maurice Dirac (1902 bis 1984, Nobelpreis 1933).

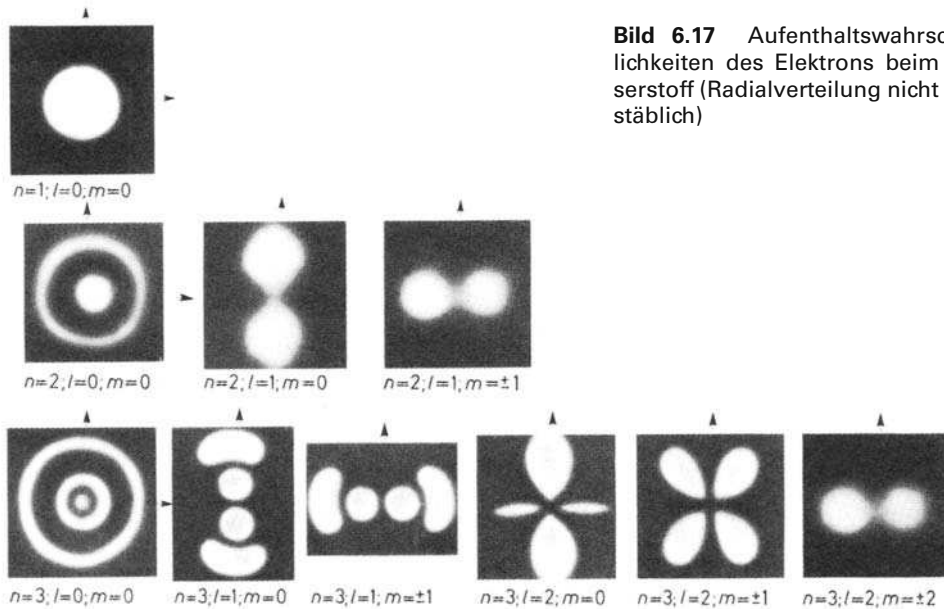


Bild 6.17 Aufenthaltswahrscheinlichkeiten des Elektrons beim Wasserstoff (Radialverteilung nicht maßstäblich)

Der mathematische Aufwand zum Lösen der Diracgleichung ist noch größer als der für die Schrödingergleichung, sodass wir hier nicht darauf eingehen können¹⁾. Wir wollen nur die Eigenschaften des Spins, wie sie im Bohr-Sommerfeldschen Modell verwendet wurden, hier wiederholen:

Zu einer vorgegebenen Richtung stellt sich der Spin parallel oder antiparallel ein; die Orientierungsquantenzahl m_s nimmt die Werte

$$m_s = -\frac{1}{2} \quad \text{und} \quad m_s = +\frac{1}{2} \quad \text{an.}$$

6.1.2.6 Atome mit mehreren Elektronen

Bei Atomen mit mehr als einem Elektron ist die potentielle Energie eines Elektrons nicht nur durch den Atomkern, sondern auch durch die anderen Elektronen gegeben und damit nicht mehr kugelsymmetrisch. Dann ist die Schrödingergleichung nicht mehr geschlossen lösbar. Nur sehr aufwendige Näherungsverfahren, mit Großrechnern durchgeführt, können Näherungslösungen erzeugen. Allerdings wird darauf meist verzichtet, denn über die Einzelheiten der Energieniveaus in der Atomhülle weiß man ja aus spektroskopischen Messungen genauestens Bescheid. Das Unbefriedigende am Bohr-Sommerfeldschen Modell ist ja nur, dass es bei der Erklärung der experimentellen Daten in Widersprüche gerät zu grundsätzlichen physikalischen Gesetzen, insbesondere zur Heisenbergschen Unbestimmtheitsrelation. Diese Widersprüche treten bei der wellenmechanischen Betrachtung nicht mehr auf. Also ist das Wellenmodell vom physikalischen Standpunkt aus befriedigender, auch wenn es weniger anschaulich ist.

¹⁾ Es zeigt sich, dass der Spin S nicht einfach ein Vektor, sondern eine kompliziertere quantenphysikalische Größe mit der Dimension Drehimpuls ist. Ist die z -Richtung durch ein Magnetfeld vorgegeben, so ist die z -Komponente des Spins $S_z = \pm(1/2) \hbar$, die anderen Komponenten sind unbestimmt, aber es ist $S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = 1/2 (1/2 + 1) \hbar$.

6.1.3 Wichtige Anwendungen der Atomphysik

6.1.3.1 Laser

Dieser Name ist ein Kunstwort, das aus den Anfangsbuchstaben von **light amplification by stimulated emission of radiation** (Licht-Verstärkung durch stimulierte Emission von Strahlung) besteht. Laser sind Lichtquellen mit bemerkenswerten Eigenschaften:

1. Sie erzeugen sehr schmalbandiges Licht mit extrem hohen Kohärenzlängen (vgl. Abschn. 5.2.6.3). Beispielsweise lassen sich relative Linienbreiten bis hinab zu $\Delta f/f \approx 10^{-13}$ und, damit verbunden, kohärente Wellenzüge bis zu $3 \cdot 10^6$ m Länge erreichen. Dies macht sie besonders geeignet für die in Abschn. 5.2.6.3 beschriebenen Interferenzversuche.
2. Man kann mit ihnen sehr hohe Strahlungsleistungen erzeugen, im Pulsbetrieb bis zu $3 \cdot 10^{14}$ Watt (zum Vergleich: ein normales Kraftwerk erzeugt – allerdings im Dauerbetrieb – ca. 10^9 Watt).
3. Laserlicht lässt sich sehr stark bündeln. Dies ist z.B. bei der Abtastung von Compact-Disks nützlich. Verbunden mit den unter 2. genannten hohen Leistungen lassen sich Intensitäten erreichen, die eine besonders elegante Art der Materialbearbeitung und im Spezialfall sogar Verschmelzung (Fusion) von Atomkernen ermöglichen.
4. Durch geeignete Vorrichtungen lassen sich ultrakurze Lichtimpulse bis hinab zu 10^{-15} s Dauer bei gleichzeitig hoher Intensität erzeugen.

Wechselwirkung von Photonen mit Materie

Zum Verständnis der Wirkungsweise eines Lasers betrachten wir die Absorption und Emission von Photonen durch eine sehr große Zahl von Atomen, Molekülen oder Ionen, kurz: Molekeln, in einem Gas, einer Flüssigkeit oder einem Festkörper, der sog. Lasermaterie. Jede der gleichartigen Molekeln möge ein niedriges Energieniveau W_1 und ein höheres W_2 haben, die im Folgenden kurz Laserniveaus genannt werden¹⁾. Die Anzahl der Molekeln pro Volumen im Zustand W_1 sei n_1 , die im Zustand W_2 sei n_2 . Die n_1 und n_2 werden auch Besetzungsdichten genannt. Im thermischen Gleichgewicht, d.h. ohne äußere Energiezu- oder -abfuhr wird das Verhältnis der Besetzungsdichten bei der Temperatur T durch den in Abschn. 2.4.5.4 behandelten Boltzmannfaktor bestimmt. Es gilt

$$\frac{n_1}{n_2} = e^{-\frac{W_2 - W_1}{kT}}$$

Die Molekeln können auf dreifache Weise mit Photonen wechselwirken:

1. Erzeugung von Photonen durch spontane Emission: Wie in Abschn. 6.1.1.1 beschrieben, emittieren Molekeln, die im Zustand mit der höheren Energie W_2 sind, ohne äußere Beeinflussung – man sagt: spontan – Photonen mit der Energie $hf_{21} = W_2 - W_1$. Dieser Vorgang erfolgt statistisch. Dabei ist die Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeit, die wir gleich der relativen Änderung der Besetzungsdichte pro Zeit setzen, konstant.

Für die spontane Emission gilt:

$$\frac{dn_2/n_2}{dt} = -\frac{1}{\tau_{21}} = \text{const.}$$

¹⁾ Beide Niveaus sollen der Einfachheit halber keine Unterniveaus haben.

Daraus folgt, dass die Besetzungsdichte exponentiell mit der Zeit abnimmt. Wie man leicht nachrechnet, gilt $n_2(t) = n_2(0) e^{-t/\tau_{21}}$. Die Zeitkonstante τ_{21} , die man in diesem Zusammenhang auch Lebensdauer nennt, hängt vom jeweiligen Zustand ab. Sie beträgt meist etwa 10^{-8} s; d.h.: pro Nanosekunde nimmt die Besetzungsdichte etwa um 10 % ab. Sie kann bei metastabilen Zuständen (s.o.) jedoch auch mehr als 10^5 mal länger sein. Wegen der Heisenbergschen Unbestimmtheitsrelation haben die Photonen deshalb auch nicht alle exakt die Frequenz f_{21} , sondern liegen im Bereich einer Bandbreite Δf . Wegen der Unbestimmtheit $\Delta W \Delta t \geq h$ gilt auch $h \Delta f \Delta t \geq 1$ und damit $\Delta f \geq 1/\tau_{21}$. Metastabile Niveaus ergeben also eine sehr schmalbandige Strahlung. Die erzeugten Photonen werden unabhängig voneinander regellos nach allen Richtungen, d.h. anisotrop, emittiert.

2. Stimulierte oder induzierte Absorption von Photonen: Diese erfolgt immer dann, wenn eine elektromagnetische Welle mit der passenden Frequenz $f_{21} = (W_2 - W_1)/h$, – im Teilchenbild: ein Strom von Photonen, mit $W_p = h f_{21}$ – durch die Materie hindurchgeht. – Man denke z.B. an den in Abschn. 6.1.1.3 beschriebenen Versuch, bei dem das Licht einer Na-Lampe durch Na-Dampf geht. – Es leuchtet ein, dass die Absorptionsrate hierbei von der Dichte der Atome im Zustand W_1 , also n_1 , und der Photonendichte n_p abhängt.

Für die stimulierte Absorption gilt:

$$\frac{dn_1/n_1}{dt} = -B_{12} n_p = \frac{1}{\tau_{12}}$$

Die Photonendichte nimmt gemäß

$$\left. \frac{dn_p}{dt} \right|_A = -B_{12} n_p n_1 \quad \text{ab.}$$

Hierbei ist B_{12} ein Koeffizient mit der Bedeutung Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeit und Photonendichte, dessen Betrag weiter unten angegeben wird. Interessant ist, dass τ_{12} proportional $1/n_p$ ist.

3. Stimulierte oder induzierte Emission von Photonen: Dieser Effekt ist entscheidend für die Möglichkeit, Licht zu verstärken, was ja bereits im Namen Laser angedeutet ist. Geht nämlich ein kohärenter Wellenzug mit der Frequenz $f_{21} = (W_2 - W_1)/h$ durch die Lasermaterie, so bewirkt jedes Photon, das auf eine im Zustand W_2 befindliche Molekel trifft, dass ein Übergang in den Zustand W_1 erfolgt. Das dabei zusätzlich erzeugte Photon hat natürlich die gleiche Frequenz. Entscheidend ist, dass es sich auch mit der gleichen Phasenlage in die Welle einkoppelt und diese dadurch verstärkt. Dies liegt daran, dass, wie in Abschn. 6.1.2.2 beschrieben, Photonen Bosonen sind. Deshalb ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass jedes stimulierte Photon in den gleichen, durch den Impuls $p_p = h f_{21}/c$, den Phasenwinkel und die Polarisation gegebenen Zustand geht, proportional der Zahl der bereits in diesem Zustand befindlichen Photonen, und Letztere ist bereits bei kleinen Energiedichten riesengroß. Natürlich nimmt hierbei die Besetzungsdichte n_2 ab.

Für die stimulierte Emission gilt:

$$\frac{dn_2/n_2}{dt} = -B_{21} n_p;$$

Die Photonendichte nimmt gemäß

$$\left. \frac{dn_p}{dt} \right|_s = B_{21} n_p n_2 \quad \text{zu.}$$

Die erzeugten Photonen koppeln frequenz- und phasenrichtig in die stimulierende Welle ein und verstärken diese.

Wie Einstein als Erster zeigte, hat B_{21} nicht nur die gleiche Bedeutung wie B_{12} , sondern ist diesem sogar gleich. Es gilt

$$B_{12} = B_{21} = B = \frac{c^3}{\tau_{21} 8\pi f_{21}^2 \Delta f_B}$$

Δf_B ist hierbei die Frequenz-Bandbreite der jeweiligen Anordnung, z.B. eines Lasers. B und $1/\tau_{21}$ nennt man auch „Einstein-Koeffizienten“.

Lichtverstärkung durch stimulierte Emission

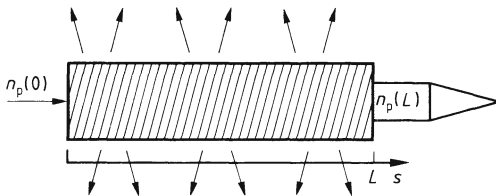


Bild 6.18 Zur Abhängigkeit der Photonendichte n_p vom Weg s . Die seitlichen Pfeile sollen darauf aufmerksam machen, dass auch spontan Photonen emittiert werden, die bei der Lichtverstärkung keine Rolle spielen.

Eine Lichtwelle möge gemäß Bild 6.18 von links nach rechts durch die Lasermaterie hindurchgehen. Dann sorgt die stimulierte Emission für Verstärkung, die stimulierte Absorption für Abschwächung der Welle. Zwar erzeugt auch die spontane Emission Photonen. Diese kommen der Lichtwelle jedoch nicht zugute, weil sie regellos und nicht phasengekoppelt in alle Richtungen gehen.

Also gilt für die

Änderung der Photonendichte pro Zeit

$$\frac{dn_p}{dt} = \left. \frac{dn_p}{dt} \right|_s = \left. \frac{dn_p}{dt} \right|_A = B n_p n_2 - B n_p n_1 = B n_p (n_2 - n_1) \quad (6.25)$$

und mit $dt = ds/c$ die Änderung der Photonendichte pro Weg s

$$\frac{dn_p}{ds} = \frac{B n_p}{c} (n_2 - n_1) \quad \text{woraus} \quad n_p(s) = n_p(0) e^{\frac{B(n_2 - n_1)}{c} s}$$

folgt. (Hierbei ist c die Phasengeschwindigkeit im Lasermaterial.)

Man sieht sofort: Für $n_2 < n_1$ nimmt die Photonendichte ab, statt Verstärkung gibt es Abschwächung, bei $n_2 = n_1$ ist die Lasermaterie durchsichtig, und nur für $n_2 > n_1$ erfolgt Verstärkung. Da der letztere Fall das Gegenteil des Verhältnisses im thermischen Gleichgewicht ist, spricht man bei $(n_2/n_1) > 1$ von Besetzungs-Inversion.

Um diese aufrecht zu erhalten, muss man ständig Energie zuführen; man nennt dies Energiepumpen. Die Energie kann man hierbei z.B. durch Licht, energiereiche Elektronen, Ionen, Atome oder Moleküle in die Lasermaterie pumpen. Bild 6.19 zeigt Systeme, die entweder nur die beiden Laserniveaus W_1 und W_2 oder noch ein oder zwei weitere, W_3 und W_0 , besitzen.

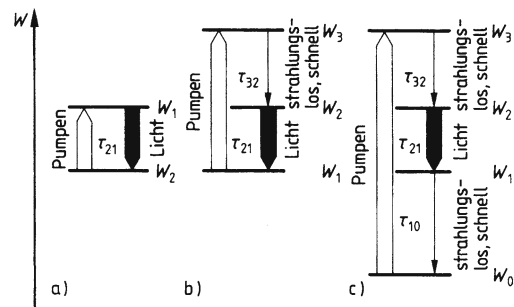
2-Niveau-Systeme (Bild 6.19a). Beim sog. „stationären Pumpen“ mit Licht, d.h. bei $n_1 = \text{const}$ und $n_2 = \text{const}$ muss die Absorptionsrate gleich der gesamten Emissionsrate sein,

$$\text{also } B n_p n_1 = B n_p n_2 + n_2/\tau_{21}. \text{ Damit wird } \frac{n_1}{n_2} = 1 + \frac{1}{\tau_{21}} B n_p > 1$$

Also ist n_2/n_1 immer kleiner als 1, was bedeutet, dass keine Inversion und damit keine Verstärkung möglich ist. Man kann sich überlegen, dass dies auch für Anregung durch „passende“ Elektronen gilt, da deren Energie ja gleich $h f_{21}$ sein muss. Das heißt:

In Materie mit nur zwei Niveaus ist keine Lichtverstärkung möglich.

Bild 6.19 a) 2-Niveau-, b) 3-Niveau- und c) 4-Niveau-System. Die Laserniveaus sind W_1 und W_2 . Bei kontinuierlichem Laserbetrieb sollte für die Lebensdauern gelten: $\tau_{21} \gg \tau_{10} \approx \tau_{32}$.



3-Niveau-Systeme. Diese bieten einen Ausweg aus der bei 2-Niveau-Systemen bestehenden Schwierigkeit. Er wird anhand von Bild 6.19b deutlich. Das Pumpen erfolgt jetzt vom Zustand W_1 in den „entarteten“ Zustand W_3 . Da dieser häufig Unterniveaus, also eine gewisse Energie-Bandbreite besitzt, braucht auch die Pumpenergie nicht so exakt zu sein, ein für die Praxis sehr nützlicher Umstand. Von W_3 erfolgt ein strahlungsloser, sehr schneller Übergang auf das Laserniveau W_2 , das möglichst metastabil sein sollte. Jetzt ist Inversion, d.h. $n_2 > n_1$, möglich, weil das Pumpen unabhängig von den Laserniveaus erfolgt. Allerdings gibt es eine Randbedingung, die in der Praxis nicht immer erfüllbar ist: Die gesamte Teilchendichte ist $n = n_1 + n_2 + n_3$, oder, da der Übergang $W_3 \rightarrow W_1$ sehr schnell erfolgt, $n \approx n_1 + n_2$. Aus der Inversionsbedingung $n_2 > n_1$ folgt, dass $n_2 > n/2$ sein muss.

In 3-Niveau-Systemen muss so gepumpt werden, dass mindestens die Hälfte aller Molekeln „invertiert“ ist.

4-Niveau-Systeme. In diesen entfällt die gerade ermittelte Bedingung. Denn, da gemäß Bild 6.19c das untere Laserniveau W_1 sehr schnell nach W_0 entleert wird, ist n_1 immer praktisch gleich null, sodass $n_2 - n_1 \approx n_2$ ist.

In 4-Niveau-Systemen ist bereits bei geringer Pumprate Inversion möglich. Diese werden deshalb im Allgemeinen verwendet.

Technische Anordnungen zur Lichtverstärkung

Superstrahler. Dies ist ein sehr einfacher Lichtverstärker. Gemäß Bild 6.20 besteht er aus einem Glasrohr, dessen Länge sehr viel größer als sein Durchmesser ist. Es sei beispielsweise mit Stickstoff N_2 gefüllt. Erregt man durch Anlegen einer Hochspannung an die eingebauten Elektroden eine Gasentladung, so wird spontan emittiertes Licht längs der Rohrachse genügend durch stimulierte Emission verstärkt, sodass hier eine intensive kohärente Lichtwelle austritt. Ein Spiegel am linken Rohrende sorgt dafür, dass die nach links laufende Welle dort reflektiert wird und damit ebenfalls zur Verstärkung beiträgt.

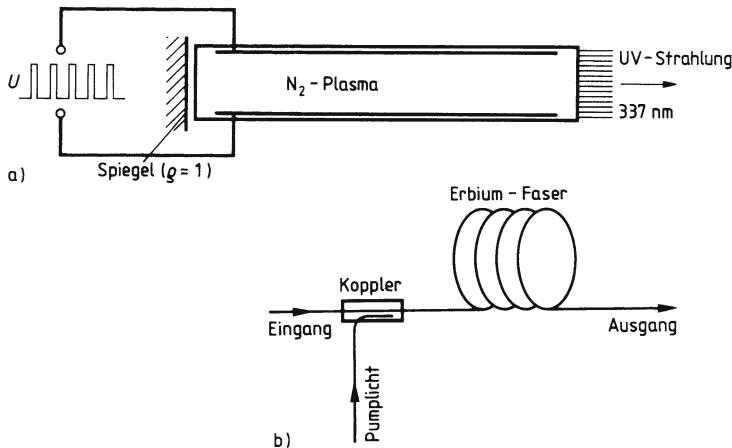


Bild 6.20

a) Schema eines „Superstrahlers“. Bei diesem wird spontan emittierte Strahlung in Richtung der Längsachse des Rohres durch stimulierte Emission so hoch verstärkt, dass kohärente Strahlung austritt. Bei N_2 ist wegen $\tau_{10} > \tau_{21}$ nur Impulsbetrieb möglich.
 b) Prinzip eines Glasfaserverstärkers.

N_2 besitzt ein 4-Niveau-System mit der Besonderheit, dass die Lebensdauer von W_1 wesentlich kleiner als die von W_2 ist. Deshalb ist nach sehr kurzer Zeit keine Inversion mehr vorhanden und die Lichtverstärkung schaltet sich selbst ab. Trotzdem wird der N_2 -Superstrahler für viele Zwecke eingesetzt. Man kann nämlich mit ihm UV-Impulse von 5 ns Dauer und Leistungen im MW-Bereich bei Wiederholfräquenzen bis etwa 200 Hz erzeugen.

Glasfaserverstärker. Diese sind ebenfalls sehr einfache Lichtverstärker. Sie haben die Signalübertragung über Glasfasern buchstäblich revolutioniert. Ihr Prinzip ist: Eine Monomode-Glasfaser (vgl. Abschn. 4.1.2.1) wird auf einer Länge von etwa 50 m mit Erbiumatomen dotiert. Diese bilden ein 4-Niveau-System, das sich mit Infrarotlicht der Wellenlängen 980 nm oder 1480 nm auf ein metastabiles Laserniveau pumpen lässt. Man wickelt dieses Stück Glasfaser zu einer Spule mit einem Durchmesser von einigen Zentimetern auf, in deren Anfang man über einen optischen Koppler, d.h. eine eng an die Signalfaser geführte Glasfaser, das von einer entsprechenden Infrarot-Laserdiode (s. Abschn. 7.5.2) erzeugte Pumplicht einkoppelt (Bild 6.20b).

Schwache Lichtsignale mit der Wellenlänge 1550 nm, die in den Anfang dieser Glasfaser eintreten, werden dadurch mittels stimulierter Emission in ihr verstärkt, ohne dass ein elektronischer Verstärker erforderlich ist. Man erreicht Verstärkungen bis zu 30 dB.

Rückgekoppelte Lichtverstärker

Fast alle technisch realisierten Laser sind rückgekoppelte Lichtverstärker¹⁾ oder Licht-Oszillatoren. Die Rückkopplung erfolgt dadurch, dass man die Lasermaterie zwischen zwei Spiegeln anordnet, die wir der Einfachheit halber als planparallel annehmen. Einer von ihnen soll den Reflexionsgrad $\rho = 1$, der andere einen geringfügig darunter liegenden (z.B. 0,99) haben, sodass ein kleiner Bruchteil (z.B. 1%) austreten kann (Bild 6.21). Die Lichtwelle läuft ständig zwischen den Spiegeln hin und her und wird hierbei sehr hoch verstärkt.

Damit hin- und rücklaufende Wellen phasenrichtig aneinander passen, muss sich eine stehende Welle ausbilden, also gemäß Abschn. 5.2.4 der Spiegelabstand L ein ganzzahliges Vielfaches einer halben Wellenlänge sein: $L = q \lambda_0/2$ mit $q = 1, 2, 3, \dots$. Eine solche Anordnung heißt Fabry-Perot-Resonator²⁾. Seine Grundfrequenz ist $f_0 = c/\lambda_0 = c/(2L)$, wobei c die Phasengeschwindigkeit in der Lasermaterie ist. Man sieht sofort, dass q ein extrem hoher Wert sein muss. Beispielsweise sei bei einem He-Ne-Laser $L = 0,5$ m und $c = c_0$. Dann ist $f_0 = 3 \cdot 10^8$ Hz. Der Laserübergang mit $\lambda = 630$ nm ergibt $f = 4,76 \cdot 10^{14}$ Hz, entsprechend $q = 1\,586\,667^3)$.

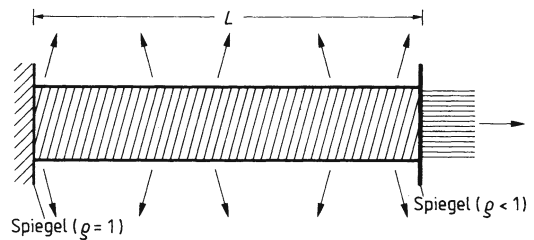


Bild 6.21 Schema eines rückgekoppelten Lichtverstärkers. Die beiden Spiegel bilden einen Fabry-Perot-Resonator. Der Einfachheit halber ist für den linken Spiegel $\rho = 1$ angenommen. L ist die Resonatorlänge. Damit wird die Grundfrequenz $f_0 = c/2L$. Diese ist auch gleich dem Modabstand.

Man nennt eine exakt „passende“ stehende Welle ein longitudinales Mode. Die Frequenzdifferenz Δf zweier benachbarter Modes ist hierbei $\Delta f = c/(2L)$, also gleich der Grundfrequenz, in unserem Beispiel demnach $3 \cdot 10^8$ Hz. Es ist offensichtlich, dass bei einer gewissen Frequenzbandbreite $\Delta f_B > \Delta f$ mehrere benachbarte Modes schwingen können. Es gibt aber auch 1-Moden-Laser.

Da außer bei Halbleiter-Lasern der Resonator-Durchmesser praktisch immer > 1 mm ist, ist gemäß Abschn. 5.2.6.4 der Öffnungswinkel des Lichtbündels sehr klein. In unserem Beispiel ist $\alpha = 2 \alpha_m \approx 2 \sin \alpha_m = \lambda/d = 6,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}/10^{-3} \text{ m} = 6,3 \cdot 10^{-3} = 0,04''$.

Helium-Neon-Laser. Von den vielen Laser-Arten ist der He-Ne-Laser sicher am bekanntesten. Er soll deshalb hier als Beispiel betrachtet werden. Bild 6.22 zeigt seinen prinzipiellen Aufbau. Die Lasermaterie ist ein Gasgemisch aus Helium und Neon mit einem Druck von einigen 100 Pa, wobei das Verhältnis der Partialdrücke $p_{\text{He}}/p_{\text{Ne}}$ etwa 5 bis 50 beträgt. Bild 6.23 zeigt ein vereinfachtes Termschema. Wie man sieht, handelt es sich hier um ein 4-Niveau-System. In einer Gasentladung regen freie Elektronen die He-Atome in eine Reihe

¹⁾ Sie müssten deshalb eigentlich FLASER (Feed-back-Laser) heißen.

²⁾ Charles Fabry (1867 bis 1945); Alfred Perot (1863 bis 1925).

³⁾ q ist hier aus Gründen der Anschaulichkeit viel zu genau berechnet.

höherer Zustände an, von denen sie stufenweise in die metastabilen Zustände 2^1s und 2^3s gehen. Treffen sie auf Ne-Atome, so können sie die Energie auf deren etwa gleich hohe Zustände $3s$ und $2s$ übertragen. Man nennt diesen Energietransfer Stöße 2. Art.

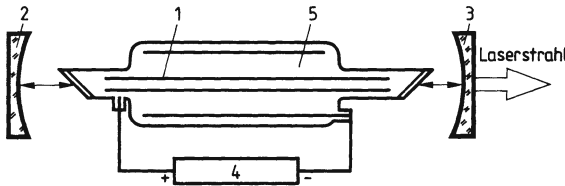


Bild 6.22 Schema eines Gas-Lasers. 1 ist der Verstärker, 2 und 3 sind Resonatorspiegel mit $\varrho_1 = 1$ und $\varrho \approx 0,99$ bis $0,7$. Die Spiegel sind zum Laserrohr hin leicht konkav, um eine Stabilisierung der eingeschwingenen Modes zu erreichen. Das Gasentladungsrohr 5 ist mit Fenstern versehen, auf welche das Laserlicht unter dem sog. Brewster-Winkel (vgl. Abschn. 5.2.7.1) auftrifft, um Reflexionsverluste zu vermeiden. 4 ist die Spannungsquelle.

Von diesen erfolgt die stimulierte Emission. Die Lebensdauer dieser beiden Zustände ist 10^{-7} s, die des $2p$ -Zustandes nur 10^{-8} s. Allerdings ist der $1s$ -Zustand wieder metastabil, weswegen er durch Stöße mit der Gefäßwand schnell „entladen“ werden muss. Damit möglichst viele Ne-Atome sehr rasch zur Wand diffundieren, macht man den Querschnitt des Laser-Rohres möglichst klein. Welche von den drei eingezeichneten Laserlinien emittiert wird, hängt von der Abstimmung des Resonators ab. Am bekanntesten ist die orangerote Linie mit $\lambda = 630$ nm, entsprechend $\Delta f_{21} = 4,76 \cdot 10^{14}$ Hz. Ihre Bandbreite beträgt wegen der Dopplerverbreiterung¹⁾ $f_B = 1,5 \cdot 10^9$ Hz (im Vergleich zu ihrer natürlichen Linienbreite von weniger als $1/\tau_{21} = 10$ MHz). Bei der Resonatorlänge $L = 0,5$ m ist, wie oben gezeigt, der Frequenzabstand benachbarter Modes $\Delta f = 3 \cdot 10^8$ Hz. In der Bandbreite Δf_B können also 5 Moden schwingen. Bei $L = 0,1$ m ist $\Delta f = 1,5 \cdot 10^9$ Hz, der Laser sendet dann nur noch einen einzigen Mode aus.

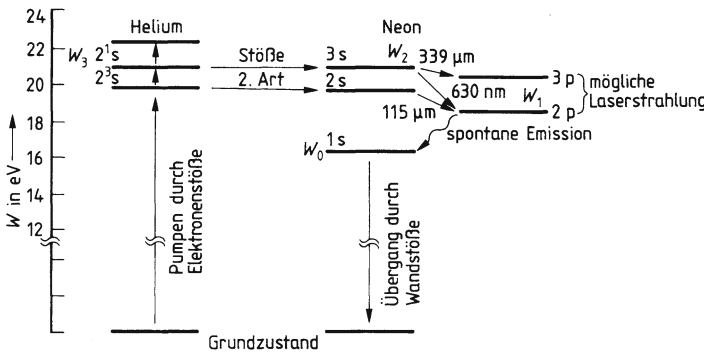


Bild 6.23 Vereinfachtes Termschema eines He-Ne-Lasers. Am bekanntesten ist der Übergang $3s \rightarrow 2p$ mit $\lambda = 630$ nm. Deswegen sind diese beiden Niveaus als W_2 und W_1 eingezeichnet. Durch passende Resonatorabstimmung sind auch die anderen eingezeichneten Laserübergänge möglich. Unberücksichtigt ist, dass alle Niveaus „entartet“ sind.

Festkörper-Laser. Diese sind technisch sehr wichtig, insbesondere in der Opto-Elektronik. Sie sind in Abschnitt 7 beschrieben.

Tafel 6.24 gibt einen Überblick über die gängigsten Laserarten.

¹⁾ vgl. „Anwendungen“ zu Abschn. 5.2.6.5

Tafel 6.24 Eigenschaften einiger wichtiger Laser

Name	Laser-material	Zusatz	λ	Leistung (d = Dauer- p = Pulsbetrieb)	Anwendungen	Besondere Eigenschaften
Gaslaser Helium-Neon	Ne	He	632,8 nm 1,15 μm 3,39 μm	bis 50 mW d bis 100 mW d	Messtechnik, Justierung, Holografie	hohe Lebens- dauer, große Kohärenz- länge, stabiles Mode
Helium- Cadmium	Cd ⁺	He	325,0 nm 441,6 nm	5 bis 10 mW d	Fotolithografie, Spektroskopie	große Kohärenzlänge
Argon	Ar ⁺		514,5 nm 488,0 nm	100 W d	Holografie, Spektroskopie. Pumpen von Farbstofflasern	auch im UV!
Krypton	Kr ⁺⁺		350,7 nm 324 bis 858 nm	bis 10 W d pro Linie	Fotolithografie, Spektroskopie, Pumpen von Farbstofflasern	viele Linien
Kohlendioxid	CO ₂	N ₂ , He	10,60 μm 9 bis 11 μm ab- stimmbar	1 W bis 10 kW d 10 bis 100 MW p	Material- bearbeitung	hohe Leistung, hoher Wirkgs.- grad; Puls- länge 0,1 μs
Stickstoff		N ₂	337,1 nm	einige MW p	Fotochemie, Pumpen von Farbstofflasern	Pulslänge 5 ns
Excimer wie XeF KrF ArF	Xe, F Kr, F ArF	He Ar, F	350 nm 248 nm 193 nm	2 bis 4 MW p	Fotochemie, Spektroskopie Pumpen von Farbstofflaser	UV bei hoher Leistung
Flüssigkeitslaser Farbstoff	org. Farbst.	Lös.- mittel	310 bis 1200 nm	0,1 W d 10 kW p	Spektroskopie	abstimmbar
Festkörperlaser Rubin	Cr ⁺⁺⁺	Al ₂ O ₃	649,3 nm	1 W d 100 GW p	Material- bearbeitung, Fotochemie	
Nd-YAG	Nd ⁺⁺⁺	Y ₃ Al ₅ O ₁₂	1,064 μm	1 kW d 10 MW p	Plasma- erzeugung	
Nd-Glas	Nd ⁺⁺⁺	Glas	1,06 μm	100 GW p		
Halbleiterlaser Galiumarsenid und ähnliche	GaAs GaAlAs		850 bis 910 nm	0,1 W d 10 kW p	opt. Informations- übertragung CD-Spieler	

Anwendungen. Alle oben aufgeführten Eigenschaften der Laser führen zu physikalischen und technischen Anwendungen. Wegen der kleinen Divergenz dienen Laserstrahlen zum „Zielen“, nicht nur in der Wehrtechnik. Die Schmalbandigkeit und die riesige Kohärenzlänge hat viele Zweige der Optik geradezu revolutioniert; z.B. werden die ganzen Beugungs- und Interferenzversuche in Abschn. 5.2.6 mit

Lasern gemacht. Die elektromagnetische Energie des Laserlichtes wird in Wärmeenergie umgewandelt, wenn der Strahl auf einen Stoff trifft, der das Licht absorbiert. Entsprechend heizt sich der absorbierende Stoff örtlich bis zum Schmelzen und Verdampfen auf. So können Laserstrahlen zum tiegfleien Schmelzen, zum Schweißen, Schneiden und Bohren verwendet werden. Die höchste Temperatur, die man auf diese Weise (im Labor) bisher erreichte, ist 10^7 K. Dabei treten bereits Kernfusionen auf (s. Abschn. 6.2.4.2).

6.1.3.2 Rastertunnelmikroskop

Das Rastertunnelmikroskop (G. Binnig und H. Rohrer, Nobelpreis 1986) ermöglicht die Untersuchung von Oberflächen (z.B. in der x - y -Ebene in Bild 6.25a). Dazu wird eine aufs äußerste fein geätzte Metallspitze 1 so nahe an der Oberfläche des Objektes entlang geführt (z.B. durch einen piezokeramischen Stab 2 in x -Richtung), dass der Tunnelstrom (vgl. Abschn. 6.1.2.4) zwischen Spitze und Objekt messbar ist. Dann wird entweder der Abstand Spitze-Oberfläche (z.B. durch einen piezoelektrischen Stab 4 in z -Richtung) so gesteuert, dass der Tunnelstrom konstant bleibt und die dazu nötigen Abstände werden registriert, oder der Abstand wird konstant gehalten und der Tunnelstrom registriert. In beiden Fällen bildet die Registrierung eine Profillinie entlang der Oberfläche. Wird die Spitze dann schrittweise in y -Richtung versetzt (z.B. durch den piezokeramischen Stab 3), und jedesmal erneut in x -Richtung durchfahren, sodass viele derartige Profillinien registriert und nebeneinander aufgezeichnet werden, so ergibt sich ein „Bild“ der abgetasteten Oberfläche wie z.B. in Bild 6.25b. Dabei werden Rauigkeiten im Bereich von Atomdurchmes-

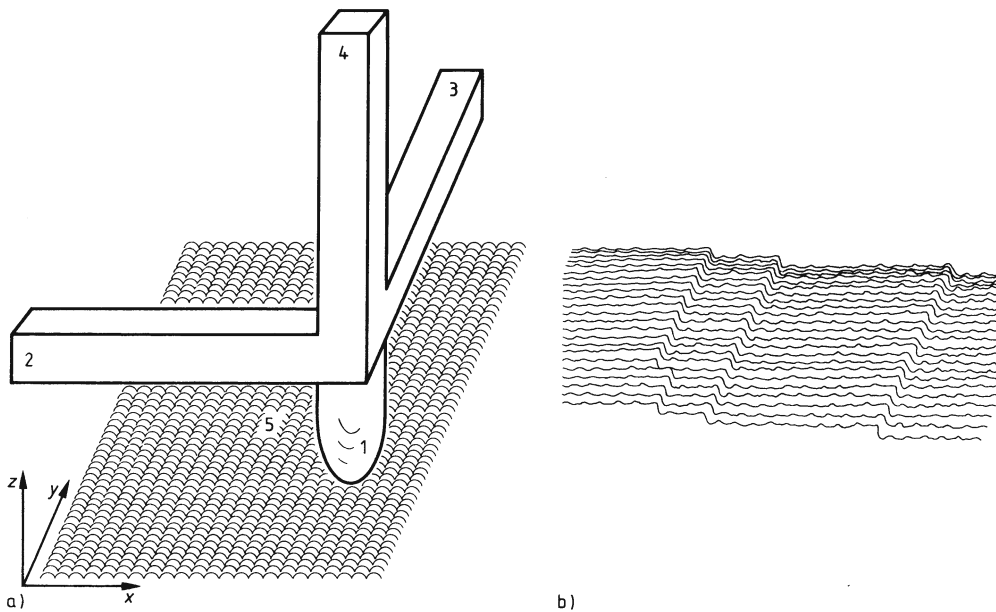


Bild 6.25 Prinzip des Rastertunnelmikroskops

a) Anordnung über der Oberfläche 5; b) 23 Profillinien nebeneinander ergeben ein derartiges „Bild“ der Oberfläche. (Tatsächlich ist die Spitze 1 im Vergleich zu den Piezostäben 2, 3 und 4 viel feiner und die Molekeln der Oberfläche 5 sind nochmals viel kleiner als die Spitze 1)

sern sichtbar. Für die Technologie von Oberflächen ist dies ein großer Gewinn; so beruhen die jüngsten Fortschritte in der Oberflächenbearbeitung (vgl. Anwendungen in Abschn. 5.2.6.4) z.T. hierauf; z.B. werden die Oberflächen von Scheiben für große Festplatten in der Computertechnik vor ihrer magnetischen Beschichtung auf diese Weise kontrolliert.

Eine wichtige Weiterentwicklung des Rastertunnelmikroskops ist das Rasterkraftmikroskop. Dabei wird die Spitze 1 an einem entsprechend feinen elastischen Haltearm befestigt und statt des Tunnelstroms werden die Kräfte (in der Größenordnung 10^{-10} N) registriert, die zwischen dem äußersten Atom der Spitze und den Atomen der untersuchten Oberfläche auftreten; oder es wird die Kraft konstant gehalten und die dazu nötigen Abstände (in der Größenordnung 10^{-11} m) registriert. So konnten erstmals nicht nur einzelne Atome, sondern sogar verschiedene Elektronenwolken einzelner Atome „abgebildet“, (im obigen Sinn) werden. Mit Rasterkraftmikroskopen lassen sich sogar einzelne Atome, die an der Spitze (z.B. durch elektrische Spannungen) gehalten werden, verschieben.

Aufgaben zu Abschn. 6.1

- Ein Wasserstoffkern sei als Kreisscheibe mit 1 mm Durchmesser gezeichnet. In welchem Abstand müsste das Elektron maßstabgetreu etwa gezeichnet werden?
 - Welche elektrische Anziehungskraft und
 - welche Gravitationskraft wirkt zwischen Kern und Elektron?
- Welchen Durchmesser hat das Heliumion He^+ im Grundzustand?
- Wie ändert sich das Bremsspektrum einer Röntgenröhre im Vergleich zu Bild 6.10b, wenn statt einer Gleichspannung eine Wechselspannung mit gleichem Effektivwert angelegt wird?
- Wenn im Franck-Hertz-Versuch Lithium statt Quecksilber verwendet wird, genügt die Beschleunigungsspannung 1,85 V zur Anregung. Welche Vakuumwellenlänge hat das dabei ausgestrahlte Licht?
- Ein Elektron möge sich nur entlang der x -Achse bewegen können, und auch da nur zwischen $x = 0$ und $x = l$, da an diesen beiden Stellen die potentielle Energie $W_{\text{pot}} = +\infty$ wird. Berechnen Sie die Nullpunktenergie des Elektrons für $l = 10^{-10}$ m.
- Ein Gaslaser mit der Resonatorlänge $L = 0,3$ m und dem Reflexionsfaktor 0,99 „lasert“ bei der mittleren Wellenlänge $\lambda = 600$ nm.
 - Welche Harmonische der Grundfrequenz ist dies?
 - Wie viele Modes könnten in der Resonatorbreite $\Delta f_B = 1,5 \cdot 10^9$ Hz anschwingen?

6.2 Atomkerne

6.2.1 Natürliche Radioaktivität

Die Elemente mit Ordnungszahlen ab $Z = 84$ sind radioaktiv, d.h., sie senden spontan eine Strahlung aus; man nennt sie Radionuklide (s. Abschn. 6.2.3). Die Strahlung – wir wollen sie im Folgenden Kernstrahlung¹⁾ nennen – ist wesentlich energiereicher als die bisher besprochene, die aus der Atomhülle stammt, und die Aussendung ist von außen nicht beeinflussbar. Man schließt daraus, dass sie aus dem Atomkern stammt. Da die Entstehung und die Absorption dieser Strahlung uns erste Kenntnisse über den Aufbau des Atomkerns liefert, ähnlich wie das sichtbare Licht über die Atomhülle, wollen wir sie näher besprechen.

¹⁾ Der häufig benützte Name „radioaktive Strahlung“ ist nicht sehr sinnvoll, da die Strahlung selbst nicht radioaktiv = strahlungsaktiv ist.

Außerdem hat diese Strahlung auch erhebliche technische Bedeutung: Mit ihrer Hilfe werden häufig Dickenmessungen, Abriebsmessungen, Füllstandsmessungen usw. durchgeführt. Im Gegensatz zur Chemie erlaubt die Kernstrahlung den Nachweis einzelner Atome.

6.2.1.1 Strahlenarten

Die Intensität der Kernstrahlung wird beim Durchgang durch Materie geschwächt. Die Schwächung hängt von der Art der Strahlung (s. unten), von der Art der Materie (Ordnungszahl), von ihrer Dichte ρ und ihrer Schichtdicke x ab. Den Faktor ρx nennt man auch die Flächendichte μ , denn wenn das Volumen V durch $A x$ (A = Fläche) ersetzt wird, ergibt sich $\rho x = (m/V) x = m/A = \mu$.

Bringt man zwischen einen radioaktiven Strahler 1 (Bild 6.26a) und einen für die Strahlung geeigneten Empfänger 2 (s. Abschn. 6.2.2.2) Absorptionsschichten 3 mit verschiedenen Flächendichten μ und trägt die empfangene Intensität S in logarithmischem Maßstab in Abhängigkeit von μ auf, so erhält man drei Geraden mit drei verschiedenen Steigungen (6.26b). Daraus kann man schließen, dass die Strahlung aus drei verschiedenartigen Komponenten besteht. Die erste – α -Strahlung genannt – wird schon von sehr dünnen oder leichten Schichten ($\approx 1 \text{ mg/cm}^2$) restlos absorbiert. Die zweite Komponente – β -Strahlung genannt – braucht dazu schwerere und dickere Schichten bis etwa 1 g/cm^2 . Die dritte Komponente – die γ -Strahlung – wird erst durch Schichten mit mehreren g/cm^2 merklich geschwächt.

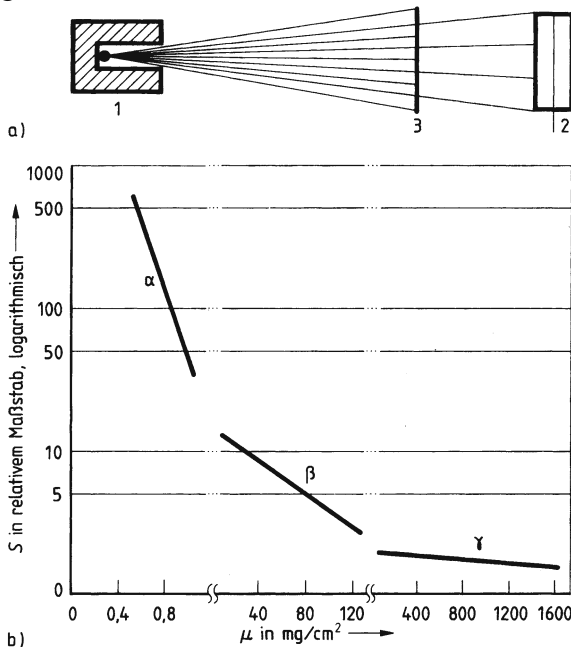


Bild 6.26 Absorption von Kernstrahlung

Lässt man die Kernstrahlung senkrecht durch ein starkes elektrisches oder magnetisches Feld gehen, so wird die α -Strahlung stark nach einer Seite, die β -Strahlung schwächer nach der anderen Seite, die γ -Strahlung überhaupt nicht abgelenkt. Daraus und aus einer Reihe weiterer Experimente ergibt sich:

Die α -Strahlung besteht aus Teilchen mit zwei positiven Elementarladungen und der 4-fachen Masse des Wasserstoffatoms, genau wie die Kerne des Heliums. Diese α -Teilchen werden mit Geschwindigkeiten in der Größenordnung 10^7 m/s ausgestoßen.

Die β -Strahlung besteht aus Elektronen mit Geschwindigkeiten in der Größenordnung 10^8 m/s (bis zu etwa 99,9% der Lichtgeschwindigkeit).

Die γ -Strahlung ist eine elektromagnetische Strahlung mit Wellenlängen um 10^{-12} m (Frequenzen um 10^{20} Hz).

Die Energien der α -Teilchen, der β -Teilchen und der Photonen der γ -Strahlung (kurz: γ -Quanten) liegen meistens in der Größenordnung von 10^6 eV = 1 MeV. Radioaktive Elemente strahlen α -Teilchen und γ -Quanten mit einer oder einigen diskreten Energien aus, jedoch β -Teilchen mit kontinuierlicher Energieverteilung.

Die Absorption der γ -Strahlung beruht im Wesentlichen auf folgenden Effekten:

1. Photoeffekt. Das Photon der γ -Strahlung wird von einem ganzen Atom ganz absorbiert; seine Energie dient dazu, eines der Elektronen (meist aus der K-Schale) vom Atom abzulösen. Einen eventuellen Überschuss nimmt das Elektron als kinetische Energie mit. Bei Photoenergien unter 0,5 MeV überwiegt dieser Effekt.
2. Comptoneffekt¹⁾. Hierbei stößt das Photon mit einem Elektron, z.B. mit einem der äußeren eines Atoms, zusammen und gibt einen Teil seiner Energie als kinetische Energie an das Elektron ab. Der niedrigeren Energie des Photons entspricht nach Gl. (5.112) eine niedrigere Frequenz und eine um $\Delta\lambda$ vergrößerte Wellenlänge; für den Zusammenhang zwischen diesem $\Delta\lambda$ und dem Ablenkungswinkel φ (Bild 6.27) ergibt sich

$$\Delta\lambda = \Lambda (1 - \cos \varphi)^2$$

Der Proportionalitätsfaktor Λ hierin hängt nur von den Stoßpartnerteilchen der Photonen – hier, wie gesagt, Elektronen – ab, heißt Comptonwellenlänge der betreffenden Teilchen und hat für Elektronen den Wert $\Lambda_e = 2,4263 \cdot 10^{-12}$ m. Der Comptoneffekt zeigt sehr deutlich die Brauchbarkeit des dualistischen Modells von Welle und Korpuskel.

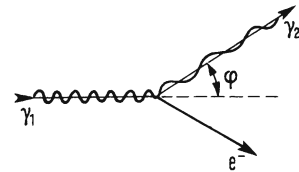


Bild 6.27 Compton-Effekt

3. Paarbildung. In der Nähe eines Kerns kann sich ein γ -Quant zu zwei Teilchen materialisieren, nämlich zu einem Elektron und einem sog. Positron mit der gleichen Masse und dem gleichen Spin $L_e = \hbar/2$ wie das Elektron, aber mit einer positiven Elementarladung. Dazu muss das Photon mindestens 1,02 MeV – das Energieäquivalent der beiden Massen – haben (s. Abschn. 8). Hat das γ -Photon eine höhere Energie, so erhalten die beiden Teilchen den Überschuss als kinetische Energie. Sobald das Positron auf ein Elektron trifft, zerstrahlen diese beiden zu zwei γ -Photonen.

4. Absorption in Atomkernen spielt nur eine geringe Rolle, außer im Fall des Mößbauereffektes (s. Abschn. 6.2.3.2).

¹⁾ A. H. Compton (1892 bis 1962, Nobelpreis 1927).

²⁾ Das gleiche Ergebnis bekommt man auch theoretisch, wenn man mit Hilfe des Energie- und des Impulserhaltungssatzes den Vorgang als mechanischen Stoß behandelt.

6.2.1.2 Zerfallsgesetze und -reihen

Immer wenn ein Atomkern ein α -Teilchen ausstößt, verringert sich seine Masse um 4 Protonenmassen und seine positive Ladung um 2 Elementarladungen. Bei der Emission eines β -Teilchens bleibt zwar die Masse konstant, aber die positive Ladung erhöht sich um eine Elementarladung. Bei der Aussendung von γ -Strahlung ändern sich weder Masse noch Ladung, aber die γ -Strahlung tritt immer nur zusammen mit oder unmittelbar nach der α - oder β -Emission auf. Bei jeder Emission ändert sich also der Charakter des Atomkerns und damit des ganzen Atoms wesentlich. Man nennt den Vorgang daher auch radioaktiven Zerfall.

Definition: Den Quotienten aus der Zahl dN der Zerfälle, die in einer bestimmten Menge radioaktiver Substanz in der Zeit dt vorkommen, und dieser Zeit dt nennt man deren Aktivität $A = dN/dt$.

Einheit: $1 \text{ s}^{-1} = 1 \text{ Becquerel} = 1 \text{ Bq}^1)$

Die Anzahl N der Kerne, aus denen eine radioaktive Substanz besteht, vermindert sich natürlich während der Zeit dt um $-dN$. Dabei zeigt sich, dass die relative Abnahme

$-\frac{dN}{N}$ pro Zeit dt , also $-\frac{1}{N} \frac{dN}{dt}$ konstant ist:

$$-\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = \lambda \quad (6.26)$$

λ wird Zerfallskonstante genannt. Verschiedene radioaktive Substanzen haben verschiedene Zerfallskonstanten. Aus Gl. (6.26) ergibt sich durch Integration

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \quad (6.27)$$

d.h., die Zahl der radioaktiven Atome nimmt von der Anfangszahl N_0 (zu Beginn der Beobachtung) exponentiell ab.

Das Gleiche gilt dann wegen $dN/dt = N_0 \lambda e^{-\lambda t}$ auch für die Aktivität A .

$$A = A_0 e^{-\lambda t} \quad (A_0 = N_0 \lambda, \text{ Anfangsaktivität zu Beginn der Beobachtung}) \quad (6.28)$$

Definition: Halbwertszeit $T_{1/2}$ nennt man das Zeitintervall, in dem die Aktivität einer radioaktiven Substanz und die Anzahl ihrer Atome auf die Hälfte des Wertes zu Beginn der Beobachtung abgenommen hat.

Aus Gl. (6.28) ergibt sich mit $A = A_0/2$

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = 0,693 \frac{1}{\lambda}$$

¹⁾ A. H. Becquerel (1852 bis 1908). Häufig findet man noch die Einheit 1 Curie = 1 Ci = $3,7 \cdot 10^{10}$ Bq (nach M. und P. Curie, 1867 bis 1934 bzw. 1859 bis 1906; alle 3 Nobelpreis 1903), d. i. die Aktivität von 1 g Radium.

Daraus ergibt sich unmittelbar:

Stark radioaktive Stoffe (große Zerfallskonstante λ) sind kurzlebig, d.h., sie haben eine kleine Halbwertszeit $T_{1/2}$ und umgekehrt.

So werden also z.B. aus „stark radioaktiven Abfällen“ in relativ kurzer Zeit „mittleradioaktiv“ und schließlich „schwach radioaktiv“, s. Abschn. 6.2.4.1.

Außerdem erhält man aus $\lambda = \ln 2/T_{1/2}$ eine andere Form der Zerfallsgleichungen (6.27) und (6.28)

$$A = \frac{A_0}{2^{t/T_{1/2}}}; \quad N = \frac{N_0}{2^{t/T_{1/2}}}$$

Die meisten Kerne, die durch die Aussendung von α - oder β -Teilchen aus natürlichen Radionukliden entstehen, sind selbst wieder instabil, d.h., sie zerfallen selbst wieder radioaktiv. Die entstehenden sog. Tochtersubstanzen haben oft eine wesentlich kürzere Halbwertszeit als die „Muttersubstanz“. So ist z.B. die Halbwertszeit des Radiums, das zum ersten Mal vom Ehepaar Curie im Jahre 1898 aus Uranpechblende isoliert wurde, nur 1622 Jahre. Seit der Entstehung der Elemente vor mehreren Milliarden Jahren wären also längst praktisch alle Radiumkerne zerfallen, wenn sie nicht – über einige Zwischenstufen – aus dem Uran ($T_{1/2} = 4,5 \cdot 10^9$ Jahre) laufend neu gebildet würden. Die Zerfallsreihe ist in Bild 6.28 mit Angabe der Halbwertszeiten grafisch dargestellt (vgl. auch Abschn. 6.2.3). Eine ähnliche radioaktive Reihe beginnt beim Thorium ($A_r = 232$; $T_{1/2} = 1,4 \cdot 10^{10}$ Jahre) und endet bei einem Blei mit $A_r = 208$. Eine dritte Reihe beginnt bei einem Uran mit ($A_r = 235$; $T_{1/2} = 7,1 \cdot 10^8$ a) und endet bei einem Blei mit $A_r = 207$.

Die Konzentration aller (nicht entweichenden) Tochtersubstanzen in einem radioaktiven Präparat wächst solange, bis jeweils genauso viele Atome zerfallen, wie gleichzeitig aus den zugehörigen Muttersubstanzen entstehen. Nach einiger Zeit herrscht also ein Gleichgewicht, bei dem die am lang-

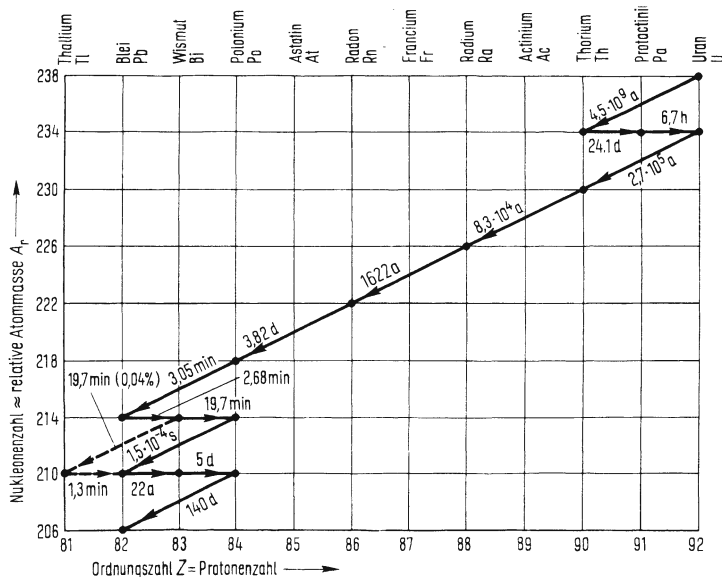


Bild 6.28 Zerfallsreihe des Urans ($A_r = 238$). Schräge Pfeile nach links und vier Einheiten nach unten bedeuten α -Zerfall, horizontale Pfeile um eine Einheit nach rechts bedeuten β -Zerfall. Die Zahlen mit Einheiten an den Pfeilen sind die Halbwertszeiten $T_{1/2}$.

samsten zerfallenden Substanzen am häufigsten vertreten sind. Es verhalten sich die Zahlen der Atome wie ihre Halbwertszeiten:

$$N_1 : N_2 : N_3 : \dots = T_{1/2_1} : T_{1/2_2} : T_{1/2_3} : \dots$$

Lange Halbwertszeiten werden aus diesen Verhältnissen bestimmt.

6.2.2 Messverfahren

Die energiereichen geladenen Teilchen und die Quanten der Kernstrahlung und ähnlicher Vorgänge ionisieren beim Durchgang durch Materie deren Moleküle. Darauf beruhen (direkt oder indirekt) alle Nachweismethoden. Man kann die Messverfahren dabei unterteilen in zeitauflösende und ortsauflösende, d.h. in solche, die ermitteln, wann (und wie viele) Teilchen durch das Messvolumen gegangen sind, bzw. wie sie durchgegangen sind. Diese Unterteilung ist allerdings etwas theoretisch, da viele Messverfahren mehr oder weniger deutlich zeit- und ortsauflösend sind.

6.2.2.1 Bahns Spuren

Ein Teil der Nachweismethoden macht direkt die Bahn einzelner Teilchen sichtbar. Die bekannteste derartige Anordnung ist die

Nebelkammer (Bild 6.29). Der Boden 1 einer Kammer wird gekühlt, z.B. mit festem Kohlendioxid 2; der Deckel der Kammer trägt innen einen mit Alkohol getränkten Filzring 3. Alkohol verdunstet dort und der Dampf sinkt zu Boden, wo er kondensiert. Die Konzentration des Alkoholdampfes in der Luft wird nach unten größer, die Temperatur hingegen fällt. Dadurch bildet sich über dem Boden eine rund 1 cm dicke Schicht aus, in der der Alkoholdampf übersättigt ist und eigentlich zu Nebeltröpfchen kondensieren müsste, wenn „Kondensationskeime“ vorhanden wären, an denen die Tröpfchenbildung beginnen könnte. Von dem radioaktiven Präparat 4 gehen Strahlen aus und bilden auf ihrem Weg Ionen. Jedes Ion kann als Kondensationskeim dienen, d.h., der Ursprung eines Nebeltröpfchens werden. Intensives Licht, das durch das Fenster 5 einfällt, wird an den Nebeltröpfchen gestreut. Blickt man durch das Fenster 6 gegen den geschwärzten Boden 1, so sieht man das Streulicht und somit die Bahnen der energiereichen Teilchen als Ketten von Nebeltröpfchen.

α -Teilchen haben eine geringe Reichweite (vgl. Bild 6.26), weil sie auf ihrem Weg in dichter Folge Ionen bilden (intensive Wechselwirkung mit der Materie). Entsprechend

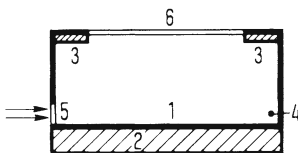


Bild 6.29 Nebelkammer

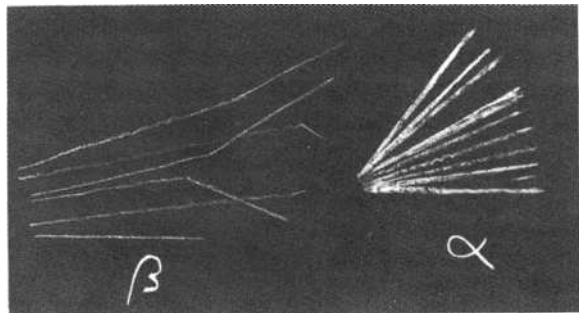


Bild 6.30 Nebelkammerspuren

sind ihre Nebelspuren nur wenige Zentimeter lang, aber kräftig. Die β -Teilchen haben eine viel geringere Wechselwirkung, d.h., sie bilden auf ihrem Weg seltener Ionen. Daher sind ihre Spuren zwar viel länger, aber dafür schwächer als α -Spuren. γ -Quanten hinterlassen wegen ihrer noch geringeren Wechselwirkung keine sichtbaren Linien in der Nebelkammer. Bild 6.30 zeigt einige α - und β -Spuren. Im Prinzip ähnlich arbeitet die

Blasenkammer. Der Gasdruck über einer Flüssigkeit wird kurzzeitig so weit verringert, dass die Flüssigkeit vorübergehend über ihrer Siedetemperatur ist. Dann bilden sich um alle Ionen entlang einer Teilchenbahn die ersten Dampfblasen des Siedens. Wegen der höheren Dichte der Flüssigkeit (z.B. flüssiger Wasserstoff 1 g/cm^3) werden Teilchen mit geringer Wechselwirkung besser sichtbar. Bei noch geringerer Wechselwirkung verwendet man

Funkenkammern (Bild 6.31). Diese bestehen aus einem Satz paralleler Platten oder Drähte – z.B. aus Aluminium – mit Flächen bis zu mehreren Quadratmetern, die wechselweise an einer Hochspannung U liegen. Diese ist so gewählt, dass gerade kein selbständiger Funkenüberschlag stattfindet, außer dort, wo ein hindurchgehendes energiereiches Teilchen im Aluminium sekundäre Teilchen herausschießt, die ihrerseits in der Luft Ionen erzeugen. Die Kette von Funken entlang einer Teilchenbahn wird elektronisch und/oder fotografisch registriert.

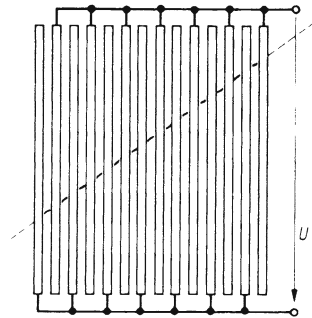


Bild 6.31 Funkenkammer

Kernspurplatten verwendet man meist für Teilchen der Höhenstrahlung. Auf Glasplatten sind sehr feinkörnige, bis zu 1 mm dicke fotografische Schichten aufgebracht. Energiereiche Teilchen, die diese Schichten durchdringen, bilden auf ihrem Weg an einzelnen Silberbromidkörnern Ionen. Diese Körner können durch den Entwickler in Silberkörner umgewandelt werden. Unter dem Mikroskop sieht man dann die Spur als Kette von schwarzen Körnern oder als feine schwarze Linie.

6.2.2.2 Detektoren

Wenn sehr viele energiereiche Teilchen registriert werden müssen und wenn ihre Zahl genau festgestellt werden soll, sind die Verfahren des vorigen Abschnittes ungeeignet oder doch sehr umständlich.

Dann verwendet man vielmehr die folgenden Detektoren:

Ionisationskammern sind abgeschlossene Räume mit bis zu mehreren Litern Inhalt. Energiereiche Strahlung erzeugt in ihren Gasfüllungen Ionen. An zwei gegenüberliegenden Elektroden liegt eine Spannung, die die Ionen absaugt. Der dadurch fließende (sehr schwache) Strom dient als Maß für die Intensität der Strahlung. Im Gegensatz dazu erlauben

Geiger-Müller-Zählrohre¹⁾, einzelne α -, β - oder γ -Teilchen zu registrieren. Die Zählrohre sind z.B. zylinderförmig (Bild 6.32). Der Zylindermantel liegt

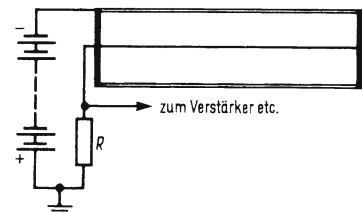


Bild 6.32 Zählrohr

¹⁾ Hans Geiger (1882 bis 1945); Walter M. Müller (1905 bis 1979).

am negativen, ein sog. Zähl draht in der Zylinderachse über einen Hochohmwiderstand R am positiven Pol einer Hochspannungsquelle. Die Stirnflächen isolieren die beiden Elektroden voneinander und schließen den Gasraum ab. Die Füllung besteht z.B. aus Luft, Methan oder Argon von einigen hPa bis zu Atmosphärendruck und eventuell einem Zusatz von einigen Prozent eines „Löschgases“, z.B. Alkoholdampf oder Methan. Die bei der „Primärionisation“ durch die Kernstrahlung erzeugten Elektronen werden zum Draht beschleunigt; in dessen Nähe ist die Feldstärke so hoch, dass Stoßionisation einsetzt (vgl. Abschn. 3.2.6.2). Beim Betrieb im

Proportionalbereich (Spannungen von einigen hundert Volt je nach Zählrohrbauart) sinkt durch den einsetzenden Stromstoß wegen des Widerstandes R die Spannung so weit ab, dass die Entladung wieder unterbrochen wird. Jedes durchgehende Teilchen oder Quant erzeugt eine bestimmte Menge von Ionen und Elektronen. Dadurch entsteht jeweils eine Entladung, ein Stromstoß und ein Spannungsimpuls am Widerstand R , der verstärkt und in einem Zählgerät registriert werden kann. Die Höhe des Spannungsimpulses hängt grob von der Zahl der primär gebildeten Ionen ab. Man kann daher zwischen verschiedenen energiereichen Strahlungsteilchen unterscheiden („diskriminieren“). Erhöht man die Spannung am Zählrohr, so kommt man in den sog.

Auslösebereich. Dort setzt nach jeder Primärionisation eine kräftigere selbständige Entladung ein, die erst nach etwa 10^{-4} s durch den Spannungsabfall am Vorwiderstand oder durch das Löschgas oder durch elektronische Steuerung wieder unterbrochen wird. Da die entstehenden Spannungsimpulse wesentlich kräftiger sind als im Proportionalbereich, betreibt man Zählrohre meist im Auslösebereich. Allerdings sind dann alle Impulse gleich hoch, unabhängig von der Energie und Art der primär wirksamen Teilchen. Während einer Entladung und danach, bis das Zählrohr wieder aufgeladen ist, ist es unempfindlich für ein neues durchgehendes Teilchen. Diese sog. Totzeit kann bis auf etwa 10^{-6} s vermindert werden.

Zählrohre eignen sich zum Nachweis von γ -Quanten, bei entsprechend dünnen Wänden (evtl. mit dünnen „Fenstern“) auch für β -Teilchen. Zum Zählen von α -Teilchen muss entweder ein extrem dünnes Fenster vorhanden sein, oder der radioaktive Strahler muss ins Innere des Zählrohres gebracht werden.

Gleichzeitige Bahnspur- und Teilchenanalyse erlauben

Proportionalkammern, wie sie bei großen Teilchenbeschleunigern (s. Abschn. 6.2.3.3) verwendet werden. Es sind dies kubikmetergroße Kammern, gefüllt mit Zählgas wie ein Geiger-Müller-Zählrohr, jedoch nicht mit einem, sondern mit Zigtausenden von Zähldrähten, die ein dreidimensionales Raster bilden. Energiereiche Teilchen erzeugen auf ihrer eventuell durch ein Magnetfeld gekrümmten Bahn durch eine solche Kammer an einer ganzen Reihe von Zähldrähten Spannungsimpulse. Diese werden im angeschlossenen Großrechner nach Höhe und Herkunft analysiert. So kann auf die Bahn und die Eigenschaften des primären energiereichen Teilchens geschlossen werden.

Szintillationszähler. Der eigentliche Detektor beim Szintillationszähler ist ein fester, flüssiger oder gasförmiger Leuchtstoff, der Szintillator, d.h. ein Stoff, der bei der Absorption oder beim Durchgang eines energiereichen Teilchens „aufblitzt“, weil ein Teil der Energie in Form von Photonen des sichtbaren oder ultravioletten Lichtes wieder ausgesendet wird. Diese Lichtblitze sind nur 10^{-8} ... 10^{-6} s lang (je nach Leuchtstoff); sie treffen auf

die Photokathode eines Sekundärelektronenvervielfachers (vgl. Abschn. 3.2.6.1), an dessen Ausgang dann ein Spannungsimpuls von etwa der gleichen Dauer auftritt. Die Höhe dieses Impulses ist der Zahl der Photonen proportional. In der nachgeschalteten Verstärker- und Zählleinrichtung können die Impulse nach ihrer Höhe sortiert und getrennt gezählt werden. So erhält man ein Energiespektrum der untersuchten Strahlung. Durch Wahl des Szintillators kann die Anordnung für α -Strahlen (z.B. ZnS-Schicht), für β -Strahlung (z.B. Kunststoffszintillator) oder für γ -Strahlen (z.B. NaJ/Tl-Einkristall) und damit bei bestimmter Anordnung, bestimmtem Leuchtstoff und bestimmter Strahlungsart (α , β oder γ) besonders geeignet gemacht werden.

Um gleichzeitig auch Bahnsuren aufnehmen und analysieren zu können, bildet man szintillierende Mikrolichtleiter. Das sind Lichtfaserbündel (vgl. „Faseroptik“ in Abschn. 4.1.2.1) aus vielen (z.B. 25 000) Glasfasern, die jedoch nicht massiv sind, sondern aus Kapillarröhrchen, die mit einem flüssigen Szintillator gefüllt sind, bestehen.

Sperrschichtzähler sind Halbleiterdetektoren; zu ihrer physikalischen Wirkungsweise s. Abschn. 7.4.3.3. Hier im Zusammenhang ist zu erwähnen, dass lineares, flächenhaftes oder auch räumliches Aneinanderreihen sehr vieler solcher Sperrschichtzähler wieder die Möglichkeit ergibt, einzelne Teilchen nicht nur zu zählen, sondern auch ihre Bahn und Energie zu berechnen wie oben bei den Proportionalkammern und den Bündeln aus „szintillierenden Mikrolichtleitern“.

6.2.3 Aufbau und Umwandlung von Kernen

Der Kern des Wasserstoffatoms ($Z = 1$) hat eine positive Elementarladung und praktisch die ganze Masse des Wasserstoffatoms; er lässt sich durch elektrische und magnetische Felder auf Energien von vielen MeV beschleunigen und auf andere Kerne schießen. Dabei verändert er sich (meist) nicht. Daher nennt man den Wasserstoffkern ein Elementarteilchen und gibt ihm einen eigenen Namen:

Proton; Symbol p; Masse $m_p = 1,673 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 1,0073 \text{ u}^1$; elektrische Ladung $Q_p = + 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ As}$.

Von den anderen Atomkernen weiß man – z.B. durch die Tatsachen der Radioaktivität –, dass die Kerne zusammengesetzt sind. Sie haben jeweils Z positive Elementarladungen, wobei Z als „Ordnungszahl“ ganzzahlig ist.

Das legt den Gedanken nahe, dass sie jeweils Z Protonen enthalten. Ihre Masse ist jedoch fast immer $> 2 Z m_p$. Daher postulierte Heisenberg noch eine weitere Sorte von Elementarteilchen, die Neutronen mit ungefähr der gleichen Masse wie die Protonen, aber ohne elektrische Ladung. Als selbständige Teilchen erzeugt und untersucht wurden sie erstmals von Chadwick²⁾ (s. Abschn. 6.2.3.3).

Neutron; Symbol n; Masse $m_n = 1,675 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 1,0087 \text{ u}^1$; elektrische Ladung 0

¹⁾ u = atomare Masseneinheit, vgl. Anhang.

²⁾ Sir James Chadwick (1891 bis 1974), Nobelpreis 1935.

Wenn alle Atomkerne nach dem Baukastenprinzip aus diesen beiden sog. Nukleonen zusammengesetzt sind, müssen alle relativen Atommassen ganzzahlige Vielfache der relativen Atommasse des Wasserstoffs sein. Das ist aber für viele Elemente nicht einmal annähernd der Fall. Dieser Widerspruch lässt sich folgendermaßen erklären.

6.2.3.1 Isotope

Man muss sich vorstellen, dass zwar alle Kerne eines Elementes, also einer Ordnungszahl, Z Protonen enthalten (damit sind auch Z Elektronen in der Hülle), aber verschieden viele Neutronen.

Alle Kerne mit der Protonenzahl Z und der Neutronenzahl N bilden ein Isotop des Elementes mit der Ordnungszahl Z . Ein Isotop hat eine ganzzahlige relative Atommasse A_r ¹⁾. Man kennzeichnet eine Atomkernsorte, kurz ein Nuklid, indem man an das chemische Symbol links unten Z und links oben $Z + N = A$ anschreibt, z.B. ${}^1_1\text{H}$ oder ${}^{12}_6\text{C}$. A heißt Nukleonenzahl und ist die nächste ganze Zahl bei der relativen Atommasse A_r .

Die nicht ganzzahligen relativen Atommassen der natürlichen Elemente kommen nach dieser Modellvorstellung dadurch zustande, dass ein Element ein Gemisch aus verschiedenen Isotopen ist. Der experimentelle Beweis für die Richtigkeit dieser Vorstellung gelingt u.a. mit dem Massenspektrometer:

Massenspektrometer. Bild 6.33 zeigt beispielsweise ein Massenspektrometer nach Aston²⁾. Das zu untersuchende Element befindet sich in gasförmigem Zustand in einem Entladungsrohr 1, wird dort ionisiert und seine positiven Ionen zur Kathode 2 hin beschleunigt. Die Ionen fliegen durch den Spalt (senkrecht zur Zeichenebene) in der Kathode als Kanalstrahl 3 (vgl. Abschn. 3.2.6.2) und werden in einem elektrischen Feld 4 (parallel zur Zeichenebene, senkrecht zum Strahl) und in einem Magnetfeld 5 (senkrecht zur Zeichenebene und zum Strahl) durch die Lorentzkraft abgelenkt (vgl. Abschn. 3.3.3.2). Die Ablenkung hängt von der Ladung, der Masse und der Geschwindigkeit der Ionen und den Feldstärken ab. Durch geeignete Wahl der Ionisierungsbedingungen und der Felder 4 und 5 kann man erreichen (wie hier nicht im Einzelnen gezeigt werden kann), dass alle Ionen gleicher Masse in einer bestimmten Ebene 6 in einer Linie parallel zum Kathodenspalt fokussiert werden. Bringt man dorthin einen geeigneten Empfänger für die Ionen, so kann man ein „Spektrum“ im übertragenen Sinn aufnehmen: Der Ort in der Ebene 6 ist ein Maß für die Masse, die Intensität ein Maß für die Menge eines jeden Isotops im untersuchten Element.

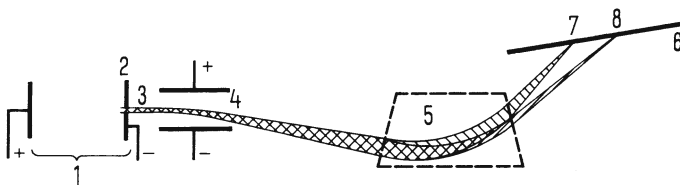


Bild 6.33 Massenspektrometer

¹⁾ Bis auf eine geringe Abweichung, s. im Abschn. 6.2.3.2 „Massendefekt“.

²⁾ Francis William Aston (1877 bis 1945); Nobelpreis 1922.

Es zeigt sich, dass fast alle natürlich vorkommenden Elemente Isotopengemische sind. So besteht z.B. natürlicher Wasserstoff zum größten Teil aus dem Isotop ${}^1_1\text{H}$, enthält jedoch 0,015% ${}^2_1\text{H}$ (schwerer Wasserstoff oder Deuterium ${}^2_1\text{D}$ genannt) sowie Spuren von ${}^3_1\text{H}$ (überschwerer Wasserstoff oder Tritium ${}^3_1\text{T}^{1)}$). Helium enthält außer dem normalen ${}^4_2\text{He}$ etwas ${}^3_2\text{He}$; Kohlenstoff außer ${}^{12}_6\text{C}$ Spuren von ${}^{13}_6\text{C}$ und ${}^{14}_6\text{C}^{1)}$; Chlor 75% ${}^{35}_{17}\text{Cl}$ und 25% ${}^{37}_{17}\text{Cl}$; Kalium ${}^{39}_{19}\text{K}$ und 0,01% ${}^{40}_{19}\text{K}^{1)}$; Uran 99,3% ${}^{238}_{92}\text{U}^{1)}$ und 0,7% ${}^{235}_{92}\text{U}^{1)}$; usw.

Auf diese Weise lassen sich Atommassen bis auf wenige Promille als Summe der Protonen- und Neutronenmassen errechnen. Die verbleibenden Abweichungen erklären sich durch die Bindungsenergie und den Massendefekt, von denen im nächsten Abschnitt die Rede ist.

6.2.3.2 Kernmodell

Die Teilchen des Atomkerns, die Nukleonen, haben zwar – verglichen mit Elektronen – rund 2000-fache Masse, aber verglichen mit makroskopischen Körpern sind sie doch so ungeheuer winzig, dass wir unsere anschaulichen Vorstellungen nur mit äußerster Vorsicht auf sie anwenden dürfen. Insbesondere ist wegen des Dualismus Welle–Korpuskel mit Welleneigenschaften zu rechnen, und es ist die Heisenbergsche Unbestimmtheitsrelation $\Delta p_x \Delta x \geq h$ beherrschendes Naturgesetz (vgl. Abschn. 5.3). Außerdem sind die Nukleonen, wenn sie einen Atomkern bilden, in dem beschränkten Raum dieses Kerns eingeschlossen, ähnlich wie die Elektronen im beschränkten Raum der Atomhülle. Daher sind auch ähnliche Erscheinungen zu erwarten: 1. die Nukleonen im Kern können nur bestimmte, diskrete Energien haben; 2. sie können nicht die Energie null haben; 3. sie können Potentialwälle durchtunneln. Dies sind bereits die wichtigsten Eigenschaften des Kernmodells.

Bindungsenergie. Die einzelnen Nukleonen im Kern müssen sich gegenseitig anziehen, damit der Kern zusammenhält. Diese Anziehungskräfte müssen bei den geringen Abständen der Nukleonen im Kern wesentlich stärker als elektrostatische Kräfte sein, denn sie überwiegen offensichtlich die elektrostatische Abstoßung zwischen den positiven Ladungen der Protonen. Andererseits nehmen diese Anziehungskräfte viel stärker mit dem Abstand ab als die elektrostatischen, denn schon in geringer Entfernung vom Kern überwiegen die Letzteren, d.h., positive Geschosse werden abgestoßen (vgl. Abschn. 6.1 Streuversuche).

Man nennt die starken Anziehungskräfte mit geringer Reichweite, die zwischen Nukleonen wirken, Kernkräfte. Die Arbeit, die im Mittel pro Nukleon geleistet werden muss, um einen Kern gegen die Kernkräfte in seine einzelnen Nukleonen zu zerlegen, heißt mittlere Kernbindungsenergie pro Nukleon W_k/A ; sie wird im Mittel pro Nukleon frei, wenn ein Kern nacheinander aus seinen Nukleonen aufgebaut wird.

Die Kernkräfte sind nicht so einfach zu beschreiben wie die Gravitationskraft, die elektrischen und die magnetischen Kräfte. Man stellt sich z.B. vor, dass die Nukleonen dadurch zusammenhalten, dass sie ständig sog. Mesonen austauschen. Das sind Teilchen mit Massen zwischen der Elektronenmasse und der Protonenmasse, mit positiver oder negativer Elementarladung oder auch ohne Ladung. Diese Mesonen treten auch frei auf, wenn Kerne durch sehr hohe Energien (Höhenstrahlung, Beschleuniger) zerstört werden.

¹⁾ Dieses Isotop ist instabil (radioaktiv).

Potentialtopf. Wird ein Proton (oder ein α -Teilchen) gegen die Kernkräfte von den übrigen Nukleonen seines Kerns entfernt, so nimmt seine potentielle Energie zunächst stark zu. Wegen des oben geschilderten Verlaufs der Kernkräfte und der Coulombschen Kräfte erreicht die potentielle Energie einen Maximalwert und nimmt bei weiter zunehmendem Abstand r wieder ab. In Bild 6.34a ist dieser Verlauf der potentiellen Energie über r nach zwei Seiten aufgezeichnet (vgl. auch Abschn. 1.4). Wir haben also hier einen Potentialtopf mit endlich hohen und endlich dicken Wänden, durchaus vergleichbar mit dem in Abschn. 6.1.2.4 beschriebenen. Der Durchmesser des Potentialtopfes entspricht ungefähr dem Kerndurchmesser. Ein Proton, das sich von außen dem Kern nähern will, muss zunächst den Potentialwall überwinden, d.h., es muss genügend kinetische Energie haben, um gegen die Abstoßung „anlaufen“ zu können. Dann allerdings „fällt“ es in den Potentialtopf, d.h., es wird an den Kern gebunden, wobei die Bindungsenergie frei wird.

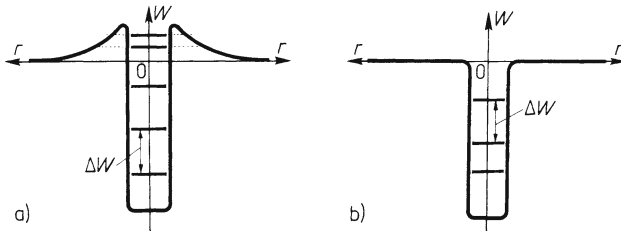


Bild 6.34 Potentialtopf nach Gamow¹⁾ a) für Protonen, b) für Neutronen

Für das Neutron ergibt sich der gleiche Potentialtopf (Bild 6.34b), jedoch ohne Potentialwall, da das Neutron keine elektrostatische Abstoßung erfährt. Daher kann es sich ohne kinetische Energie einem Kern so weit nähern, dass es von den Kernkräften angezogen und gebunden wird.

Die eingangs schon erwähnte Nullpunktsenergie lässt sich mit Gl. (6.20) $W = n^2 h^2 / (8 m l^2)$ abschätzen, indem man $n = 1$; $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ Js; für m die Nukleonenmasse $1,7 \cdot 10^{-27}$ kg und für l den Kerndurchmesser (z.B. von Eisen $l = 10^{-14}$ m) einsetzt. Das ergibt einen Wert, der um mehrere Zehnerpotenzen über den Energiebeträgen liegt, wie sie uns von der Atomhülle her bekannt sind, nämlich $W \approx 2$ MeV. Da es über diesem Grundniveau noch weitere Energieniveaus geben wird, muss die Höhe des Potentialwalls über dem Grundniveau die Größenordnung 10 MeV haben. Dies wird durch alle experimentellen Daten bestätigt. Die eingangs erwähnten

Energieniveaus (horizontale Striche in Bild 6.34) lassen sich natürlich mit Gl. (6.20) nicht berechnen, denn diese Gleichung wurde ja am äußerst vereinfachten Modell des eindimensionalen Potentialtopfes mit unendlich hohen Wänden gewonnen und war ja auch schon für die reale Atomhülle ungeeignet. Wir entnehmen dem wellenmechanischen Modell nur die allgemeine Aussage, dass es für die Nukleonen bestimmte, diskrete Energieniveaus geben muss. Ihre Abstände ΔW ergeben sich – analog zur Atomhülle – aus spektroskopischen Experimenten. Fällt nämlich ein Nukleon von einem dieser Energieniveaus auf ein tieferes, so wird die Energiedifferenz ΔW als elektromagnetische Welle mit der Frequenz $\Delta W/h$ (γ -Strahlung) ausgestrahlt.

Zum Heben eines Nukleons auf ein höheres Energieniveau kann ΔW entweder durch Absorption einer passenden Welle oder auf andere Weise aufgenommen werden. Die Photonen dieser Wellen sind die γ -Quanten (vgl. Abschn. 6.2.1).

¹⁾ George Gamow (1904 bis 1968).

Mößbauereffekt.¹⁾ Die Energie mancher Niveaus in Kernen ist sehr genau bestimmt. Dann kann das von einem Kern bei einem bestimmten Energiesprung ausgesandte γ -Quant nur dann in einem zweiten, gleichen Kern den umgekehrten Energiesprung erzeugen, d.h. absorbiert werden (vgl. Abschn. 6.1.1.2 Resonanzfluoreszenz), wenn es die ganze Energiedifferenz ΔW mitbekommen und unterwegs nichts davon verloren hat. Das ist normalerweise nicht der Fall. Der Energie ΔW_γ des γ -Quants entspricht nach der Relativitätstheorie (Abschn. 8) eine Masse $m_\gamma = \Delta W_\gamma / c_0^2$. Diese ist nicht vernachlässigbar klein gegen die Kernmasse m_K . Daher erfährt der Kern beim Ausstoßen des γ -Quants einen Rückschlag und beim Absorbieren einen Stoß, hat dann eine Geschwindigkeit v_K und eine Energie $(1/2) m_K v_K^2$.

Um diesen Betrag ist dann die γ -Energie ΔW_γ kleiner als die Energieniveaudifferenz ΔW ; also „passt“ das γ -Quant nicht mehr in das Energieniveauschema des absorbierenden Kerns. Nur wenn die Kerne (mit ihren Atomen) in das Gitter eines Festkörpers eingebaut sind, sind bei einem Teil der Kerne der Rückschlag und der Stoß vernachlässigbar. Der Anteil dieser rückschlagfrei abstrahlenden und stoßfrei absorbierenden Kerne hängt von der Kernart, Gitterstruktur und Temperatur ab. Daher muss man viele Strahler und Absorber kühlen (z.B. auf 4 K), damit die γ -Strahlung durch den Absorber besonders stark geschwächt wird, d.h. damit Resonanzfluoreszenz (vgl. Abschn. 6.1.1.2) stattfindet²⁾. Schon eine Relativgeschwindigkeit zwischen Strahler und Absorber von 10^{-6} m/s verändert durch Dopplereffekt die Absorption merklich. Auch eine große Zahl von anderen, relativ schwachen Einflüssen macht sich so bemerkbar und kann durch eine Relativgeschwindigkeit messbar kompensiert werden. Der Mößbauereffekt ist z. T. die empfindlichste Messmethode der Physik. Es lassen sich relative Unsicherheiten von nur 10^{-15} erreichen.

α -Zerfall. Wie schon in Abschn. 6.2.1.1 geschildert, geben eine Reihe von Kernen spontan, ohne Energiezufuhr von außen, Nukleonen – meist die Kombination α -Teilchen – mit kinetischen Energien um 1 MeV ab, nachdem sie vorher Jahrtausende bis Jahrmilliarden stabil waren. Schon 1911 war Geiger und Nuttall³⁾ aufgefallen, dass die kinetische Energie der α -Teilchen, die ein α -aktives Nuklid ausstrahlt, umso höher ist, je kürzer die Halbwertszeit des Nuklids ist. Das lässt sich wellenmechanisch folgendermaßen erklären: Der Potentialtopf, der in Bild 6.34a in Abschn. 6.1.2.4 dargestellt ist, hat endlich dicke Wände wie der in Bild 6.14 gestrichelt gezeichnete. Und diesen können, wie dort gezeigt wird, die betreffenden Teilchen durchtunneln. Die Wahrscheinlichkeit D hierfür nimmt nach Gl. (6.22) exponentiell mit abnehmender Wanddicke d zu. Die Wanddicke nimmt in Bild 6.34a nach oben ab. Also sind α -strahlende Nuklide solche, bei denen ein α -Teilchen oder seine Komponenten ein relativ hohes Energieniveau im Kern besetzen. Dann gelangen sie aber auch energetisch hoch auf die Außenseite des Potentialwalls und erreichen beim „Herunterfallen“ hohe kinetische Energie, umso höhere, je weiter oben – und das heißt je wahrscheinlicher – sie den Wall durchtunnelt haben.

β -Zerfall. Im weiteren Sinn nennt man so alle spontanen Umwandlungen, bei denen sich die Ordnungszahl Z um $Z = \pm 1$ ändert, die Masse aber konstant bleibt. Hierzu gehört die in Abschn. 6.2.1.1 eingangs beschriebene Aussendung von Elektronen ($\Delta Z = +1$) sowie die von Positronen⁴⁾ (s. Abschn. 6.2.3.3) mit $\Delta Z = -1$. Ebenso gehört hierzu der sog. K-Einfang, bei dem sich ein Kern umwandelt, indem er ein Elektron aus seiner eigenen K-Schale einfängt ($\Delta Z = -1$) sowie der Zerfall der freien Neutronen in ein Proton und ein Elektron ($\Delta Z = +1$). Während nun die ausgestrahlten oder eingefangenen Elektronen oder Positronen

¹⁾ Rudolf L. Mößbauer, geb. 1929.

²⁾ Besonders geeignet ist die 14 keV- γ -, „Spektrallinie“ des ^{57}Fe , weil sie selbst sehr niedrige Energie hat, äußerst „scharf“ ist ($\pm 5 \cdot 10^{-9}$ eV) und die Resonanzfluoreszenz schon bei Zimmertemperatur auftritt.

³⁾ Joh-Mitchel Nuttall, 1890 bis 1958.

⁴⁾ Vgl. Abschn. 6.2.1.1, Absatz „Paarbildung“.

jeweils den Spin $L_e = \hbar/2$ haben, unterscheiden sich die Mutter- und Tochterkerne im Eigendrehimpuls gar nicht oder um $\Delta L = 1 \cdot \hbar$. Damit schien der Satz von der Erhaltung des Drehimpulses ungültig. Da dies äußerst unwahrscheinlich war, nahm W. Pauli an, dass bei jedem β -Zerfall ein weiteres Teilchen, ein sog. Neutrino (Symbol ν) ausgesendet wird. Es sollte keine Ladung, keine oder verschwindend kleine Ruhemasse, aber den Spin $\hbar/2$ haben. Dass es bis dahin nicht beobachtet worden war, musste außer von den genannten Eigenschaften noch von seiner äußerst schwachen Wechselwirkung (s. unten) mit Materie herrühren. Tatsächlich können Neutrinos heute in sehr aufwendigen Experimenten beobachtet und untersucht werden.

Die anfangs erwähnte Tatsache, dass die β -Teilchen eines Strahlers ein kontinuierliches Energiespektrum haben, lässt sich nun so erklären: Die Gesamtenergie, die bei dem betreffenden β -Zerfall frei wird, verteilt sich beliebig auf die beiden ausgesendeten Teilchen, das Elektron und das Neutrino.

Wechselwirkungen und Elementarteilchen

Im Rückblick auf die bisher behandelten Teile dieses Abschn. 6.2.3.2 können wir feststellen: Mit dem einfachen Potentialtopfmodell und den Grundprinzipien der Wellenmechanik lassen sich wesentliche Eigenschaften der Atomkerne, insbesondere die γ -Strahlung und der α -Zerfall, recht brauchbar erklären. Um dagegen den β -Zerfall zu verstehen, müssen wir das Modell wesentlich verfeinern. Dazu sollen zunächst die vier Arten von Kräften oder Wechselwirkungen, die in der gesamten Natur wirksam sind, zusammengestellt werden:

Die starke Wechselwirkung, von der wir bisher das Zusammenhalten der Atomkerne, die Kernbindung, beschrieben haben, ist nur über geringe Abstände der Größenordnung 10^{-15} m wirksam. Die Teilchen, die mit der starken Wechselwirkung aufeinander einwirken, werden Hadronen, alle anderen Leptonen genannt. Die Hadronen werden noch in zwei Untergruppen geteilt: Die schweren Baryonen – z.B. Proton und Neutron – mit halbzahligen Spin und die leichteren Mesonen mit ganzzahligen Spin. Man kann die Mesonen als die Quanten derjenigen Felder auffassen, die die starke Wechselwirkung vermitteln.

Die elektromagnetische Wechselwirkung (s. auch Abschn. 8.2.3) hat unendliche Reichweite und ist bei nuklearen Abständen um den Faktor 10^{-2} bis 10^{-3} schwächer als die starke. Sie wirkt zwischen elektrisch geladenen und mit einem magnetischen Moment ausgestatteten Teilchen (die aber auch der starken Wechselwirkung unterworfen sein können); zu ihnen gehören Elektron, Positron und Proton.

Die Wechselwirkungen in der Atomhülle und die Kräfte zwischen Atomhüllen, also alle chemischen Bindungskräfte, sind Beispiele elektromagnetischer Wechselwirkung. Demnach sind die wichtigsten in der Technik und in der belebten Natur auftretenden Kräfte elektromagnetisch. Die Quanten der elektromagnetischen Felder sind die Photonen.

Die schwache Wechselwirkung hat eine Reichweite $< 10^{-15}$ m und ist um den Faktor 10^{-14} schwächer als die starke. Sie ist zwischen allen Elementarteilchen, auch den Photonen wirksam, wird aber meist durch die elektromagnetische und die starke Wechselwirkung verdeckt. Sie ist verantwortlich für die β -Radioaktivität von Atomkernen und den Zerfall von freien Neutronen.

Die Gravitationswechselwirkung hat unendliche Reichweite und ist um den Faktor 10^{-40} schwächer als die starke. Alle Materie und Energie ist ihr unterworfen. Als Gravitations- oder Schwerkraft ist sie jedermann fühlbar; trotzdem ist sie die am wenigsten verstandene unter den Wechselwirkungen.

Vereinigung. Theoretisch kann man die starke, die elektromagnetische und die schwache Wechselwirkung auf die gleiche Weise beschreiben. Man deutet das so, dass diese drei Kräfte nur drei verschiedene Erscheinungsformen einer einzigen sind. Sollte es gelingen, auch noch die Gravitationskraft in der Form dieser vereinigten Kraft zu beschreiben, dann wäre das physikalische Weltbild um einen wichtigen Schritt vereinfacht.

Elementarteilchen nannte man diejenigen Bestandteile der Atome, die zuerst bekannt wurden: Elektron, Proton und Neutron. In der Namensgebung „Elementarteilchen“ drückt sich wieder – wie hundert Jahre vorher bei den „Atomen“ – die Hoffnung aus, die Welt sei leicht erklärbar, sie bestehe eben nur aus diesen drei Sorten von Teilchen. Diese Hoffnung hat sich nicht erfüllt. Man kennt inzwischen weit über 300 solcher Teilchen und nennt sie nur noch gewohnheitsmäßig „Elementarteilchen“. Die Beschreibung dieser Teilchen mit Hilfe völlig neuer Eigenschaften und die Beobachtung ihrer Abhängigkeiten untereinander bringt jedoch eine gewisse Ordnung in diese Vielfalt, und es ist möglich, die Teilchen in ein Schema zu ordnen, das sowohl die Eigenschaften als auch die Verknüpfungen untereinander abzulesen gestattet. Aufbau und Symmetrie des Schemas verlangen zwingend anzunehmen, dass es eine weitere Gruppe von nur wenigen, „elementaren Elementarteilchen“ gibt, aus denen viele andere nach einfachen Regeln zusammengesetzt sind. Sie bekommen den Namen Quark (nach einer Romanfigur des irischen Dichters James Joyce). Quarks selbst konnten bisher nicht beobachtet werden, aber die Entdeckung anderer Teilchen, deren Existenz und deren Eigenschaften nur mit dem Quark-Modell erklärt werden können, bewirkt, dass heute kein Fachmann mehr an der Existenz der Quarks zweifelt.

Man rechnet inzwischen mit 6 Quarks, in drei Zweiergruppen unterteilt, die willkürlich die Namen *up* (u) und *down* (d), *strange* (s) und *charm* (c) sowie *top* (t) und *bottom* (b) erhielten, diese Unterscheidungsmerkmale der Quarks werden völlig willkürlich ihr „Geschmack“ (engl.: *flavor*) genannt. Außerdem unterscheiden sie sich noch durch weitere Eigenschaften, die man wieder ziemlich willkürlich ihre „Farbe“ (engl. *colour*) nennt; man unterscheidet die Farben „blau“, „grün“ und „rot“. Aus diesen 6 Quarks und ihren 6 Antiteilchen denkt man sich die Hadronen zusammengesetzt. So besteht z.B. ein Proton aus zwei *up*- und einem *down*-Quark, ein Neutron aus einem *up*- und zwei *down*-Quarks. Hinzu kommen noch 6 weitere Teilchen (und ihre Antiteilchen), die nach bisherigen Erkenntnissen nicht zusammengesetzt sind, nämlich die Leptonen Elektronen (e) und Elektronenneutrino (ν_e), Myon und Myonneutrino (ν_μ) sowie Tauon (τ) und Tauonneutrino (ν_τ).

In Tafel 6.35 auf Seite 560 sind diese Teilchen – zusätzlich gegliedert nach ihrer Ladung und nach ihrem Spin – aufgelistet. Man beachte darin die „Vektorbosonen“ W^+ ; Z^0 und W^- : Ihre Existenz und ihre Eigenschaften werden durch das hier angedeutete Modell-Schema – das sog. Standardmodell – vorausgesagt; ihr spektakulärer Nachweis 1983 ist bis heute das wichtigste Argument für die Brauchbarkeit des „Standardmodells“. Allerdings gibt es bereits eine Reihe von Verbesserungsversuchen zum Standardmodell, deren selbst nur andeutungsweise Beschreibung aber hier zu weit führen würde.

Tafel 6.35 Die Teilchen des „Standardmodells“ Zahlen in Klammern: Ruhemasse in GeV. Die normale irdische Materie ist aus den 4 Teilchen u, ν_e , d und e („1. Generation“) aufgebaut.

	Elementarteilchen Fermionen, d.h. Spin ist $\frac{1}{2}$ -zahliges Vielfaches von \hbar			Kräftevermittelnde Teilchen Bosonen, d.h. Spin ist ganzzahliges Vielfaches von \hbar			
+1				W ⁺ Positives Vektorboson (0,081)			
+ $\frac{2}{3}$	Quarks in den „Farben“ rot grün blau	u <i>up</i> (0,31)	c <i>charm</i> (1,5)	t <i>top</i> (190?)			
+ $\frac{1}{3}$							
0	Leptonen	ν_e Elektron- neutrino (≈ 0)	ν_μ Myon- neutrino (≈ 0)	ν_τ Tauon- neutrino (≈ 0)	Z ⁰ Neutrales Vektorboson (0,093)	γ Photon (0)	g Gluon (0)
- $\frac{1}{3}$	Quarks in den „Farben“ rot grün blau	d <i>down</i> (0,31)	s <i>strange</i> (0,5)	b <i>bottom</i> (5?)			
- $\frac{2}{3}$							
-1	Leptonen	e Elektron ($5 \cdot 10^{-4}$)	μ Myon (0,1)	τ Tauon (1,8)	W ⁻ Negatives Vektorboson (0,081)		
	sogenannte	1. 2. 3. Generation			starke Kraft	vermitteln die elektromagn. Kraft	schwache Kraft

Massendefekt

Nach der Relativitätstheorie (Abschn. 8) sind Energie und Masse einander proportional; es gilt die Einsteinsche Gleichung

$$W = mc_0^2 \quad (c_0 = \text{Vakuumlichtgeschwindigkeit}).$$

Wenn also beim Zusammenbau von Nukleonen zu einem Kern Bindungsenergie abgegeben wird, muss der fertige Kern eine geringere Masse haben als die Summe der Nukleonenmassen. Man nennt dies den Massendefekt Δm . Er erklärt die (geringfügigen) Abweichungen der relativen Atommassen der Nuklide von ganzzahligen Werten und ermöglicht die Berechnung der Bindungsenergie

$$W_k = \Delta m c_0^2$$

In Bild 6.36 ist die Bindungsenergie pro Nukleon in Abhängigkeit von der relativen Atommasse (= Nukleonenzahl) aufgezeichnet, wie sie sich aus den Massendefekten ergibt.

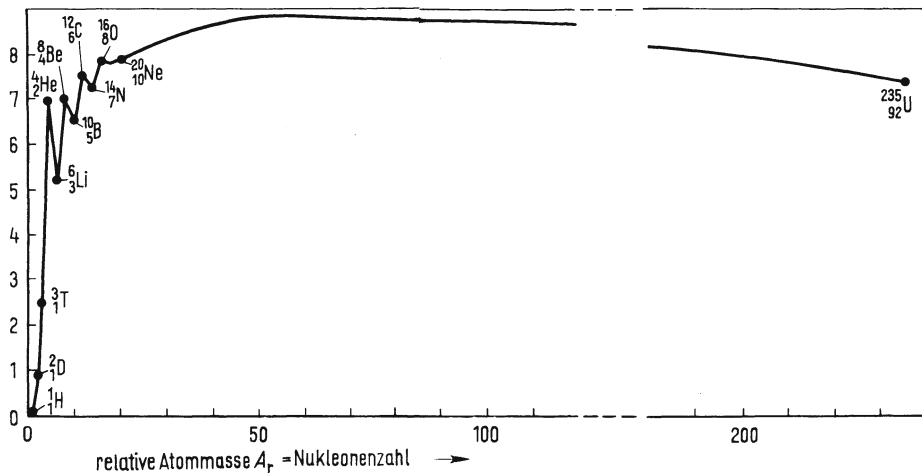


Bild 6.36 Bindungsenergie je Nukleon als Funktion der Nukleonenzahl

Demnach wird also beim Zusammenbau eines Protons und eines Neutrons zu einem Deuteriumkern 1 MeV pro Nukleon, insgesamt 2 MeV, frei. Der Aufbau eines Tritiumkernes liefert 7 MeV, der eines Heliumkernes – des besonders stabilen α -Teilchens – 28,3 MeV usw. Die Kurve nähert sich nach einigen Schwankungen einem flachen Maximum und sinkt bei den schweren Kernen wieder etwas ab. Man kann also sowohl durch den Zusammenbau (Fusion) von leichten Kernen (z.B. ${}^2_1\text{D}$) zu mittelschweren Energie gewinnen, als auch durch die Spaltung (Fission) sehr schwerer Kerne (z.B. ${}^{235}_{92}\text{U}$) in mittelschwere Bruchstücke. Um beides genauer erklären zu können, muss zunächst noch einiges über Kernreaktionen gesagt werden.

6.2.3.3 Kernreaktionen

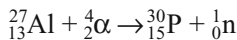
Grundsätzlich sind die spontan ablaufenden Umwandlungen der Kerne beim natürlichen radioaktiven Zerfall (Abschn. 6.2.1.2) Kernreaktionen. Daneben gibt es eine große Zahl von Kernreaktionen, die von außen eingeleitet werden müssen. Da dies meist in geplanten Experimenten geschieht, nennt man sie künstliche Kernumwandlungen, -prozesse oder -reaktionen. Zur Einleitung der Reaktionen dienen als „Geschosse“ energiereiche, meist schwere Teilchen wie z.B. α -Teilchen, Protonen usw.

Positiv geladene „Geschosse“ müssen genügend kinetische Energie haben, um gegen die positive Ladung der Kerne anlaufen zu können. Ihre restliche kinetische Energie und die frei werdende Bindungsenergie machen den Kern instabil und werden nach kurzer Zeit meist mit einem anderen Teilchen abgegeben. So beschoss z.B. Rutherford 1919 die Luft in einer Nebelkammer mit α -Teilchen eines radioaktiven Präparats. Wegen der Kleinheit der Geschosse und Kerne im Verhältnis zu ihrem Abstand (etwa 1:10⁶) trifft dabei sehr selten ein α -Teilchen, z.B. einen Stickstoffkern. Dieser sendet daraufhin ein Proton aus, wird also zu einem Sauerstoffkern nach der Gleichung



Das α -Teilchen, das Proton und der durch den Rückstoß ebenfalls wegfliegende neue Sauerstoffkern zeichnen dabei Spuren in der Nebelkammer, durch die sie identifiziert werden können. Dieses war die erste jemals beobachtete künstliche Kernreaktion.

Bei der Bestrahlung von Aluminium mit α -Teilchen tritt folgende Reaktion auf:



Hierbei treten Neutronen ${}_0^1\text{n}$ frei auf (Chadwick 1932). Da sie nicht geladen sind, bilden sie auf ihrem Weg keine Ionen und sind daher mit den oben beschriebenen Methoden nicht nachweisbar. Nur durch den Rückstoß des Kerns, aus dem sie stammen, oder wenn sie durch elastischen Stoß z.B. einen Wasserstoffkern beschleunigen, oder auch, wenn sie eine Kernreaktion einleiten (s. unten), machen sie sich bemerkbar. Der in der obigen Reaktion entstehende Phosphorkern ${}_{15}^{30}\text{P}$ ist – wie die meisten Kernreaktionsprodukte – instabil, d.h., er zerfällt nach einiger Zeit radioaktiv („Künstliche Radioaktivität“). Der ${}_{15}^{30}\text{P}$ hat die gleiche Nukleonenzahl wie der stabile Siliciumkern ${}_{14}^{30}\text{Si}$, aber eine positive Ladung mehr. Daher sendet er bei seinem „Zerfall“ ein Positron aus (vgl. Abschn. 6.2.1.1). Diese Zerfallsart tritt bei Radionukliden, die in der Natur vorkommen, nicht auf.

Höhenstrahlung. Außer den α - und γ -Teilchen aus radioaktiven Zerfällen stehen von Natur aus zur Einleitung von Kernprozessen noch die Teilchen der Höhen- oder kosmischen Strahlung zur Verfügung. Das sind z.B. Protonen mit Energien bis zu 10^{20} eV. Die Kerne der oberen Luftschichten zerplatzen in viele Bruchstücke, wenn sie von diesen Protonen getroffen werden. Die Bruchstücke und Energiequanten lösen ihrerseits wieder ähnliche Sekundärprozesse aus usw., sodass die primäre Energie eines Protons auf immer mehr Teilchen verteilt wird. Die Untersuchung dieser hochenergetischen Reaktionen – z.B. in Kernspurplatten, die in großer Höhe der Strahlung ausgesetzt werden – liefert sehr wichtige Erkenntnisse über den inneren Aufbau der Kerne und der Nukleonen. Der Nachteil bei Experimenten mit der Höhenstrahlung besteht darin, dass sie gewöhnlich nur in großer Höhe durchgeführt werden können und die Höhenstrahlung nur eine geringe Intensität hat. Vielseitigere Versuchsbedingungen bieten

Teilchenbeschleuniger. Das sind Anordnungen elektrischer und magnetischer Felder, durch die alle geladenen Teilchen – hauptsächlich Elektronen, Protonen, Deuterium- und Heliumkerne, aber auch schwere Ionen – auf sehr hohe Energien gebracht werden, um als Geschosse zur Untersuchung von Kernen und Elementarteilchen zu dienen. Man unterscheidet grob zwischen Linear- und Kreisbeschleunigern. Bei den Ersteren sind die statischen Linearbeschleuniger einfach Vakuumgefäße mit Elektroden, zwischen denen die Spannung U geladene Teilchen mit der Ladung Q auf die Energie $W = Q U$ oder auf die Geschwindigkeit $v = \sqrt{2W/m}$ beschleunigt. Da hierbei wegen der Isolierungsprobleme maximal einige MeV erreicht werden können, muss man für höhere Energien das gleiche elektrische Feld mehrmals wirken lassen. Das kann entweder auf Kreisbahnen geschehen (s. unten) oder in Hochfrequenzlinearbeschleunigern. Bild 6.37 zeigt ein Beispiel, bei dem das Vakuumrohr, in dem die Teilchen beschleunigt werden sollen, eine Reihe von metallischen Hohlzylindern enthält. Diese sind abwechselnd an die beiden Pole eines

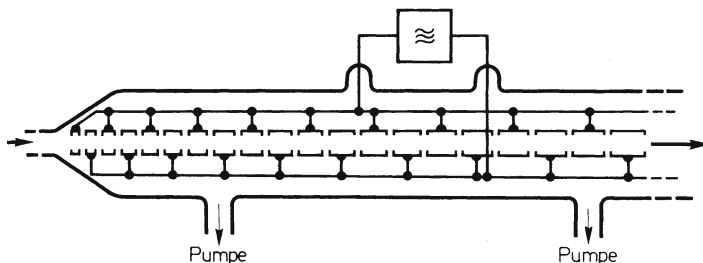


Bild 6.37 Teilquerschnitt durch einen Hochfrequenzlinearbeschleuniger für Ionen

Hochfrequenzgenerators mit der Frequenz $f = 1/T$ angeschlossen. Zwischen je zwei Zylindern herrscht also ein hochfrequentes elektrisches Feld. Wird ein Teilchenpaket oder -impuls im richtigen Augenblick am linken Ende mit der Geschwindigkeit v_0 von einem einfacheren Vorbeschleuniger eingeschossen, so wird es vom ersten Feld auf v_1 beschleunigt; ist die Strecke bis zum nächsten Feld, also die Länge des zweiten Zylinders $l_2 = v_1 T$, dann trifft das Teilchenpaket zwischen 2. und 3. Zylinder gerade wieder ein beschleunigendes Feld an und wird auf v_3 beschleunigt usw. Die Zylinder müssen natürlich nach rechts immer länger werden¹⁾. Die Teilchenpakete werden mit Wiederholfrequenzen von 50 bis 100 Hz eingeschossen, die verwendeten Hochfrequenzen reichen bis zu einigen GHz. Die höchste erreichbare Energie war im inzwischen stillgelegten, 3 km langen Linearbeschleuniger (SLC) in Stanford, Calif. USA 40 GeV. Es liegen detaillierte Pläne für einen „TeV-Energy Superconducting Linear Accelerator (TESLA)“ mit 33 km Länge vor, der Elektronen und Positronen auf 500 GeV (später auf 800 GeV) beschleunigen kann.

Von den Kreisbeschleunigern sind in Abschn. 3.3.3.3 das Zyklotron und das Betatron beschrieben. Für die höchsten Teilchenenergien werden heute Synchrotrons benützt. Bei diesen bildet das Vakuumgefäß, in dem die Teilchen beschleunigt werden, einen Ring (Querschnitte 1 in Bild 6.38). Die Teilchen werden durch die Felder von Elektromagneten 2 auf der Kreisbahn gehalten und fokussiert, durch elektrische Felder, ähnlich wie bei Linearbeschleunigern, beschleunigt.

Die Hadron-Elektron-Ring-Anlage (HERA) beim Deutschen Elektronen Synchrotron (DESY) in Hamburg z.B. beschleunigt in einem 6336 m langen Ring Elektronen auf 27,5 GeV und Protonen auf 920 GeV in entgegengesetzter Richtung. Beide Teilchenarten zirkulieren etwa 47 000 mal pro Sekunde. An zwei Punkten auf der Kreisbahn kreuzen sich die beiden Strahlen, wobei Tausende Protonen und Elektronen mit sehr hoher Energie kollidieren.

Der Steigerung der erreichbaren Endenergie sind dadurch Grenzen gesetzt, dass die geladenen Teilchen sich auf Kreisbahnen, also beschleunigt, bewegen und deshalb Energie als elektromagnetische Wellen (sog. Synchrotronstrahlung) abgeben (s. Abschn. 3.3.3.2 und 3.3.6).

Wirkungsquerschnitt. Auch genügend energiereiche α -Teilchen oder Protonen können nur dann eine Kernreaktion auslösen, wenn sie fast zentral auf einen Kern zufliegen, weil sie andernfalls durch die elektrostatische Abstoßung seitlich abgelenkt, gestreut werden. Man drückt das durch Angabe eines wirksamen Querschnittes der Kerne aus. Dieser sog. Wirkungsquerschnitt ist folgendermaßen definiert: Um jeden Kern denkt man sich ein bestimmtes Volumen V ; gelangt ein Geschoss in dieses Volumen, so kommt es zu einer „Wirkung“, z.B. zu einem Einfang des Geschosses in den Kern, oder zu einer Ablenkung (Streuung). Den Querschnitt dieses Volumens nennt man den Wirkungsquerschnitt σ .

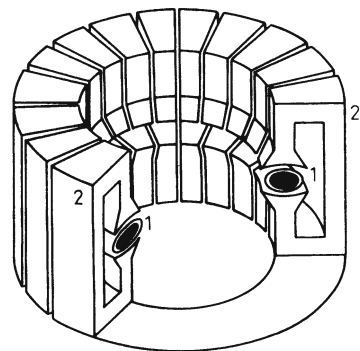


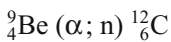
Bild 6.38 Schema eines Synchrotrons (die elektrischen Felder zur Bahnbeschleunigung sind nicht eingezeichnet)

¹⁾ Diese Längenzunahme wird allerdings umso kleiner, je näher die Teilchengeschwindigkeit v der Vakuumlichtgeschwindigkeit kommt, denn dann besteht der Energiegewinn immer weniger aus Geschwindigkeitszunahme und immer mehr aus relativistischer Massenzunahme (s. Abschn. 8).

Die international übliche Einheit dafür ist 1 barn¹⁾ = 10⁻²⁸ m². Der Wirkungsquerschnitt hängt sowohl von der Art des Kerns als auch von der Art und der Energie des Geschosses ab. Außerdem unterscheidet man zwischen verschiedenen Wirkungsquerschnitten, je nachdem welche „Wirkung“ untersucht wird; so ist z.B. der Streuquerschnitt aller Kerne gegenüber positiv geladenen Teilchen immer größer als der Einfangquerschnitt (Letzterer größenordnungsmäßig um 1 barn).

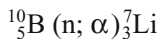
Ungeladene Geschosse. Im Gegensatz zu geladenen Teilchen werden die ungeladenen Neutronen durch die elektrischen Kernfelder nicht abgestoßen. Daher haben die Kerne häufig sehr große Neutroneneinfangquerschnitte (bis zu einigen 10⁶ barn).

Als Neutronenquellen dienen z.B. Gemische aus einem α -Strahler (z.B. Radium) und aus Beryllium; dabei werden schnelle Neutronen nach folgender Gleichung ausgesandt



Die gleichzeitig auftretende α - und γ -Strahlung lässt sich abschirmen; die Neutronen durchdringen das Abschirmmaterial ohne weiteres.

Mit Hilfe der Neutronen lässt sich eine große Zahl von Kernreaktionen einleiten. Eine der bekanntesten ist die mit Bor, da dieses einen besonders großen Neutroneneinfangquerschnitt hat, und weil als Folge α -Teilchen auftreten:



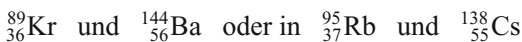
Ein Zählrohr, innen mit einer Borschicht ausgekleidet, wird so für Neutronen empfindlich.

6.2.4 Anwendung der Kernenergie

Die Bindungsenergie von Molekülen liegt in der Größenordnung von 10⁻¹⁹J (1eV= 1,6·10⁻¹⁹J). Beim Umsatz einer makroskopischen Menge, z.B. von einem Mol, werden also größenordnungsmäßig 6 · 10²³ · 10⁻¹⁹ J = 6 · 10⁴ J umgesetzt. Die Bindungsenergien von Kernen sind rund 10⁷ mal größer! Bei der Umsetzung entsprechender Mengen muss demnach auch 10⁷ mal mehr Energie frei werden. Die erste technische Möglichkeit dafür zeichnete sich durch die Entdeckung der Uranspaltung ab.

6.2.4.1 Spaltung schwerer Kerne

Hahn und Straßmann²⁾ entdeckten 1938, dass die Kerne des Uranisotops ${}^{235}_{92}\text{U}$ durch den Einfang eines Neutrons in zwei mittelgroße Kerne gespalten werden, z.B. in



Daran sind zwei Dinge wesentlich:

1. Die Summe der Protonen (unterer Index) der Bruchstücke bleibt zwar erhalten, die Summe der Neutronen (oberer minus unterer Index) ist jedoch um 2 bis 3 kleiner als beim Urankern. Bei jeder Spaltung werden also Neutronen frei, die an anderen ${}^{235}_{92}\text{U}$ -Kernen weitere Spaltungen einleiten können usw.
2. Die Nukleonen sind in den Bruchstücken stärker aneinander gebunden als im Urankern (vgl. Bild 6.36).

¹⁾ In der Bundesrepublik Deutschland seit dem 1. 1. 1978 nicht mehr gesetzliche Einheit

²⁾ Otto Hahn (1879 bis 1968, Nobelpreis 1944); Fritz Straßmann (1902 bis 1980).

Es ist der Ablauf einer Kettenreaktion möglich.

Es wird Bindungsenergie frei, und zwar pro gespaltenem Urankern etwa 200 MeV.

Wegen der frei werdenden Bindungsenergie ist die Summe der Massen der Bruchstücke und Neutronen um etwa 1‰ kleiner als die Masse des Urankerns. 1 kg Uran liefert etwa $7 \cdot 10^{13}$ J, von denen 83% als kinetische Energie der Bruchstücke, 3% als kinetische Energie der freigesetzten Neutronen und 3% als γ -Strahlung unmittelbar auftreten.

Kettenreaktion

Von den 2 bis 3 Neutronen, die bei jeder Spaltung mit Energien von 1 bis 2 MeV frei werden, treffen nicht alle wieder auf einen ${}^{235}_{92}\text{U}$ -Kern, denn einige werden von anderen, nicht spaltbaren Kernen eingefangen, andere verlassen den Uranklotz, bevor sie Gelegenheit hatten, einen Kern zu spalten. Man bezeichnet den Quotienten aus der Zahl der Neutronen, die zu einer Spaltung führen, und der Zahl der Spaltungen, durch die sie freigesetzt wurden, als Multiplikationsfaktor k . Dann bedeutet $k = 1$, dass eine konstante Anzahl von Spaltungen pro Zeit stattfindet, die Kettenreaktion also mit konstanter Geschwindigkeit abläuft und eine konstante Leistung liefert. Bei $k < 1$ bricht die Kettenreaktion ab, bei $k > 1$ nimmt ihre Geschwindigkeit und die Energieerzeugung exponentiell zu, man sagt die Reaktion „geht durch“, evtl. kommt es zu einer Explosion.

Die Größe von k hängt von folgenden Faktoren ab:

1. Von der Anzahl der spaltbaren Kerne, die ein Neutron auf seinem Weg vorfinden kann, bei einem kugelförmigen oder ähnlich geformten Urankörper also von der Menge des Isotops ${}^{235}_{92}\text{U}$.
2. Vom Spalt- und vom Einfangquerschnitt der spaltbaren Kerne; diese Wirkungsquerschnitte hängen ihrerseits von der Geschwindigkeit der Neutronen ab.
3. Von der Anzahl der Kerne, die nicht spaltbar sind und von deren Neutroneneinfangquerschnitt.

Die Masse eines Urankörpers, die bei einer bestimmten Form und bei konstanten Faktoren 2. und 3. gerade eine Kettenreaktion ermöglicht ($k = 1$) nennt man kritische Masse (ohne Neutronenreflektor etwa 50 kg ${}^{235}_{92}\text{U}$).

Kernexplosion

Um eine Explosion, d.h. eine möglichst schnelle Freisetzung der verfügbaren Energie zu erhalten, muss man den Multiplikationsfaktor k möglichst groß machen und verhindern, dass Teile des spaltbaren Materials weggeschleudert werden, bevor sie gespalten werden können. Man erreicht dies, indem man mehrere unterkritische Massen aus möglichst reinem ${}^{235}_{92}\text{U}$ durch eine chemische Sprengladung zu einer überkritischen Masse zusammenschießt. Nach diesem Prinzip werden für militärische Zwecke Atombomben gebaut. Die Hauptschwierigkeit bei der Herstellung war die Trennung des ${}^{235}_{92}\text{U}$ vom ${}^{238}_{92}\text{U}$, denn das ist nicht chemisch, sondern nur physikalisch möglich, und im natürlichen Uran sind 99,3% ${}^{238}_{92}\text{U}$ und nur 0,7% ${}^{235}_{92}\text{U}$ enthalten.

Die verheerende Wirkung einer Kernexplosion hat im Wesentlichen folgende Komponenten: Enorme Kernstrahlung, die im näheren Umkreis schwerste Strahlungsschäden bewirkt;

Hitzewelle, die im größeren Umkreis alles organische Material versengt; Druckwelle, die in noch weiterem Umkreis mechanische Zerstörungen bewirkt; Verseuchung riesiger Gebiete mit den radioaktiven Spaltprodukten (s. unten).

Kernreaktoren

Hauptbestandteile. Eine kontrollierte Kettenreaktion von Kernspaltungen, d.h. mit einem Multiplikationsfaktor $k = 1$, lässt sich in Kernreaktoren durchführen. Diese enthalten im Allgemeinen folgende Hauptbestandteile (Bild 6.39).

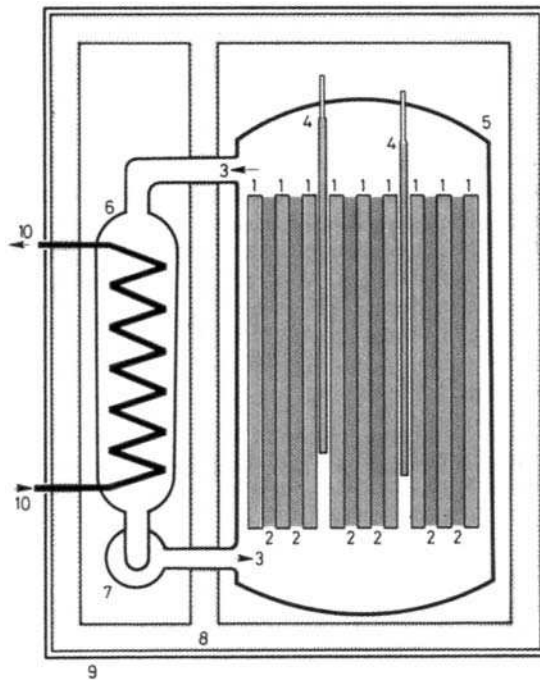


Bild 6.39 Schematischer Aufbau eines Kernreaktors

- 1 Brennelemente
- 2 Moderator
- 3 Primärkühlmittel
- 4 Regelstäbe
- 5 Reaktortank
- 6 Wärmetauscher
- 7 Pumpe
- 8 Strahlenabschirmung
- 9 druckfeste Hülle
- 10 Sekundärkühlmittel

1. Kernbrennstoff, heute noch meist eine Mischung aus $^{238}_{92}\text{U}$ und $^{235}_{92}\text{U}$, jedoch zum Teil mit höherer als der natürlichen Konzentration des spaltbaren $^{235}_{92}\text{U}$ (sog. angereichertes Uran).

2. Moderator. Wenn die bei der Spaltung frei werdenden Neutronen durch Zusammenstöße etwas verlangsamt sind, werden sie durch die $^{238}_{92}\text{U}$ -Kerne besonders leicht eingefangen, ohne eine Spaltung zu bewirken, gehen also für die Reaktion verloren. Die Modulatorsubstanz soll nun die Neutronen möglichst schnell stark (d.h. auf etwa 2000 m/s, sog. thermische Geschwindigkeiten, vgl. Abschn. 2.3.1.3) abbremsen, denn der Einfangquerschnitt des $^{238}_{92}\text{U}$ ist für diese thermischen Neutronen viel kleiner als für schnelle Neutronen, der Spaltquerschnitt des $^{235}_{92}\text{U}$ jedoch besonders groß. Das Abbremsen geschieht durch elastische Stöße gegen die Kerne der Modulatorsubstanz. Diese sollen also möglichst leicht sein, damit pro Stoß viel Energie übertragen wird, sie sollen aber Neutronen möglichst nicht absorbieren. Insbesondere schwerer Wasserstoff ^2_1D in Form von schwerem Wasser D_2O und sehr reiner Kohlenstoff in Form von Graphit, aber auch gewöhnliches Wasser sind dazu geeignet.

3. Regelstäbe. Bei konstanter Reaktorleistung muss der Multiplikationsfaktor k genau 1 sein. Um die Leistung zu erhöhen („hochfahren“), muss er wenig über 1 sein, zum Abschalten des Reaktors muss er kleiner als 1 sein. Um diese Zustände genau einzuregulieren, werden Stäbe oder Bleche aus Stoffen mit besonders hohem Neutroneneinfangquerschnitt, z.B. aus Cadmium, mehr oder weniger tief in den Reaktorraum eingeschoben. Diese Regelung, bei der ja die Regelstäbe mechanisch bewegt werden müssen, ist nur möglich, weil etwa 0,75% der Spaltneutronen im Mittel 10 s verzögert freigesetzt werden.

4. Kühlmittel. Die Energie der Kernspaltung liegt zunächst hauptsächlich als kinetische Energie der Bruchstücke vor. Durch Zusammenstöße verteilt sie sich auf die Atome der Umgebung, d.h., diese wird heißer. Die Wärme muss durch geeignete Kühlmittel abtransportiert werden. Es eignet sich dazu u.a. Wasser oder schweres Wasser (evtl. gleichzeitig Moderator), flüssiges Metall (z.B. Natrium) oder auch ein Gas (z.B. CO₂ oder He). Durch die Neutronen im Reaktor finden im Kühlmittel Kernreaktionen statt, außerdem kann es Spaltprodukte mitnehmen; beides bewirkt, dass es künstlich radioaktiv wird.

Spaltprodukte – Atommüll. Alle Kerne, die als Bruchstücke bei der Kernspaltung entstehen, sind instabil und zerfallen mit sehr unterschiedlichen Halbwertszeiten unter β - und γ -Emission. Rund 10% der Energie der Kernspaltung wird erst durch diese Strahlung frei. Die entstehenden Aktivitäten sind sehr groß und erfordern sehr aufwändige Schutzmaßnahmen. Nach einiger Betriebszeit müssen die Spaltprodukte aus den Brennelementen durch chemische Aufbereitung entfernt werden, weil sie zu viele Neutronen einfangen. Hinzu kommt, dass auch alle anderen Materialien im Innern des Reaktors, z.B. der Edelstahl der Brennstäbe, durch Neutroneneinfang radioaktiv werden. Einige der Spaltprodukte finden als künstliche radioaktive Strahler in Medizin und Technik Verwendung.

Das ebenfalls anfallende Plutonium (s. unten) dient wieder als spaltbares Material; deshalb ist bei jedem Reaktor interessant, wie viele Plutoniumatome pro Spaltvorgang entstehen; dies besagt die Konversionsrate in Tafel 6.40.

Der größte Teil ist jedoch „Atommüll“, der so gelagert werden muss, dass keine radioaktive Verseuchung von Luft oder Wasser eintritt. Wie aber schon in Abschn. 6.2.1.2 gezeigt, klingt glücklicherweise die Aktivität stark strahlender Stoffe auch schnell ab, sodass die jahrhundertelange sichere Lagerung bald nur mittel- und schließlich nur schwach-radioaktive Stoffe betrifft.

Tafel 6.40 Gängige Kernreaktoren

Reaktortyp	Brennstoff	Anreich.	Moderator	Kühlmittel	Druck in 10 ⁵ Pa	Temp. in °C	Konversionsrate
<i>mit thermischen Neutronen</i>							
SWR Siedewasserreaktor	UO ₂	3%	H ₂ O	H ₂ O	70	290	0,6
DWR Druckwasserreaktor	UO ₂	3%	H ₂ O	H ₂ O	150	320	0,5
HWR Schwerwasserreaktor	UO ₂	0,7%	D ₂ O	D ₂ O	115	310	0,8
GGR Gas-Graphitreaktor	U	0,7%	C	CO ₂	30	410	0,8
AGR Gas-Graphitreaktor	UO ₂	2,6%	C	CO ₂	40	650	0,6
HTR Hochtemperatur-R.	UO ₂ /ThO ₂	93%	C	He	40	750	0,7
LWGR Wasser-Graphit-R.	UO ₂	1,8%	C	H ₂ O	65	280	–
<i>mit schnellen Neutronen</i>							
BR Brutreaktor	UO ₂ /PuO ₂	18%	–	Na	2,5	550	1,2

Reaktortypen. Die große Zahl von unterschiedlichen Kernreaktoren lässt sich nach verschiedenen Kriterien in Typen ordnen: Nimmt man den Zweck als Kriterium, so hat man zwischen Forschungs-, Leistungs- und Brutreaktoren zu unterscheiden. Die Forschungsreaktoren dienen entweder dazu, Kenntnisse und Daten für die Planung neuer Reaktoren zu gewinnen, oder es wird intensive Neutronen- und γ -Strahlung im Inneren für Kernprozesse ausgenutzt, d.h., es wird Kernphysik und Kernchemie getrieben. Bei Leistungsreaktoren (Leistungen bis etwa 10^9 W) wird entweder die primär entstehende thermische Energie für chemische Prozesse direkt als sog. Prozesswärme ausgenutzt, oder es wird Wasserdampf erzeugt und in Turbinen mechanische Energie gewonnen; diese kann entweder direkt zum Antrieb von Schiffen dienen oder in elektrische Energie umgewandelt werden (andere, z.B. Brutreaktoren s. unten).

Betrachtet man die Form, in der der Brennstoff vorliegt, so zeigt sich: In den weitaus meisten Fällen ist das Uran als Dioxid in gasdicht verschweißte Edelstahlrohre eingeschlossen. Das sind die „Brennstäbe“, von denen meist mehrere (z.B. 180) nochmals zu „Brennelementen“ zusammengefasst sind. Die Brennelemente (z.B. 120) sind ihrerseits zum sog. Core (= Herz) zusammengestellt; das ist dann der eigentliche aktive Raum, in dem die Masse an $^{235}_{92}\text{U}$ überkritisch werden kann, in dem Moderator und Regelstäbe wirken müssen und aus dem die Wärme abgeführt werden muss.

Von dieser Anordnung wird beim Kugelhaufen- und beim Homogenreaktor abgewichen. Bei Ersterem ist der Brennstoff ein Gemisch aus Uran- und Thoriumcarbid oder -oxid, zu Partikeln von rund 0,2 mm Durchmesser zusammengesintert und mit einer 0,2 mm dicken Schicht aus pyrolytischem Kohlenstoff ummantelt. Ein Gemisch aus diesen Teilchen und Graphit, eingeschlossen von keramischer Umhüllung, bildet die zentimetergroßen kugelförmigen Brennelemente. Der gesamte Brennstoff bildet so ein relativ leicht bewegliches Schüttgut, das fast wie eine Flüssigkeit gehandhabt werden kann; außerdem erlauben die verwendeten Materialien den Betrieb bei hoher Temperatur (z.B. 760°C). Beim Homogenreaktor (nur Forschungsreaktor) liegt das Uran als lösliches Salz im Kühl- und Moderator-mittel Wasser gelöst vor.

Die Unterscheidung der Reaktoren nach Moderator- und Kühlmittel ergibt folgende Gruppen:

Leichtwasserreaktoren mit normalem Wasser H_2O zum Moderieren und Kühlen. Sie müssen wegen der nicht sehr guten Moderatoreigenschaften des H_2O (Neutroneneinfang) mit angereichertem Uran (1,4 bis 3% $^{235}_{92}\text{U}$) betrieben werden. Da das Wasser radioaktiv verseucht wird, verbleibt es teilweise (z.B. bei Druckwasserreaktoren) in einem geschlossenen Kreislauf im Innern der Abschirmung und gibt ausschließlich seine Wärme in einem Wärmetauscher an ein zweites Medium ab. Steht das Wasser nur unter einem Druck von etwa $70 \cdot 10^5$ Pa, so kommt es im Core schon zur Dampfbildung und man hat einen sog. Siedewasserreaktor; bei einem Druckwasserreaktor dagegen verhindert ein Druck von $120 \cdot 10^5$ Pa bis $160 \cdot 10^5$ Pa die Dampfbildung im Primärkreislauf.

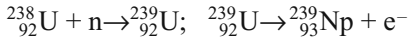
Schwerwasserreaktoren haben schweres Wasser D_2O als besonders wirksamen Moderator und können daher mit Natururan (0,7% $^{235}_{92}\text{U}$) betrieben werden. Normalerweise dient das D_2O auch als Kühlmittel; nicht nur wegen seiner Radioaktivität, sondern auch wegen seines Preises verbleibt es ebenfalls in einem geschlossenen Kreislauf. Bei Graphitreaktoren wird die Moderatorsubstanz Graphit in Form von Barren so zu einem ungefähr kubischen Block geschichtet¹⁾; dass im Innern Kanäle freibleiben für die Brenn- und Regelstäbe, für die Kühlmittelführung und zum Einbringen von Stoffen, die für Forschungs- oder Prüfzwecke bestrahlt werden sollen. Als Kühlmittel dient Gas (CO_2 oder He); jedoch wurde auch mit flüssigem Natrium experimentiert.

Alle bis hierher aufgeführten Reaktoren enthalten Moderatoren, d.h., ihre Neutronen werden möglichst auf „thermische“ Geschwindigkeit verlangsamt, bevor sie eine Spaltung einleiten. Daher heißen alle derartigen Reaktoren „langsame“ oder „thermische Reaktoren“. Ein schneller Reaktor (z.B. schneller Brüter, s. unten) dagegen arbeitet ohne Moderator, d.h. mit schnellen Neutronen (rund 10^7 m/s). Da das Kühlmittel nicht moderieren soll, kommt in erster Linie geschmolzenes Metall, z.B. Natrium oder eine Natrium-Kalium-Legierung in Frage. Tafel 6.40 gibt einen Überblick über die gängigen Reaktortypen.

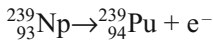
¹⁾ Daher der Name „Atommeiler“ für die frühen Reaktoren.

Andere spaltbare Kerne

Der im natürlichen Uran mit einer Häufigkeit von 99,3% vertretene Kern $^{238}_{92}\text{U}$ kann Neutronen anlagern. Dann wird ein β -Teilchen ausgestoßen, und es entsteht ein neuer Kern mit dem Namen Neptunium (Np):

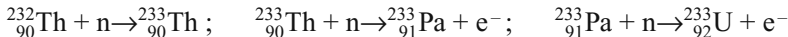


Das Neptunium zerfällt seinerseits unter β -Emission in ein weiteres neues Element, das Plutonium (Pu)



Plutonium ist mit der Halbwertszeit $T_{1/2} = 24 \cdot 10^3$ Jahre radioaktiv und kann – ganz ähnlich wie $^{235}_{92}\text{U}$ – durch Neutronen gespalten werden, wobei eine Kettenreaktion möglich ist. Da sich das Plutonium chemisch von den anderen Stoffen unterscheidet, ist seine praktisch reine Abtrennung, z.B. aus gebrauchten Uranbrennelementen, möglich. Hochgradig angereichertes spaltbares Material wird zur Herstellung von Kernwaffen benötigt; allerdings muss die Abtrennung nach kurzer Standzeit im Kernreaktor erfolgen. Sonst ist das durch weitere Neutroneneinfangreaktionen entstehende Plutonium-Isotopengemisch nicht mehr für die schnelle Reaktion in einer Bombe geeignet. Soll das Plutonium als Kernbrennstoff für Reaktoren dienen, ist die Standzeit weniger kritisch.

Ebenso wird das natürlich vorkommende, sehr schwach radioaktive Element Thorium durch Neutroneneinfang und β -Emission zum kurzlebigen Protaktinium (Pa) und dieses unter β -Emission zum langlebigen und spaltbaren Uranisotop $^{233}_{92}\text{U}$



Derartige Erzeugung von „Kernbrennstoff“ nennt man Brüten, Reaktoren, die dafür eingerichtet sind, mehr Kernbrennstoff zu erbrüten, als sie gleichzeitig verbrauchen, sind nachfolgend beschrieben:

Brutreaktoren oder Brüter

Damit möglichst viel spaltbares Material erbrütet wird, müssen viele Neutronen frei werden. Daher werden Brüter für hohe Leistungen ausgelegt. Andererseits werden alle Maßnahmen, um die Neutronenverluste niedrig zu halten, intensiver ergriffen als bei thermischen Reaktoren; dies betrifft z.B. die Auswahl der Materialien, aus denen die Komponenten im Core bestehen¹⁾ (vgl. auch die „Konversionsrate“ in Tafel 6.40).

Die Uran-Brutreaktion, die zum Plutonium führt, ist besonders mit schnellen Neutronen ergiebig und hat eine besonders hohe Neutronenausbeute, daher wurden hierfür die oben genannten schnellen Reaktoren, die schnellen Brüter gebaut oder geplant. Die Thoriumbrutreaktion ist mit langsamen Neutronen ergiebiger, also werden für sie evtl. „langsame Brüter“ gebaut werden.

Unter Ausnützung des Brütens kann aus der gleichen Brennstoffmenge insgesamt etwa 60 mal so viel Energie gewonnen werden wie ohne Brüten. Dies wird seit langem in Frankreich, Großbritannien, Japan und in den USA ausgenutzt, wodurch auch die Menge des „Atomülls“ nur noch 1/60 so groß ist wie ohne Brüter. In Deutschland wurde der bereits fertiggestellte „schnelle Brüter“ aus ideologischen Gründen nicht in Betrieb genommen.

¹⁾ Für schnelle Neutronen sind allerdings die Einfangquerschnitte sowieso kleiner als für langsame.

6.2.4.2 Fusion leichter Kerne

Nach Bild 6.36 wird auch beim Verschmelzen (der Fusion) leichter Kerne zu mittelschweren Energie frei. Es gibt jedoch keine so einfache Auslösung einer Kettenreaktion wie bei der Kernspaltung durch Neutronen. Man muss vielmehr die Kerne einander so weit nähern, dass die Kernkräfte wirksam werden, also auf größenordnungsmäßig 10^{-15} m. Da das gegen die elektrostatische Abstoßung zu erfolgen hat, müssen die Kerne auf kinetische Energien in der Größenordnung 10^5 eV gebracht werden. Das ist zwar in Teilchenbeschleunigern leicht möglich, jedoch nur mit mikroskopisch kleinen Mengen. Das „einfachste“ Mittel ist, eine Substanz mit leichten Kernen, z.B. Wasserstoff, auf einige 10^8 bis 10^9 °C zu erhitzen. Dann reicht die thermische Energie für die nötige Annäherung der Kerne und ihre Verschmelzung aus. Die dabei frei werdende Energie übersteigt bei weitem die zur Aufheizung nötige. Derartige Temperaturen herrschen im Innern der Sterne, z.B. in der Sonne. Die dabei auftretenden Kernfusionen bilden die Energiequelle der Sterne.

Auch die Wasserstoffbombe beruht auf diesem Prinzip. Die nötige „Zündtemperatur“ wird durch eine Kernspaltungsexplosion (Uran oder Plutonium) erzeugt.

Die kontrollierte Fusion hätte größte technische Bedeutung. Sie ist heute noch nicht durchführbar, jedoch wird an der Verwirklichung intensiv gearbeitet. Die nötigen hohen Temperaturen hofft man z.B. in sehr stromstarken elektrischen Entladungen zu erreichen, die durch das eigene und fremde Magnetfelder konzentriert werden. Geeignet geformte Magnetfelder müssen auch das hochoerhitzte Plasma der Entladung einschließen, da es ja kein Gefäß gibt, das solche Temperaturen aushält. Aussichtsreich erscheint auch die Aufheizung im gemeinsamen Brennpunkt mehrerer Laser sehr hoher Leistung.

Es gilt das Lawson-Kriterium, das z.B. für die Reaktion von Deuteriumkernen mit Tritiumkernen eine Temperatur $T \approx 3 \cdot 10^8$ K und von dem Produkt aus Teilchendichte n und „Einschlusszeit“ den Wert $5 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3} \text{ s}$ verlangt, damit die Fusion zündet, d.h. mehr Energie frei wird, als zum Aufheizen und Verdichten verbraucht wird. Dabei sind kleinere Verluste, wie z.B. durch Abstrahlung, noch vernachlässigt.

6.2.5 Strahlenwirkung

Sowohl die Strahlung der natürlichen radioaktiven Stoffe als auch die künstlich erzeugte energiereiche Strahlung finden Anwendung in der Medizin, der Biologie und der Technik. Die vielen Möglichkeiten können hier nicht aufgezählt werden. Wir wollen jedoch die prinzipielle Wirkung energiereicher Strahlung kurz behandeln.

Biologische Wirkung. Die Teilchen oder Photonen ionisieren auf ihrem Weg Atome und dissoziieren Moleküle. Da die Funktionsfähigkeit pflanzlicher, tierischer oder menschlicher Zellen von einzelnen Molekülen abhängt, kann eine einzige Dissoziation u.U. die Funktion der betroffenen Zelle so verändern, dass sie entweder abstirbt oder sich ganz anders verhält als vorher (entartet). Zwar kann die Zelle einzelne Schäden an wichtigen Molekülen reparieren und auch der Organismus kann abgestorbene Zellen ersetzen, aber beides ist nur in beschränktem Ausmaß möglich.

Teilchen mit intensiver Wechselwirkung, z.B. α -Teilchen, bewirken am meisten Veränderungen, da sie auf kurzer Strecke – schon im Bereich einer Zelle – viele Ionisationen und Dissoziationen bewirken. Andererseits ist dadurch ihre Eindringtiefe nur sehr gering; daher

schädigen sie meist nur dann, wenn ihre Quellen, die radioaktiven Substanzen, ins Innere eines Organismus gelangen.

Teilchen mit geringer Wechselwirkung, wie z.B. die γ -Quanten, erzeugen wesentlich weniger Ionen pro Länge auf ihrer Bahn. Sie sind aber dadurch keineswegs unschädlich, denn einerseits legen sie auch entsprechend lange Wege im Körper zurück, und andererseits lassen sie sich auch viel schlechter abschirmen.

Die β -Teilchen nehmen eine Mittelstellung ein.

Wirkung auf Werkstoffe. Hierbei hat man einerseits die chemische Wirkung z.B. auf Kunststoffe, Öle und Ähnliche; es werden wieder Moleküle dissoziiert, und ihre Wiedervereinigung geschieht evtl. in anderer Anordnung als vorher. Kunststoffe z.B. können dadurch härter und temperaturbeständiger werden (Vernetzung). Andererseits können die energiereichen Teilchen in Kristallen einzelne Atome oder Ionen von ihren Gitterplätzen stoßen. Dadurch ändern sich die Durchsichtigkeit, die Farbe oder auch die Leitfähigkeit.

Eine Reihe von Werkstoffen, wie z.B. die Metalle und viele keramische Werkstoffe, sind sehr unempfindlich. Nur extrem intensive Bestrahlung verändert ihre Eigenschaften nennenswert.

6.2.5.1 Dosimetrie

Strahlungs dosis

Zur Messung und zahlenmäßigen Angabe der Strahlenwirkung dienen die folgenden Größen:

Definitionen: 1. Wird von der Strahlungsenergie W , die ein Volumenelement dV mit der Masse dm durchsetzt, der Anteil dW absorbiert, so definiert man als Energiedosis D den Quotienten

$$D = \frac{dW}{dm} = \frac{1}{\rho} \frac{dW}{dV} \quad \text{Einheit: } 1 \frac{\text{J}}{\text{kg}} = 1 \text{ Gray} = 1 \text{ Gy}^1)$$

2. Wird von der Strahlung in Luft der Dichte ρ_L im Volumenelement dV_L mit der Masse dm_L durch Ionisation die Ladung dQ gebildet, so definiert man als Ionendosis J den Quotienten

$$J = \frac{dQ}{dm} = \frac{1}{\rho_L} \frac{dQ}{dV_L} \quad \text{Einheit: } 1 \frac{\text{C}}{\text{kg}}$$

3. Wird die Energiedosis im Zeitintervall dt erzeugt, so ist die Energiedosisleistung \dot{D} der Quotient

$$\dot{D} = dD/dt; \quad \text{Einheit: } 1 \text{ W/kg}$$

4. Analog gilt für die Ionendosisleistung

$$\dot{J} = dJ/dt; \quad \text{Einheit: } 1 \text{ A/kg}$$

¹⁾ Bis 31.12.1985 durften für die Energiedosis allgemein und die Ionendosis auch die Einheiten 1 Rad = 1 rd = 10^{-2} J/kg bzw. 1 Röntgen = 1 R = $2,58 \cdot 10^{-4}$ As/kg verwendet werden. Louis H. Gray (1905 bis 1985).

Die biologische Wirkung auf lebende Zellen ist zwar von der absorbierten Energie pro Masse, der Energiedosis, abhängig, diese lässt sich aber im lebenden Gewebe nicht messen. Man setzt vielmehr der gleichen Strahlung, die ein Gewebe trifft, ein Dosimeter (s. unten) aus und misst die Energiedosis D , die darin erzeugt wird. Die relative biologische Wirkungsdosis, die sog. Äquivalentdosis D_q , erhält man dann daraus durch Multiplikation mit einem dimensionslosen Bewertungsfaktor q , der rein empirisch berücksichtigt, dass verschiedene Strahlungsarten in biologischen Geweben andere Wirkung haben als im Dosimeter,

$$D_q = q D$$

Speziell bei dieser Äquivalentdosis wird die Einheit $1 \text{ J/kg} = 1 \text{ Sievert}^1) = 1 \text{ Sv}$ genannt²⁾. Für Röntgen-, γ - und β -Strahlen ist $q = 1$, für einige weitere Strahlungsarten zeigt Bild 6.41 den Wert von q in Abhängigkeit von der Energie der Teilchen; für schwere Ionen und Spaltprodukte steigt q bis $20^3)$.

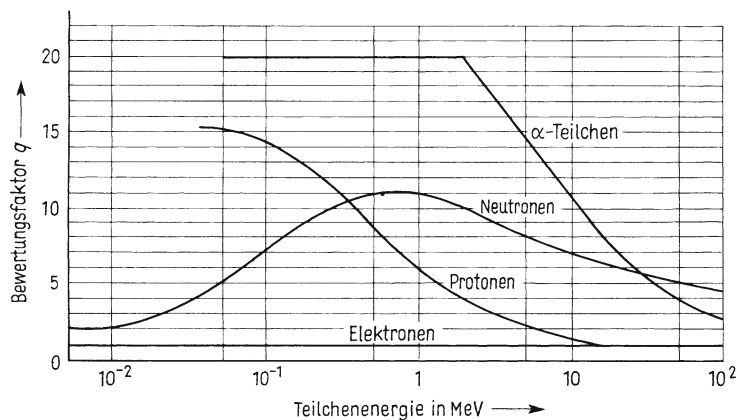


Bild 6.41 Der Bewertungsfaktor q (bei äußerlicher Bestrahlung) einiger Strahlungen in Abhängigkeit von der Teilchenenergie

Dosiskonstante. Die Ionendosisleistung \dot{J} im Abstand r von einem radioaktiven Strahler mit der Aktivität A (vgl. Abschn. 6.2.1.2) und kleinen Abmessungen, verglichen mit r , ist dieser Aktivität direkt und dem Quadrat des Abstandes umgekehrt proportional:

$$\dot{J} = IA/r^2$$

mit der sog. Dosiskonstanten I , einer Größe, die von der Strahlungsart und von der Energie der Teilchen oder Quanten abhängt und experimentell bestimmt werden muss. Z.B. ist für γ -Quanten mit Energien $W \approx 1 \text{ MeV}$ die Dosiskonstante

$$I_\gamma = 2,6 \cdot 10^{-18} \text{ A s m}^2/\text{kg}$$

Messverfahren. Die in Abschn. 6.2.2.2 beschriebenen Detektoren eignen sich prinzipiell zur Messung der Strahlungsdosis oder der Dosisleistung. Geräte mit entsprechender Eichung heißen Dosimeter. Speziell zur Kontrolle von Menschen, die mit ionisierender

¹⁾ Rolf Maximilian Sievert (1896 bis 1966).

²⁾ In der Bundesrepublik Deutschland war bis 31.12.1977 außerdem noch für die Äquivalentdosis die eigene Einheit 1 rem (von roentgen equivalent for men) zugelassen. Damit war q dimensionsbehaftet und hatte die Einheit 1 rem/rd, aber die gleichen Zahlenwerte wie oben. Es gilt: $1 \text{ rem} \triangleq 0,01 \text{ Sv}$.

³⁾ Näheres s. z.B. [37].

Strahlung arbeiten, dienen häufig kleine Kondensatoren, die vor Beginn der Strahlenbelastung auf eine bestimmte Spannung aufgeladen werden. Nachher wird die durch die Ionisation des Dielektrikums verminderte Spannung gemessen und daraus auf die Strahlungsdosis geschlossen. Außerdem wird von strahlungsgefährdeten Personen meist auch ein lichtdicht verschlossenes fotografisches Filmstückchen getragen („Filmplakette“). Aus der Schwärzung des entwickelten Filmes kann auf die Strahlungsdosis geschlossen werden. Zur Messung großer Strahlungsdosen können auch die oben beschriebenen Veränderungen von kristallinen Stoffen oder Kunststoffen verwendet werden.

6.2.5.2 Strahlungsschäden

Bei der Bestrahlung eines lebenden Organismus muss unterschieden werden zwischen der Schädigung seiner Körperzellen (somatische Schädigung) und der Schädigung seiner Ei- oder Samenzellen (genetische Schädigung). Während die Schädigung einzelner Körperzellen vom Organismus im Allgemeinen repariert wird, kann durch die Schädigung der Erbanlagen in einer einzelnen Ei- oder Samenzelle die ganze Nachkommenschaft erblich verändert sein, wenn diese eine geschädigte Zelle zur Fortpflanzung kommt. Die so entstehenden Erbänderungen sind fast immer nachteilig. Man schätzt, dass durch eine Bestrahlung mit $D_q = 0,3$ bis $0,5$ Sv im Jahr die Zahl der Erbänderungen (Mutationen) gegenüber der Zahl der im gleichen Zeitraum natürlich vorkommenden verdoppelt wird.

Von den radioaktiven Stoffen der natürlichen irdischen Umgebung, von der Höhenstrahlung aus dem Weltall und von den radioaktiven Stoffen, die im menschlichen Körper von Natur aus vorhanden sind, erfährt der Mensch eine natürliche Äquivalentdosisleistung von etwa 10^{-3} Sv/a. Diese ist nicht vermeidbar und wird „unschädlich“ genannt. Bei zusätzlicher kurzzeitiger Bestrahlung mit $0,2 \dots 0,3$ Sv treten vorübergehende krankhafte Veränderungen auf, bei $0,5 \dots 1$ Sv werden diese Krankheitserscheinungen ernster und heilen wesentlich langsamer aus. $3 \dots 6$ Sv erzeugen schwere Krankheiten, die in 50% der Fälle tödlich ausgehen.

Seit 2001 wird als Toleranzdosis pro Jahr im Allgemeinen $D_q = 1 \cdot 10^{-3}$ Sv festgelegt.

Aufgaben zu Abschn. 6.2

1. Aus Stickstoff $^{14}_7\text{N}$ wird in der Atmosphäre durch Neutronenreaktion (indirekt aus der Höhenstrahlung) der β -radioaktive Kohlenstoff $^{14}_6\text{C}$. Wie lautet die Reaktionsgleichung?
2. Man ergänze die Gleichung $^{109}_{47}\text{Ag} (n; \gamma) \dots$; der entstehende Kern ist β -aktiv. Was entsteht dadurch?
3. Die Halbwertszeit von Radium ist 1622 Jahre. Wie viele Zerfälle pro Zeit ereignen sich in 1 g $^{226}_{88}\text{Ra}$?
4. Welche Masse Polonium $^{210}_{84}\text{Po}$ mit der Halbwertszeit 140 Tage hat die Aktivität $3,7 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Bq}$ ($= 1 \text{ Ci}$)?
5. Angenommen, eine Zählleinrichtung mit Geiger-Müller-Zählrohr erlaubt, 60 Impulse pro Minute genügend sicher zu messen.

Welche Masse Polonium $^{210}_{84}\text{Po}$ kann noch damit festgestellt werden, wenn das Po im Zählrohr ist, sodass jeder Zerfall einen Zählimpuls auslöst?

6. Wenn ein Nukleon im $^{57}_{26}\text{Fe}$ vom ersten angeregten Zustand „zurückfällt“, wird ein γ -Quant mit 14 keV ausgestrahlt. Diese Energie ist mit der Genauigkeit $5 \cdot 10^{-9}$ eV festgelegt.
 - a) Wie lange verweilt das Nukleon demnach im Mittel in dem angeregten Zustand?
 - b) Mit welchem relativen Fehler $\Delta f/f$ ist die Frequenz der γ -Strahlung festgelegt?
7. Aus Messungen ergibt sich für den Radius eines Kerns mit der Nukleonenzahl A_r die empirische Formel $r = 1,3 \cdot 10^{-15} \text{ m} \sqrt[3]{A_r}$. Was folgt daraus für die Dichte der z.B. kugelförmigen Kerne?
8. Welche Bindungsenergie wird frei, wenn aus 1 kg Wasserstoff restlos Helium gebildet wird?

7 Festkörperphysik

Die Festkörperphysik hat sich zu einem der reizvollsten Gebiete mit einer Fülle technischer Anwendungen entwickelt. Befasste sie sich zu Beginn des 20. Jahrhunderts im Wesentlichen mit der systematischen Beschreibung des Aufbaus der Festkörper, z.B. mit den Kristallstrukturen, und den mechanischen und thermischen Eigenschaften, so setzte mit der Benutzung der Quantenmechanik ein ungeheurer Aufschwung ein, der vor allem das Verständnis der elektrischen Leitung, auch bei den sog. Supraleitern, insbesondere aber bei den Halbleitern brachte. Die damit einhergehenden technischen Anwendungen der Mikroelektronik führen zu einer technischen Revolution, die jeden von uns in vielfältiger Weise betrifft. Wie in diesem Abschnitt sichtbar wird, haben wir es hier buchstäblich mit breit anwendbarer „Quantentechnik“ zu tun.

7.1 Aufbau der Festkörper

Die Bausteine der festen Körper, Atome, Ionen oder Moleküle, üben genau wie die der Flüssigkeiten beträchtliche Anziehungskräfte, sog. Kohäsionskräfte, aufeinander aus (vgl. auch Abschn. 1.6.1.5). Daher nehmen feste Körper und Flüssigkeiten ohne äußere Kräfte stets ein bestimmtes Volumen ein. Zwischen beiden besteht jedoch ein wesentlicher Unterschied.

Während eine Flüssigkeit die Form des Gefäßes annimmt, in dem sie sich befindet, haben Festkörper eine eigene Gestalt.

7.1.1 Amorphe Stoffe

An der obigen Aussage wird klar, dass die Grenze zwischen Festkörper und Flüssigkeit nicht immer eindeutig ist. Zum Beispiel hat eine Stange Siegelack scheinbar eine feste Gestalt. Lässt man sie jedoch lange genug auf einer ebenen Unterlage liegen, so plattet sie sich ab, sie fließt auseinander. Bei Erwärmung geht das Fließen sehr viel schneller. Dabei erfolgt der Übergang vom (scheinbar) festen in den flüssigen Zustand kontinuierlich ohne einen Schmelzpunkt. Solche Stoffe nennt man amorph¹⁾. Zu ihnen gehören auch die Gläser. Man bezeichnet daher ein Glas auch als eine unterkühlte Flüssigkeit.

Das wichtigste Mittel zur Strukturuntersuchung in Festkörpern ist die Röntgenstrahlinterferenz (vgl. Abschn. 5.2.6.3). In amorphen Stoffen lassen sich mit ihr keine Regelmäßigkeiten im Aufbau erkennen, die über mehr als wenige Atomabstände hinausgehen.

¹⁾ griech.: amorphos = gestaltlos.

7.1.2 Kristalle

Betrachtet man z.B. Kochsalzkörnchen, Schneeflocken oder Quarzstücke, so fällt einem deren regelmäßige Gestalt auf. Die äußeren Flächen liegen in ganz bestimmten Lagen zueinander. Solche regelmäßig geformten Körper nennt man Kristalle.

Die meist für jeden bestimmten Stoff typische Form legt die Vermutung nahe, dass sie durch eine regelmäßige Anordnung der Massenmittelpunkte ihrer Atome verursacht sei. Die Röntgenstrukturanalyse (s. Abschn. 5.2.6.3) bestätigt dies. Man weiß heute, dass die Atome sog. Raumgitter bilden, die für den jeweiligen Stoff (oder eine bestimmte Modifikation des Stoffes) charakteristisch sind.

Die kleinste räumliche Einheit, die sich in den drei Raumrichtungen regelmäßig wiederholt, heißt Elementarzelle des betreffenden Kristallgitters.

Den Abstand zweier benachbarter Atommittelpunkte nennt man optische Gitterkonstante (Bild 7.1).

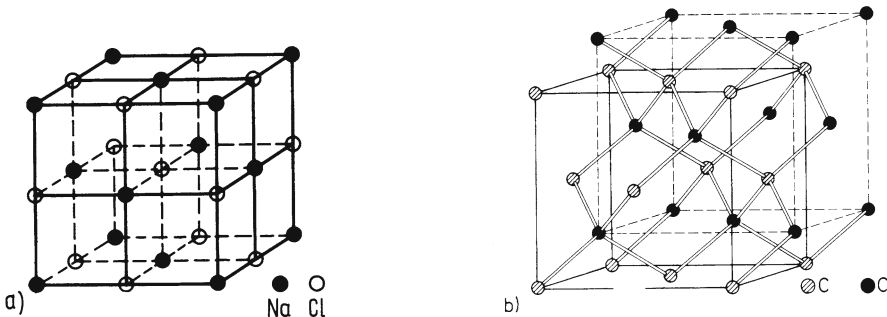


Bild 7.1 Kristallgitter a) eines NaCl-Kristalls b) eines Diamant-Kristalls
Die Linien deuten die Zugehörigkeit der Atome zu einer Elementarzelle an.

7.1.2.1 Einkristalle

Ein Körper, dessen sämtliche Elementarzellen fehlerfrei und vollkommen regelmäßig aneinandergesamt sind, ist ein idealer Kristall. Ein solcher Körper kommt weder in der Natur vor, noch lässt er sich künstlich schaffen. Man kann jedoch Kristalle herstellen, die dem Modell des idealen Kristalles ähnlich sind.

Das geschieht meist so, dass man sie auf einen kleinen regelmäßigen Impfling aus der flüssigen Phase langsam aufwachsen lässt. (In der Fachsprache heißt das: „Man zieht sie aus der Schmelze“.)

Kristalle mit fast regelmäßiger Anordnung der Atome über große Volumina, oft viele Kubikzentimeter, nennt man Einkristalle.

Die besten heute herstellbaren Einkristalle besitzen nur etwa einen Gitterfehler (s. Abschn. 7.1.2.2) auf 10^{10} Atome! Wegen der großen Anzahl der Atome pro Volumen sind das aber immer noch ca. 10^{12} im Kubikzentimeter! Einkristalle spielen besonders in der Halbleitertechnik eine große Rolle (s. Abschn. 7.3.1.2).

7.1.2.2 Gitterfehler

Gitterfehler oder Störstellen (sog. Defekte) bestehen aus Fehlordnungsstellen im regulären Gitter (Bild 7.2) oder eingebauten Fremdatomen (z. B. Kupferatome im Silbergitter).

Eine Fehlordnungsstelle entsteht z. B. dadurch, dass ein Atom statt auf seinem ordentlichen Platz im Gitter auf einem Zwischengitterplatz sitzt (Frenkel-Defekt¹) (Bild 7.2a)). Bei einer anderen Art der Fehlordnung ist ein Atom von seinem richtigen Gitterplatz an die Kristalloberfläche gewandert und hat eine Leerstelle hinterlassen (Schottky-Defekt²) (Bild 7.2b)). Schließlich können ganze Gitterebenen gegeneinander versetzt sein. Die obere Kristallhälfte enthält z. B. eine Gitterebene mehr als die untere (Bild 7.2c).

Art und Häufigkeit der Gitterfehler beeinflussen sowohl die mechanischen als auch die elektrischen, magnetischen und optischen Eigenschaften kristalliner Körper.

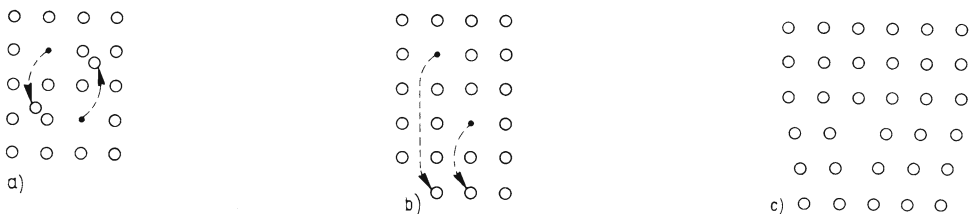


Bild 7.2 Fehlordnungsstellen im Kristallgitter

a) Frenkel-Defekte

b) Schottky-Defekte

c) Stufenversetzung

7.1.2.3 Polykristalle

Die meisten natürlichen und in der Technik verwendeten Festkörper bestehen aus vielen kleinen Einkriställchen, die regellos aneinander angrenzen. Man nennt solche Körper Polykristalle. In ihnen können die einzelnen Einkristalle so groß sein, dass man sie schon mit bloßem Auge erkennen kann (z. B. bei Zink), oder so klein, dass sie erst unter dem Mikroskop sichtbar werden. Polykristalle besitzen natürlich sehr viele Gitterfehler.

7.1.2.4 Flüssige Kristalle

Zwischen den allgemein bekannten Aggregatzuständen des festen Körpers und der Flüssigkeit gibt es einen Zwischenzustand, eine sog. Mesophase, der einige wichtige technische Anwendungen (s. u.) ermöglicht, nämlich den des flüssigen Kristalls.

Flüssige Kristalle werden von organischen Stoffen gebildet, deren Moleküle eine längliche Form haben, z. B. den in Bild 7.3 dargestellten Stoffen.

Wenn solche Stoffe gefrieren, so sind in den festen Kristallen nicht nur die Massenzentren der Moleküle regelmäßig angeordnet, wie dies ja auch bei Atomkristallen

¹) J. Frenkel (1894 bis 1952).

²) W. Schottky (1886 bis 1976).

der Fall ist (vgl. Bild 7.1), sondern auch die Achsen der Moleküle sind in bestimmter Weise ausgerichtet. Es sind also zwei voneinander unabhängige Ordnungsprinzipien gleichzeitig verwirklicht.

Erwärmt man einen solchen Kristall, so werden im Allgemeinen nicht beide Ordnungen gleichzeitig aufgehoben. Das Schmelzen erfolgt vielmehr stufenweise. Beim eigentlichen Schmelzpunkt mit der Temperatur ϑ_s wird zunächst nur die regelmäßige Anordnung der Molekülschwerpunkte aufgehoben, sodass die Moleküle wie in jeder normalen Flüssigkeit frei gegeneinander verschiebbar sind. Die regelmäßige Ausrichtung der Molekülachsen bleibt aber erhalten (s. Bild 7.6).

Eine Flüssigkeit mit regelmäßiger Ausrichtung der Molekülachsen nennt man einen flüssigen Kristall.

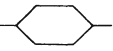
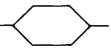
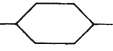
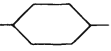
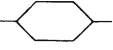
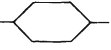
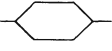
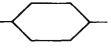
	Formel	Name
$\text{C}_6\text{H}_3\text{O}$ 	$\text{NO}=\text{N}$ 	OC_6H_5 PAA
$\text{C}_6\text{H}_5\text{O}$ 	$\text{CH}=\text{N}$ 	C_6H_5 MBBA
$\text{C}_2\text{H}_5\text{O}$ 	$\text{CH}=\text{N}$ 	C_6H_5 EBBA
$\text{C}_2\text{H}_5\text{O}$ 	$\text{CH}=\text{N}$ 	$\text{C}\equiv\text{N}$ PEAB

Bild 7.3 Strukturformeln verschiedener flüssiger Kristalle

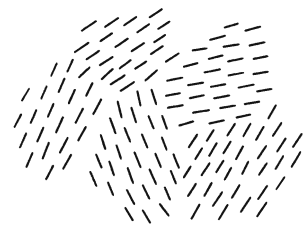


Bild 7.4 Flüssiger „Polykristall“ (nematisch)

Die geordnete Ausrichtung der Molekülachsen bewirkt, dass ein Flüssigkristall in verschiedenen Raumrichtungen unterschiedliche optische, elektrische und viskose Eigenschaften hat wie z. B. ein doppelbrechender fester Kristall (Abschn. 5.2.7). Das heißt:

Ein flüssiger Kristall ist anisotrop.

Genau wie ein fester Körper ist auch ein Flüssigkristall im Allgemeinen ein „Polykristall“ d.h., er besteht aus lauter kleinen „Einkriställchen“, auf welche jeweils eine bestimmte Orientierung der Molekülachsen begrenzt ist (Bild 7.4). Im Gegensatz zum festen Körper sind aber diese verschieden orientierten „einkristallinen“ Bereiche auf Grund ihrer thermischen Energie in ständiger Bewegung und sogar Drehung gegeneinander. Dadurch erfährt ein durch den Flüssigkristall gehender Lichtstrahl an jedem Einkriställchen eine andere Doppelbrechung. Er wird vielfach gestreut, sodass der flüssige Kristall trüb erscheint.

Erwärmt man einen flüssigen Kristall über die Schmelztemperatur ϑ_s hinaus, so wird beim sog. Klärpunkt mit der Temperatur ϑ_K auch noch die Richtungsordnung der Moleküle aufgehoben, es entsteht eine normale isotrope und deshalb durchsichtige Flüssigkeit.

Ein flüssiger Kristall existiert also zwischen Schmelzpunkt und Klärpunkt.

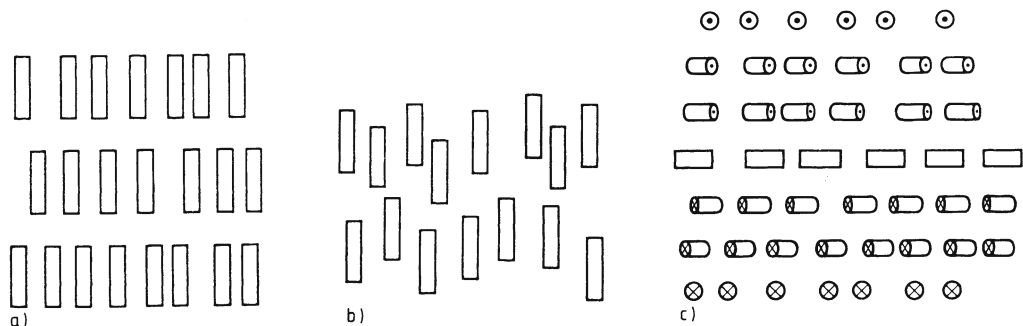
Tafel 7.5 Schmelz- und Klärpunkte

Stoff	Schmelztemperatur ϑ_S in °C	Klärtemperatur ϑ_K in °C
PAA	118	135
MBBA	22	42
MBBA + EBBA (Eutektikum)	0	60

Oft ist der flüssig-kristalline Zustand noch unterteilt: Unmittelbar nach Überschreiten des Schmelzpunktes bleibt häufig bei freier Verschiebbarkeit der Moleküle nicht nur die Richtungsordnung der Achsen, sondern sogar noch ein Teil der regelmäßigen Anordnung der Massenmittelpunkte erhalten. Diesen Zustand nennt man die smektische¹⁾ Phase, die Moleküle sind noch

in definierten Ebenen angeordnet (s. Bild 7.6a), welche bei weiterer Erwärmung in den Zustand mit ausschließlicher Richtungsordnung, die sog. nematische Phase²⁾ übergeht (s. Bild 7.6b). Bei vielen Stoffen entsteht beim Schmelzen auch direkt die nematische Phase.

Ein Spezialfall der nematischen Phase ist die sog. cholesterische³⁾ Phase, bei der die Massenmittelpunkte zwar ungeordnet, die Moleküle jedoch in Ebenen angeordnet sind, in denen jeweils eine bestimmte Achsrichtung vorliegt. Von Ebene zu Ebene sind die Achsen entsprechend einer Schraubenstruktur (s. Bild 7.6c) gegeneinander verdreht. Die „Ganghöhe“ dieser Schraubenstruktur liegt in der Größenordnung der Wellenlängen des sichtbaren Lichtes. Dadurch entstehen reizvolle farbige Reflexionen, die u.a. bereits 1888 zur Entdeckung der Flüssigkristalle durch F. Reinitzer führten.

**Bild 7.6** Flüssigkristall a) smektischer, b) nematischer, c) cholesterischer Zustand

Anwendungen

Temperaturanzeige. Der Übergang vom isotropen in den anisotropen Zustand und umgekehrt beim Klärpunkt ϑ_K erfolgt in einem Temperaturintervall der Größenordnung 0,5 °C. Da man diesen Übergang durch den Wechsel zwischen Trübung und Durchsichtigkeit deutlich sieht, kann man ihn zur Anzeige des Überschreitens der Klärtemperatur benutzen. Durch Kombination mehrerer Substanzen mit gestaffelten Klärtemperaturen lässt sich ein Thermometer bauen.

Elektro-optische Anzeige durch dynamische Steuerung. Ähnlich wie bei einem festen Körper gelingt es auch bei Flüssigkristallen, unter besonderen äußeren Bedingungen einen makroskopisch großen „Einkristall“ herzustellen. Zu diesem Zweck bringt man z.B. eine sehr dünne Schicht eines nematischen Flüssigkristalls zwischen zwei parallele Platten aus leitendem Glas, die einen Abstand in der Größenordnung 10 μm haben (Bild 7.7).

1) Griech.: smekma = Seife

2) Griech.: nema = Faden

3) Solche Moleküle sind meist Cholesterinderivate.

Durch geeignete Vorbehandlung der Glasoberflächen, auf die hier nicht eingegangen werden kann, erreicht man, dass sich nahezu alle Moleküle senkrecht zu den Glasplatten anordnen, und zwar über Flächen bis zu vielen hundert Quadratzentimetern (Bild 7.8a). Ein solcher „Flüssig-Einkristall“ ist auch unterhalb seines Klärpunktes klar durchsichtig.

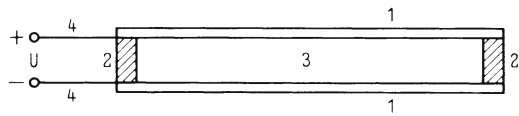


Bild 7.7 Zelle zur Beeinflussung eines Flüssigkristalles durch ein elektrisches Feld
1 leitende Glasplatte, 2 Isolatoren, 3 Flüssigkristall, 4 elektrische Zuleitungen

Legt man jetzt an die beiden leitenden Glasplatten eine elektrische Spannung von etwa 5 V an, sodass sich eine Feldstärke von etwa $5 \cdot 10^5$ V/m ergibt, so wird der Flüssigkristall plötzlich milchigtrüb. Steigert man die Feldstärke, so nimmt die Trübung zu und erreicht bei ca. 3 bis $5 \cdot 10^6$ V/m einen Sättigungswert. Diesen Effekt bezeichnet man als „Dynamische Streuung“ (DS).

Hierbei fließt auch ein Strom kleiner Dichte in der Größenordnung $2 \mu\text{A}/\text{cm}^2$, sodass die erforderliche elektrische Leistungsdichte nur etwa $100 \mu\text{W}/\text{cm}^2$ beträgt.

Zum Entstehen der dynamischen Streuung tragen relativ komplizierte Vorgänge bei. Wir begnügen uns deshalb mit einer vereinfachten

Modellvorstellung. Wie schon oben gesagt, stehen ohne Feld fast alle Moleküle senkrecht zu den Glasplatten. Legt man jetzt ein elektrisches Feld an, so ergeben sich zwei gegensätzliche Effekte:

1. Die Moleküle werden so gedreht, dass sie fast parallel zu den Glasplatten stehen (Bild 7.8b). Dies geschieht deshalb, weil die Achsen der elektrischen Dipole nicht mit den Molekülachsen übereinstimmen (Bild 7.8 c). Dreht das elektrische Feld nun die Dipolachsen in seine Richtung, so stellen sich die Moleküle fast quer dazu.

2. Der oben erwähnte kleine elektrische Strom wird von freien Ionen getragen, die sich in Feldrichtung bewegen. Hierbei üben sie Scherkräfte auf die quer zu ihrer Bewegungsrichtung stehenden Moleküle aus und versuchen, diese wieder senkrecht zu den Glasplatten zu stellen.

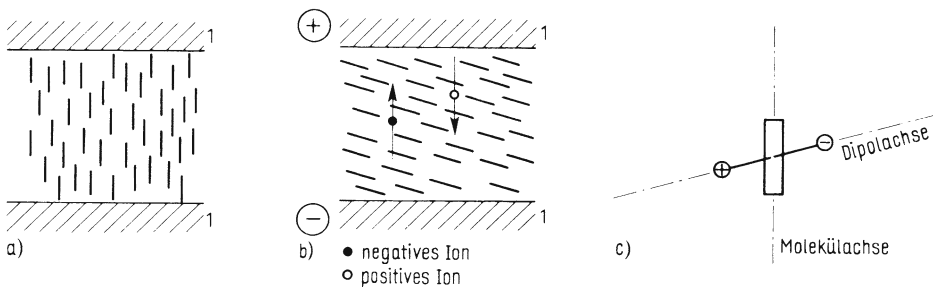


Bild 7.8 Nematischer Flüssigkristall

a) ohne elektrisches Feld

b) nach Anlegen eines elektrischen Feldes vor Einsetzen der Turbulenz (Die Pfeile geben den Weg der Ionen und die Richtung der durch sie verursachten „Rückstellkräfte“ an.)

c) Lage der Dipolachse in Bezug auf die Molekülachse

Der Widerstreit zwischen diesen beiden Effekten erzeugt Turbulenzen, die aus dem ursprünglichen flüssigen „Einkristall“ wieder einen flüssigen „Polykristall“ mit den bereits am Anfang dieses Abschnittes beschriebenen Eigenschaften machen. Weil die hierbei auftretende Lichtstreuung auf den oben dargestellten dynamischen Effekten beruht, spricht man von „dynamischer Streuung“.

Die dynamische Streuung kann man elektrisch ein- und ausschalten (Einschaltzeit ca. 100 ms, Ausschaltzeit ca. 100 ms bis 300 ms). Sie eignet sich deshalb zur Anzeige elektrischer Schaltzustände.

Durch geeignete Formgebung der Elektroden kann man auch Ziffern und Buchstaben anzeigen, z.B. in Rechnern.

Elektro-optische Anzeige durch elektrische Änderung der Doppelbrechung.

Benützt man als Flüssigkristalle Substanzen wie z.B. besonders präpariertes MBBA (Bild 7.3), die gegenüber den für die dynamische Streuung verwendeten eine viel kleinere elektrische Leitfähigkeit haben, so enthalten sie so wenige freie Ionen, dass bei Anlegen eines elektrischen Feldes der oben beschriebene 2. Effekt nur eine untergeordnete Rolle spielt. Es entstehen keine Turbulenzen und daher auch kein flüssiger „Polykristall“. Statt dessen wird der flüssige „Einkristall“ durch den oben dargestellten 1. Effekt nur in der in Bild 7.9 gezeichneten Weise teilweise oder ganz „deformiert“. Wegen der oben beschriebenen optischen Anisotropie ändern sich dabei auch die Lichtgeschwindigkeiten und damit die Gangunterschiede zwischen „ordentlichen“ und „außerordentlichen“ Lichtstrahlen (s. Abschn. 5.2.7.1), die durch den Flüssigkristall hindurch gehen. Bringt man eine solche Flüssigkristallschicht zwischen zwei gekreuzte oder parallele Polarisatoren, so kann man eine von der anliegenden Spannung abhängige Drehung der Polarisationssebene des Lichtes beobachten, die ebenfalls zur Anzeige elektrischer Zustände geeignet ist. Wegen der Abhängigkeit der wirksamen Gangunterschiede von der Lichtwellenlänge lassen sich sogar verschiedene Farben erzeugen.

Dieser Effekt heißt Elektrostatische Deformation aufgerichteter Phasen (DAP). – Er lässt sich übrigens auch an besser leitfähigen Substanzen beobachten, wenn man sie elektrischen Wechselfeldern aussetzt, deren Frequenz oberhalb einer Grenzfrequenz liegt, von welcher ab die Moleküle wegen ihrer Trägheit nicht mehr hin- und hergedreht werden können. Das ist bei manchen Stoffen bereits oberhalb 20 Hz der Fall. Außerdem eignen sich Stoffe, bei denen das Dipolmoment in Richtung der Molekülachsen liegt, wie z.B. PEAB (Bild 7.3).

Elektro-optische Anzeige durch Drehung der Polarisationssebene des Lichtes. Diese Art der Anzeige wird vorwiegend in Armbanduhren benutzt. Sie beruht auf dem sog. „Schadt-Helfrich-Effekt“. Bei diesem benutzt man nematische Flüssigkeiten, bei denen die Dipolmomente der Moleküle in Richtung der Molekülachsen liegen. Durch geeignete Vorbehandlung der Glasflächen erreicht man es, dass die Moleküle zwischen diesen parallel zu den Glasflächen und um 90° „verdrillt“ liegen (Bild 7.10a). Dadurch drehen sie die Polarisationssebene von einfallendem Licht um 90° . Zwischen gekreuzten Polarisatoren erscheint die Zelle also transparent. Legt man ein elektrisches Feld an, so dreht dieses alle Moleküle in Feldrichtung. Die Drehung der Polarisationssebene wird aufgehoben und das System Zelle–gekreuzte Polarisatoren wird undurchsichtig (Bild 7.10b). Die Schwellenspannungen hierfür liegen bei 1 V, die Betriebsspannungen zwischen 2 und 5 V bei Leistungsdichten von ca. 1 bis $50 \mu\text{W}/\text{cm}^2$.

Weitere Effekte und Anwendungen. Von diesen gibt es noch eine ganze Anzahl, z.B. Speicher- und Hysterese-Effekte. Ihre Behandlung würde jedoch den Rahmen dieses Buches überschreiten.

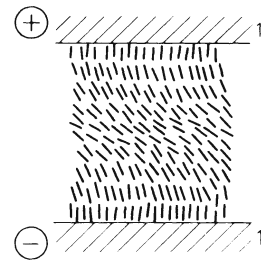


Bild 7.9 Nematischer Flüssigkristall, teilweise durch ein elektrisches Feld deformiert

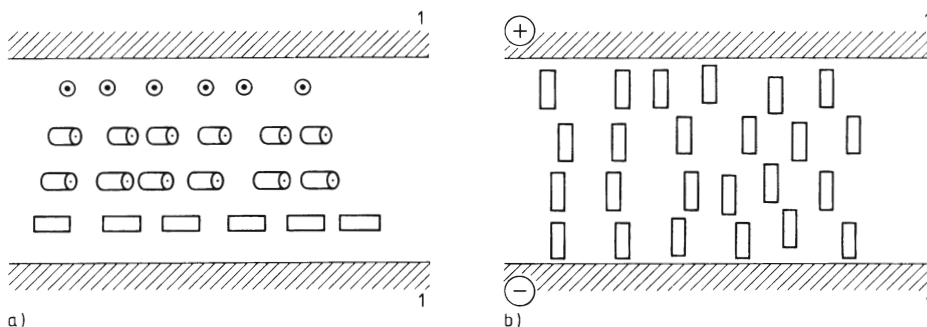


Bild 7.10 Nematisch verdrillter Flüssigkristall a) ohne Spannung b) mit anliegender Spannung
1 leitendes Glas

7.1.3 Bindungsarten

Die Bausteine eines Festkörpers (Atome, Ionen oder Moleküle) werden dadurch an ihren bestimmten Plätzen gehalten, dass sich gerade dort Anziehungs- und Abstoßungskräfte das Gleichgewicht halten. Bei kleinerem gegenseitigen Abstand r überwiegen die Abstoßungs-, bei größerem die Anziehungskräfte (vgl. Bild 7.11).

Die Natur der Abstoßungskräfte ist recht verwickelt. Sie beruht zum Teil auf der elektrostatischen Abstoßung der den Kern umgebenden Elektronenwolken, welche bei der Annäherung deformiert werden.

Wir beschränken uns im Folgenden auf die Beschreibung der Anziehungs- oder Bindungskräfte.

Sie lassen sich in drei große Gruppen einteilen, die entweder allein oder auch überlagert wirksam werden. Diese sind die Ionenbindung, die Atombindung und die metallische Bindung.

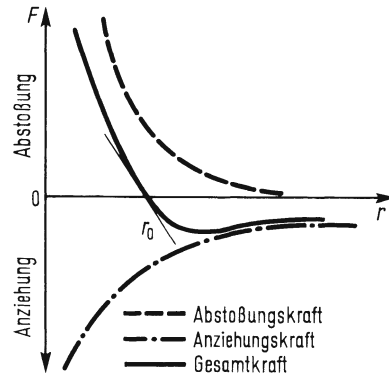


Bild 7.11 Kräfte zwischen Bausteinen eines Festkörpers

7.1.3.1 Ionenbindung

Eine Ionenbindung entsteht stets zwischen jeweils zwei unterschiedlichen Atomen, von denen eines außer den inneren Elektronen ein oder zwei locker gebundene s-Elektronen besitzt (z.B. Alkalien oder Erdalkalien, vgl. Abschn. 6.1.2.2), während dem anderen Partner ein oder zwei Elektronen zum Aufbau einer Edelgasschale fehlen (z.B. Halogen oder Sauerstoff). Wir betrachten als Beispiel das Kochsalz NaCl (vgl. auch Bild 7.1a). Das Natrium besitzt ein einzelnes 3s-Elektron. Dem Chlor mit seinen zwei 3s- und fünf 3p-Elektronen fehlt ein weiteres zur Komplettierung der Edelgasschale des Argon. Wie hier nicht näher erläutert werden soll, zeigt es sich, dass die Energieabgabe bei Einordnung des sechsten 3p-Elektrons in die Elektronenhülle des Cl und dem damit verbundenen Zusammenschluss größer ist als die Ablösearbeit für das 3s-Elektron des Na. Beide Atome werden daher zu Ionen, das Na zu Na^+ das Cl zu Cl^- . Zwischen beiden entgegengesetzt geladenen Ionen wirkt die elektrostatische Anziehungskraft. Aus vielen solchen Ionen bildet sich ein sog. Ionenkristall (Bild 7.1a). Die in ihm auf irgendeinen Baustein wirkende Bindungskraft lässt sich berechnen, wenn man neben der Anziehungskraft zwischen zwei unmittelbar benachbarten Partnern auch noch die Einflüsse weiter entfernt liegender Partner berücksichtigt. Dass die Bindungskraft im Ionenkristall eine elektrostatische Kraft ist, sieht man sehr deutlich an der leichten Wasserlöslichkeit. Denn nach Abschn. 3.2.3.1 ist die elektrostatische Anziehungskraft der Dielektrizitätszahl ϵ_r umgekehrt proportional. Diese ist aber bei Wasser ungewöhnlich hoch ($\epsilon_r = 81$), sodass die Anziehungskraft so klein wird, dass die Ionen allein schon durch die Wärmebewegung getrennt werden (Dissoziation).

Die hier am Beispiel des NaCl gezeigten Verhältnisse gelten für alle Ionenkristalle (außer z.T. der Wasserlöslichkeit). Wir fassen noch einmal zusammen:

Die Ionenbindung beruht auf der elektrostatischen Anziehung entgegengesetzt geladener Ionen, die dadurch entstehen, dass Elektronen des einen Atoms ganz in die Hülle des anderen übertreten.

7.1.3.2 Atombindung

Als Atombindung bezeichnet man die Bindung zwischen elektrisch neutralen Atomen.

Sie tritt dann auf, wenn keines der beteiligten Atome unter Energieabgabe Elektronen vom anderen vollständig übernehmen kann, um dadurch eine Edelgaskonfiguration zu erreichen. Daher tritt die Atombindung auch besonders häufig zwischen gleichen Partnern auf. Zum Beispiel vereinigen sich je zwei Wasserstoffatome H zu einem Wasserstoffmolekül H_2 oder viele Kohlenstoffatome zum Diamantgitter (Bild 7.1b). Aber auch z.B. die in der organischen Chemie sehr wichtige C-H-Bindung ist eine Atombindung.

Am einfachsten zu übersehen ist der Fall des H_2 -Moleküls. Dazu benutzen wir das Wellenmodell des Elektrons (vgl. Abschn. 6.1.2.3). Wir machen uns klar, dass wir den Grundzustand des $1s$ -Elektrons des Wasserstoffatoms durch eine räumliche stehende Welle beschreiben können, deren Form hier belanglos ist.

Koppelt man zwei schwingungsfähige Gebilde miteinander, so besitzen diese als Ganzes zwei Fundamentalschwingungen (vgl. Abschn. 5.1.9). Von diesen besitzt die tiefste Frequenz und damit die kleinste Energie, bei der beide Systeme in Phase schwingen.

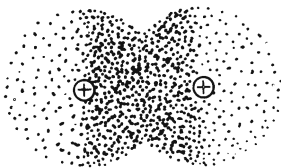


Bild 7.12 Atombindung

Wendet man diese Überlegung auf das Wasserstoffmolekül an, so muss der stabile Zustand derjenige sein, bei dem beide Elektronenwellen in Phase sind.

Dann muss die Wellenamplitude und damit die mittlere Elektronendichte zwischen beiden Kernen sehr hoch sein (Bild 7.12).

Das hat aber wieder eine resultierende elektrostatische Anziehungskraft zur Folge, da die positiven Kerne mehr von der großen negativen Ladung im Inneren als von der kleineren außen angezogen werden.

Da die Bindung durch Austausch zweier Elektronen erfolgt, nennt man sie oft auch Elektronen-Paar-Bindung und die Bindungskraft Austauschkraft.

Diese entsteht übrigens auch dann, wenn nur ein einziges Elektron ausgetauscht wird, wie dies z. B. beim H_2^+ -Ion der Fall ist.

In ähnlicher Weise wie beim Wasserstoffmolekül lassen sich auch andere Atombindungen verstehen, doch sind hier oft die Verhältnisse wegen der Wechselwirkung mehrerer Außenelektronen verwickelter. Zum Beispiel besitzt das Kohlenstoffatom C vier Außenelektronen, die mit je einem Elektron von vier anderen C-Atomen vier Paarbindungen erzeugen. Im Diamantgitter z.B. bindet auf diese Weise jedes C-Atom um sich herum jeweils vier andere C-Atome (Bild 7.1b). Durch diese vielfache Wechselwirkung entsteht z.B. die große Härte des Diamants.

Da bei der Atombindung keine verschieden geladenen Ionen gebildet werden, entsteht keine Löslichkeit in Stoffen mit hoher Dielektrizitätszahl (z. B. Wasser). Zusammengefasst stellen wir fest:

Die Atombindung entsteht durch Wechselwirkung von Elektronen, die in gleicher Weise beiden Atomen angehören.

7.1.3.3 Metallische Bindung

Die Natur der Zusammenhängekräfte bei der metallischen Bindung ist relativ schwer zu verstehen. Anschaulich lässt sich nur ein grober Überblick geben.

Aus der Tatsache, dass alle Metalle gute elektrische Leiter sind, folgt, dass in ihnen viele freie Elektronen vorhanden sein müssen. Jedes freie Elektron hinterlässt dabei ein positives Metallion. Die freien Elektronen gehören nicht mehr nur einem oder wenigen benachbarten Atomen an wie bei der Ionen- bzw. Atombindung, sondern müssen in gleicher Weise allen Metallionen eines Körpers zugeordnet werden.

Deshalb gibt es auch keine streng lokalisierten Bindungen wie bei den Atomkristallen, wodurch z.B. auch die gegenüber Atomkristallen viel kleinere Härte der Metalle plausibel wird.

Stark vereinfacht lässt sich Folgendes sagen:

Bei der metallischen Bindung bilden die freien Elektronen eine einzige den ganzen Kristall umfassende negative Ladungswolke, an welche die positiven Metallionen elektrostatisch gebunden sind.

7.2 Mechanische Eigenschaften

In der Technik interessieren sehr häufig die Formänderungen eines festen Körpers bei Einwirkung äußerer Kräfte. Davon sollen im Folgenden die wichtigsten Grunderscheinungen behandelt werden¹⁾.

Verformung durch äußere Kräfte. In Abschn. 7.1.3 hatten wir uns klar gemacht, dass die Bausteine eines festen Körpers durch Gleichgewicht zwischen Abstoßungs- und Anziehungskräften auf ihrem Platz gehalten werden. Man betrachte noch einmal Bild 7.11. Lässt man auf den gesamten Körper eine äußere Kraft wirken, so verstärkt diese je nach ihrer Richtung entweder die Anziehungskraft (bei Druck) oder die Abstoßungskraft (bei Zug). Dadurch rücken die Bausteine näher zusammen oder weiter auseinander. In einem gewissen Bereich sind dabei die Verschiebungen den Kräften proportional (Bereich der Tangente in Bild 7.11).

¹⁾ Für das Verständnis weitergehender Zusammenhänge bediene man sich der Fachliteratur über Festigkeitslehre, z.B. [1].

Hookesches Gesetz: Wirkt auf einen stabförmigen Körper mit der Länge l und dem Querschnitt A die Zugkraft F , so erfährt er eine relative Längenänderung, die sog. Dehnung $\varepsilon = \Delta l/l$. Diese ist der Zugspannung $\sigma = F/A$ proportional.

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \frac{F}{A}; \quad \varepsilon = \frac{1}{E} \sigma \quad (7.1)$$

Die Konstante E ist der sog. Elastizitätsmodul. Er hängt vom Stoff und dessen Vorbehandlung (z.B. Glühen, Schmieden usw.) ab (s. Tafel 7.14).

In einem bestimmten Zugspannungsbereich bis zur sog. Streckgrenze verschwindet nach Wegnahme der äußeren Kraft die Dehnung wieder. Dies ist der elastische Bereich, in dem Gl. (7.1) gilt. Steigert man die Zugspannung weiter, so wächst die Dehnung nicht mehr proportional zu σ . Man gelangt in den Bereich der plastischen Verformung. Das Ergebnis eines solchen Zugversuches an einem stabförmigen Körper registriert man nach DIN 50145 in einem Spannungs-Dehnungsdiagramm, wie es für zwei verschiedene Werkstoffarten in Bild 7.13 dargestellt ist. Hierbei ist Bild 7.13a typisch für reine Metalle wie Aluminium, Kupfer, Nickel, für sog. austenitische Stähle und relativ hoch angelassene Vergütungsstähle. Bei diesen nimmt ab der Streckgrenzenspannung $R_{eS} = F_{eS}/A_0$ die Verformung nicht-linear zu, bis bei der sog. Zugfestigkeit $R_m = F_{\max}/A_0$ die höchstmögliche Spannung erreicht wird. (A_0 ist der Anfangsquerschnitt). In diesem Bereich beginnt das Material durch Änderung seines Gittergefüges zu „fließen“, wodurch ein zunehmender Anteil der Verformung irreversibel wird. Von R_m ab beginnt der Stab sich besonders stark einzuschnüren, bis er im Punkte B bei der Zerreißspannung $R_R = F_R/A_B$ zerreißt. (A_B ist der Bruchquerschnitt, ε_B die Bruchdehnung.) Für manche praktischen Zwecke nimmt man in Kauf, dass nach Wegnahme der Zugkraft (nach DIN) 0,2% der erreichten Verformung als plastische Verformung zurückbleiben. Dann darf man bis zur sog. 0,2%-Dehnungsgrenze $R_{p0,2}$ belasten.

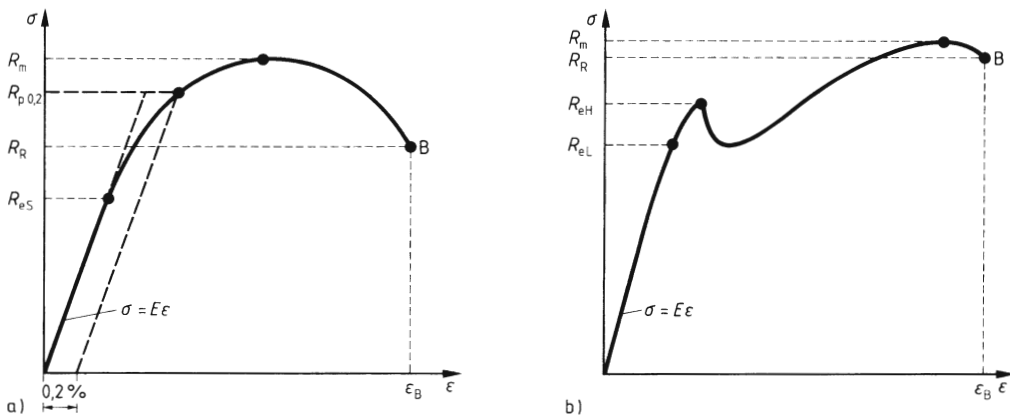


Bild 7.13 Dehnung als Funktion der Spannung

Um eine Vorstellung von den Größenordnungen zu geben, sei erwähnt, dass z.B. bei Federstahl 55 Si 7 die Zugfestigkeit R_m etwa 1300 N/mm^2 und die Bruchdehnung $\varepsilon_B = 0,6\%$ beträgt bei dem Elastizitätsmodul $E = 2 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$.

Andere Stoffe, z.B. gewisse niedrig legierte Kohlenstoffstähle, zeigen einen Spannungsdehnungsverlauf gemäß Bild 1.73b. Sie besitzen über der unteren Streckgrenze R_{eL} , die

wieder das Ende des elastischen Bereiches kennzeichnet, eine obere Streckgrenze R_{eH} , bei welcher eine drastische Änderung der Gitterkonfigurationen einsetzt, die zu einer starken Verformung bei abnehmender Belastung führt, bis bei weiterer Dehnung bei R_m die Zugfestigkeit und bei R_R die Zerreißgrenze erreicht wird.

Der Quotient

$$\mu = \frac{\text{relative Änderung der Querabmessung}}{\text{relative Längenänderung}}$$

heißt Poissonsche¹⁾ Zahl.

Diese ist eine für jeden Stoff charakteristische Konstante, deren Zahlenwert etwa zwischen 0,2 und 0,5 liegt (vgl. Tafel 7.14).

Tafel 7.14 Elastizitätsmodul E in N/m^2 und Poissonsche Zahl μ

Stoffe	E in N/m^2	μ
Aluminium	6,3... 7,3 · 10 ¹⁰	0,34
Blei	1,5... 1,7 · 10 ¹⁰	0,45
Grauguss	7,5... 13 · 10 ¹⁰	0,26
Stahl	20... 22 · 10 ¹⁰	0,20
Kupfer	10... 13 · 10 ¹⁰	0,35
Wolfram	35... 36 · 10 ¹⁰	0,17
Glas	5... 8 · 10 ¹⁰	0,2
Holz	0,5... 1,2 · 10 ¹⁰	–
Kautschuk	3... 8 · 10 ⁵	–
Thermoplaste	0,1... 0,7 · 10 ¹⁰	–
Polyäthylen	ca. 10 ¹⁰	–

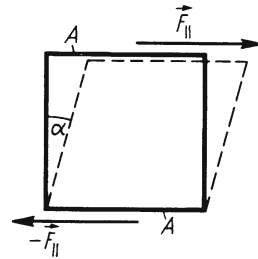


Bild 7.15 Scherung

Für manche technische Anwendungen ist die Formänderung eines Körpers von Interesse, die auftritt, wenn man an zwei einander gegenüberliegenden Flächen mit den Beträgen A zwei auf die Flächen gleichmäßig verteilte Kräfte \vec{F} und $-\vec{F}$ parallel zu den Flächen angreifen lässt (Bild 7.15). Der Körper erfährt dabei eine Scherung, wie man sie bequem z. B. an einem dicken Buch beobachten kann, dessen beide Einbanddeckel man mit den Händen in entgegengesetzten Richtungen gegeneinander verschiebt. Als Maß für die Scherung dient der in Bild 7.15 eingezeichnete Scherwinkel α .

Im elastischen Bereich ist der Scherwinkel α der Schubspannung F_{\parallel}/A proportional. Der Reziprokwert des Proportionalitätsfaktors heißt Scherungs- oder Schubmodul G

$$\alpha = \frac{1}{G} \frac{F_{\parallel}}{A}$$

Zwischen dem Schubmodul G , dem Elastizitätsmodul E und der Poissonschen Zahl μ besteht die Beziehung

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

¹⁾ S. D. Poisson (1781 bis 1849)

Härte. Ein Stoff 1 heißt härter als ein Stoff 2, wenn Stoff 1 den Stoff 2 leichter ritzt als umgekehrt. Man ordnet die Stoffe in einer Härteskala nach Mohs¹⁾: 1. Talk, 2. Gips, 3. Kalkspat, 4. Flussspat, 5. Apatit, 6. Feldspat, 7. Quarz, 8. Topas, 9. Korund, 10. Diamant.

In der Technik benutzt man oft die sog. Brinellhärte²⁾. Sie wird bestimmt, indem man eine Stahlkugel (Durchmesser 5 mm bis 20 mm) mit der Kraft F auf eine ebene Fläche des Prüflings drückt. Dabei erzeugt sie einen Eindruck mit der Fläche A . Der Quotient aus F und A heißt Brinellzahl. Andere Verfahren zur Härtemessung entnehme man der Literatur über Festigkeitslehre z. B. [7].

Anwendungen. Formänderungen von Maschinenteilen spielen überall da eine Rolle, wo Kräfte auftreten. Besonders wichtig ist die Kenntnis der Zerreißspannungen R_R . Die tatsächlich vorkommenden Spannungen dürfen nur einen Bruchteil von R_R ausmachen (mehrfache Sicherheit).

Aufgaben zu Abschn. 7.2

1. Wie groß ist die Federkonstante D eines Drahtes mit dem Elastizitätsmodul E , der Länge l und dem Querschnitt A ?
2. Ein Stahldraht mit der Länge 1,5 m und dem Querschnitt 1 mm^2 ist mit einem Kupferdraht mit

der Länge 2 m und dem Querschnitt 4 mm^2 verbunden.

Um wie viel verlängert sich der gesamte Draht bei der Zugkraft 500 N? ($E_{\text{Stahl}} = 2 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$, $E_{\text{Kupfer}} = 1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$).

7.3 Energiebändermodell

Für das Verständnis der Vorgänge in den Elektronenhüllen der Atome und Moleküle erweist sich die Kenntnis der dort möglichen Energieniveaus als sehr nützlich (vgl. Abschn. 6.1.2). Von gleicher Bedeutung für die Festkörper ist das sog. Energiebändermodell. Es entsteht aus dem Energieschema der Einzelatome, die den Festkörper bilden, auf folgende Weise: Benutzt man das Wellenmodell des Elektrons, so gehören gemäß Abschn. 6.1.2.3 zu den Energieniveaus der Elektronen im Einzelatom ganz bestimmte Schwingungsformen der Elektronenwellen. Dabei entspricht jedes Energieniveau der Eigenfrequenz eines schwingungsfähigen Systems.

Koppelt man zwei gleiche schwingungsfähige Systeme miteinander, so besitzt das Gesamtsystem zwei Eigenfrequenzen, die zu den beiden möglichen Fundamentalschwingungen gehören (vgl. Abschn. 5.1.8, gekoppelte Pendel, Bandfilter). Drei gleiche gekoppelte Systeme besitzen drei, N gleiche gekoppelte Systeme N Eigenfrequenzen. Dabei liegen die einzelnen Eigenfrequenzen umso weiter auseinander, je stärker die Kopplung ist.

Demnach spalten alle Energieniveaus eines Einzelatoms in jeweils N benachbarte Niveaus auf, wenn N gleiche Atome in einem Atomverband (Molekül oder Festkörper) miteinander in Wechselwirkung treten (Bild 7.16). Wegen der außerordentlich großen

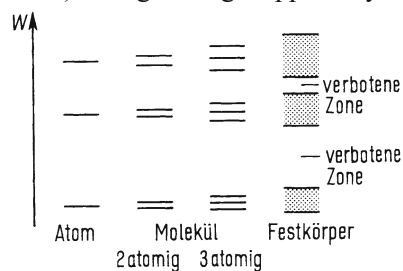


Bild 7.16 Entstehung des Energiebändermodells aus den Energieniveaus der Einzelatome

¹⁾ F. Mohs (1773 bis 1839).

²⁾ A. Brinell (1845 bis 1925).

Zahl N der in einem Festkörper vereinigten Atome entstehen so viele Einzelniveaus, dass man sie praktisch nicht mehr voneinander unterscheiden kann.

Die Gesamtheit aller Energieniveaus, die aus einem bestimmten Energieniveau eines Einzelatoms entstanden sind, bilden ein Energieband (Bild 7.16). In diesem kann auf Grund des Pauli-Prinzips (vgl. Abschn. 6.1.2.2) jedes Niveau von jeweils zwei Elektronen mit entgegengesetzter Spinrichtung, das ganze Band also von insgesamt $2N$ Elektronen, besetzt werden.

Nicht erlaubte Energiebereiche zwischen den Bändern heißen verbotene Zonen.

Die Kopplung zwischen den Elektronen der Atome im Gitter ist umso schwächer, je näher sich diese Elektronen an den Atomkernen befinden, da sie von den äußeren Elektronen abgeschirmt werden. Daher wird die Aufspaltung und damit die Breite der zugehörigen Energiebänder für niedrige Niveaus immer kleiner. Dagegen kann die Breite von Bändern hoher Energie in manchen Fällen so groß werden, dass sich sogar zwei Bänder überlappen.

Fermi-Dirac-Energieverteilung

Beim Bändermodell begegnen wir einem interessanten Aspekt der Energieverteilung einer großen Zahl von Elektronen, die miteinander in Wechselwirkung sind. Wie bereits oben erwähnt, folgt aus dem Pauli-Prinzip, dass jedes Energieniveau nur von jeweils zwei Elektronen besetzt werden kann. Das bedeutet aber, dass sich auch bei der Temperatur 0 K bereits der größte Teil der Elektronen auf höheren Energie-Niveaus befinden muss. Das höchste von ihnen bei 0 K besetzte Energieniveau heißt Fermi-Energie W_F ¹⁾ (vgl. Abschn. 6.1.2.4).

Dieser Sachverhalt steht in erheblichem Gegensatz zu dem Verhalten von Teilchen, die nicht dem Pauli-Prinzip unterliegen, z.B. Molekülen einer bestimmten Gasmenge. Letztere können im Prinzip alle die gleiche Energie haben, z.B. bei 0 K alle nahezu die Energie Null. Dieser Unterschied kommt auch in den Gesetzmäßigkeiten für die Energieverteilung zum Ausdruck. Während das Verhalten von Gasmolekülen durch die Maxwell-Boltzmann-Statistik (vgl. Abschn. 2.3.1.3) beschrieben wird, unterliegen die Elektronen der sog. Fermi-Dirac-Statistik¹⁾.

Im thermodynamischen Gleichgewicht gilt für die Wahrscheinlichkeit, dass ein Energieniveau besetzt ist, die Fermi-Dirac-Verteilungsfunktion

$$p(W, T) = \frac{1}{1 + e^{\frac{W - W_F}{kT}}} \quad (7.2)$$

Die hieraus resultierende Verteilung der Elektronen auf die Energie-Niveaus ist in Bild 7.17 einmal bei 0 K und einmal bei $T > 0$ K dargestellt.

Man erkennt, dass bei der Temperatur $T = 0$ der Exponentialausdruck für $W < W_F$ gegen Null geht, sodass hier $p = 1$ gilt, also wie bereits oben gesagt, jedes Energieniveau wirklich besetzt ist.

¹⁾ Enrico Fermi (1901 bis 1954) und Paul Dirac (1902 bis 1984).

Bei $W = W_F$ ist die Besetzungswahrscheinlichkeit bei jeder Temperatur gleich $1/2$.

Die Energieverteilung bei höheren Temperaturen rührt daher, dass die Elektronen zusätzlich zu ihren quantenphysikalisch bedingten Energien noch thermische Energie besitzen. Diese bewirkt, dass ein Teil der Elektronen, deren Energien in der Nähe der Fermi-Energie liegen, Energien $> W_F$ annehmen können. Entsprechend viele Energieniveaus unterhalb der Fermi-Energie werden dadurch nicht mehr besetzt (s. Bild 7.17).

Daraus ergibt sich folgende nützliche

Definition: Die Fermi-Energie W_F hat einen solchen Wert, dass die Wahrscheinlichkeit, ein Energie-Niveau oberhalb W_F besetzt zu finden, genau so groß ist wie die Wahrscheinlichkeit, ein Niveau, das um die gleiche Energiedifferenz unterhalb W_F liegt, unbesetzt zu finden.

Wenn der Prozentsatz der Elektronen, die auf Grund ihrer Wärmebewegung die Fermi-Energie überwinden können, bezogen auf die Gesamtzahl der Elektronen nicht zu groß ist, lässt sich ihre Energieverteilung mit guter Näherung mit der Maxwell-Boltzmann-Statistik beschreiben. Davon werden wir in den nächsten Abschnitten Gebrauch machen.

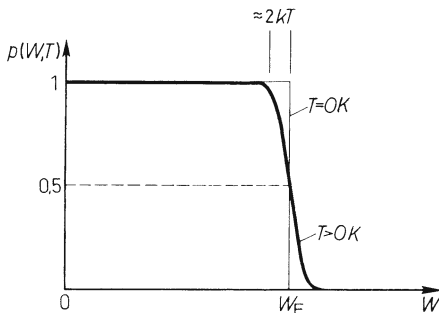


Bild 7.17 Fermi-Dirac-Energieverteilung bei $T=0\text{ K}$ und $T>0\text{ K}$. W_F ist die Fermi-Energie.

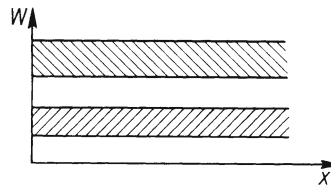


Bild 7.18 Einführung der Ortskoordinate x in das Energiebändermodell

Einführung der Ortskoordinate in das Energiebändermodell

Wie beim Energieschema des Einzelatoms hat auch im Energiebändermodell der Festkörper die Abszisse zunächst eigentlich keine Bedeutung. Die Energieniveaus werden nur deshalb durch Striche gekennzeichnet, weil diese besser zu sehen sind als Punkte. In vielen Fällen ist es jedoch praktisch, die Lage der Energieniveaus in Abhängigkeit vom Ort im Festkörper anzugeben. Dazu ernennt man die Abszisse zur Ortskoordinate x (Bild 7.18), wobei der Nullpunkt willkürlich an eine passende Stelle gelegt wird, z.B. an eine Kristallkante oder in die Mitte einer Sperrschicht (s. Abschn. 7.4.3.2).

7.4 Elektrische Leitung

Ein Körper leitet den elektrischen Strom, wenn in ihm frei bewegliche Ladungsträger vorhanden sind (vgl. Abschn. 3.1.1.2). Im Gegensatz zu Flüssigkeiten und Gasen spielt bei Festkörpern die Ionenleitung nur eine untergeordnete Rolle. Wir beschränken uns daher auf die Betrachtung der Leitung durch freie Elektronen. Aus Gründen der Anschaulichkeit verwenden wir im Folgenden das Teilchenmodell des Elektrons.

Ein frei bewegliches Elektron kann im Gegensatz zu einem gebundenen Elektron in einem elektrischen Feld Energie gewinnen. Das ist im Allgemeinen aber nur möglich, wenn es ein Energieniveau besitzt, das in einem nur teilweise besetzten Band liegt. Denn nur dort kann es sich auf ein höheres Energieniveau begeben.

Hat ein Festkörper ein nicht voll besetztes Energieband, so besitzt er elektronische Leitfähigkeit.

Ein nicht voll besetztes Energieband heißt Leitungsband. Sein tiefstes Energieniveau bezeichnen wir mit W_L .

Befindet sich hingegen ein Elektron auf einem Energieniveau in einem vollständig durch $2N$ Elektronen besetzten Energieband, in dem also sämtliche Niveaus durch Elektronenpaare mit antiparallelen Spins besetzt sind, so müsste es in einem elektrischen Feld mindestens die Energiedifferenz der verbotenen Zone bis zum nächsthöheren leeren Band aufnehmen, um frei beweglich zu werden und damit zum Stromfluss beizutragen. Das ist aber nur bei sehr hohen Feldstärken im Inneren des Festkörpers möglich.

Die Freisetzung von Elektronen im Inneren eines Festkörpers durch sehr hohe elektrische Feldstärken heißt Zener-Effekt¹⁾.

Im Allgemeinen reicht die Feldstärke hierzu jedoch nicht aus. Daher gilt:

Elektronen, deren Energieniveaus in einem voll besetzten Energieband liegen, sind nicht frei beweglich und verursachen daher keine Leitfähigkeit.

Das oberste voll besetzte Energieband heißt Valenzband.

Sein höchstes Energieniveau bezeichnen wir mit W_V .

7.4.1 Metallische Leiter

Die Leitfähigkeit der Metalle wird durch freie Elektronen verursacht (vgl. Abschn. 3.2.2). Also müssen Metalle ein nur teilweise besetztes Energieband, ein Leitungsband, besitzen. Das ist bei den Alkaliometallen sowie z.B. bei Kupfer, Silber und Gold ohne weiteres verständlich. Bei ihnen befindet sich im obersten Energieniveau jedes Atoms nur ein einziges s-Elektron. Also sind die $2N$ Niveaus des entsprechenden obersten Energiebandes nur zur Hälfte besetzt (Bild 7.19a). Diese Metalle sind demnach gute Leiter.

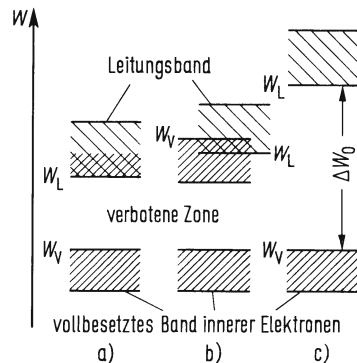


Bild 7.19 Bändermodell eines einwertigen Metalles (a), eines zweiwertigen Metalles (b) und eines Isolators (c)

¹⁾ C. Zener, geb. 1905.

Die Metalle der zweiten Gruppe des Periodensystems der Elemente, nämlich die Erdalkalimetalle sowie Zink, Kadmium, Quecksilber und andere besitzen je Atom in der äußeren Schale zwei s-Elektronen, sodass das entsprechende Energieband voll besetzt ist. Durch intensive Wechselwirkung zwischen den Elektronen ist es jedoch so verbreitert, dass es in das nächsthöhere leere Band hineinragt und mit ihm zusammen wieder ein Leitungsband bildet (Bild 7.19b).

Daher gilt

Metalle besitzen stets eine große Zahl freier Elektronen, die unabhängig von der Temperatur ist.

Dass trotzdem die Leitfähigkeit der Metalle mit steigender Temperatur abnimmt, liegt daran, dass die Bewegung der Elektronen durch die Schwingungen der Gitteratome gestört wird (vgl. Abschn. 3.3.3.3).

Halbmetalle. Bei Arsen, Antimon und Wismut ist die in Bild 7.19b gezeichnete Überlapung von Valenz- und Leitungsband nur so gering, dass ihre Leitfähigkeit ein bis zwei Größenordnungen unter derjenigen von Metallen liegt. Da der Leitungsmechanismus jedoch demjenigen von Metallen sehr ähnlich ist, bezeichnet man diese Stoffe als Halbmetalle.

7.4.2 Isolatoren

Besitzt ein Stoff kein nur teilweise besetztes Energieband und ist die Energiedifferenz ΔW_0 zwischen dem obersten voll besetzten und dem nächsthöheren leeren Band größer als etwa 2 eV, so ist der Stoff ein Isolator (Bild 7.19c).

Erst in sehr starken elektrischen Feldern vermögen einzelne gebundene Elektronen so viel Energie zu gewinnen, dass sie die verbotene Zone überspringen können und damit zu freien Elektronen werden (vgl. S. 589). Es kommt dann zum sog. Spannungsdurchschlag.

Der obengenannte Wert von etwa 2 eV ist ziemlich willkürlich gewählt. Er gibt ungefähr die Grenze zwischen Isolatoren und Halbleitern an, wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden.

7.4.3 Halbleiter

Festkörper, die weder Metalle noch Isolatoren sind, deren elektrische Leitfähigkeit also zwischen $10^3 \Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$ und $10^{-6} \Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$ liegt, nennt man Halbleiter.

Zu den technisch wichtigsten Halbleitern gehören die in der vierten Gruppe des Periodensystems stehenden Elemente Silicium (Si) und Germanium (Ge) sowie die Verbindung Siliciumkarbid (SiC), einige aus Elementen der dritten und fünften Gruppe gebildete intermetallische Verbindungen, sog. A_{III}-B_V-Verbindungen wie z.B. Indiumantimonid (InSb) oder Galliumarsenid (GaAs), und außerdem bestimmte Ionenkristalle wie z.B. Bariumoxid und Kupfer(I)oxid (früher „Kupferoxydul“) (vgl. Abschn. 7.4.3.2). Wie in den nächsten Abschnitten gezeigt wird, kann man bei einigen dieser Stoffe die Leitfähigkeit durch Zusatz gewisser Mengen von Fremdstoffen beträchtlich erhöhen.

Der Leitungsmechanismus folgt bei allen Halbleitern grundsätzlich sehr ähnlichen Gesetzmäßigkeiten. Er soll daher am Beispiel der technisch wichtigen Stoffe Germanium und Silicium behandelt werden.

7.4.3.1 Eigenleitung

Die Elemente der vierten Gruppe des Periodensystems kristallisieren meist im sog. Diamantgitter, wie es in Bild 7.1b dargestellt ist. In ihm ist jedes Atom an vier Nachbaratome gebunden. Die Bindung erfolgt durch die vier Außenelektronen jedes Atoms, die mit je einem Elektron der vier Nachbaratome vier Paarbindungen, die sog. Valenzen, herstellen. Bild 7.20 zeigt ein entsprechendes zweidimensionales Schema. Da die äußeren Elektronen nur paarweise mit entgegengesetzten Spins auftreten, ist das zugehörige Energieband, das Valenzband, demnach voll besetzt, und die Stoffe müssten Isolatoren sein. Das ist bei sehr tiefen Temperaturen auch der Fall.

Während jedoch der Diamant (C) auch noch bei Zimmertemperatur ein guter Isolator ist, besitzen Silicium (Si) und Germanium (Ge) hier eine geringe und Zinn (Sn) eine recht gute Leitfähigkeit. Das liegt daran, dass bei den drei letztgenannten Elementen die Elektronen relativ schwach an die Gitteratome gebunden sind, sodass bereits die Wärmebewegung des Gitters ausreicht, um eine mehr oder weniger große Anzahl von Elektronen frei beweglich zu machen.

Man übersieht diesen Sachverhalt sehr gut an den zugehörigen Energiebändern (Bild 7.21). Beim Diamant ist der Energieunterschied ΔW_0 zwischen dem obersten besetzten Band, dem Valenzband, und dem nächsthöheren leeren Band, dem Leitungsband, so groß, dass die thermische Energie nicht ausreicht, um ihn zu überwinden. Die viel kleinere Differenzenergie bei Si, Ge und Sn kann jedoch thermisch relativ vielen Elektronen erteilt werden, beim Sn sogar so vielen, dass es praktisch metallisch leitend ist.

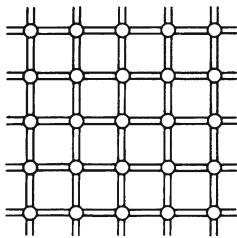


Bild 7.20 Zweidimensionales Modell des Diamantgitters

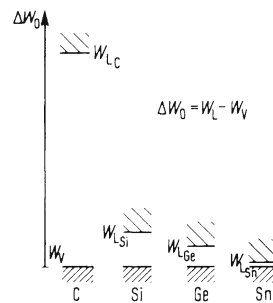


Bild 7.21 Breiten der verbotenen Zonen W_0 bei verschiedenen Stoffen (C Diamant)

Löcherleitung. Ein Elektron, das eine bestimmte Paarbindung verlassen hat, hinterlässt dort durch sein Fehlen eine positive Ladung. Man spricht auch von einer Elektronenfehlstelle oder kurz von einem „Loch“.

Löcher tragen wie freie Elektronen zur Leitfähigkeit bei.

Legt man nämlich an den Halbleiterkristall eine elektrische Spannung, so bewegen sich die freien Elektronen zum positiven und die Löcher zum negativen Pol, wo sie schließlich

durch Elektronen, die aus dem Anschlussdraht in den Kristall eintreten, aufgefüllt werden. Man kann sich eine solche Lochwanderung etwa so vorstellen, wie das Nachrücken vieler Theaterbesucher in einer Sitzreihe, in deren Mitte ursprünglich ein leerer Platz war, der dann am Anfang der Reihe von einem Nachzügler eingenommen wird (vgl. auch Bild 7.22). Genau genommen wandert jedes Loch also durch Vorrücken vieler Bindungs- oder Valenzelektronen in entgegengesetzter Richtung. Statt der Bewegung der vielen beteiligten Elektronen erfasst man jedoch bequemer die Bewegung der viel weniger zahlreichen Löcher. Im Bändermodell spielt daher für die Löcher das ursprünglich voll besetzte Valenzband eine analoge Rolle wie das Leitungsband für die Elektronen (s. oben).

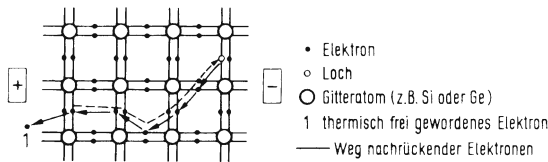


Bild 7.22 Löcherleitung

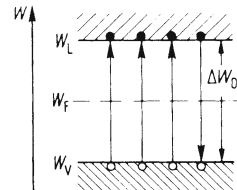


Bild 7.23 Elektron-Loch-Paarbildung im Bändermodell W_F Fermienergie

Paarbildung und Rekombination. Es ist klar, dass jedes freie Elektron ein Loch hinterlässt. Beide entstehen also immer als Paare. Deren Anzahl wächst mit steigender Temperatur, weil mit dieser die thermische Gitterenergie und damit die Wahrscheinlichkeit größer wird, dass ein Elektron frei beweglich wird (Bild 7.23).

Je mehr freie Elektronen vorhanden sind, desto wahrscheinlicher wird es aber auch, dass einige von ihnen durch thermische Stöße so viel Energie verlieren, dass sie sich wieder von einem Loch einfangen lassen. Man nennt diesen Vorgang Wiedervereinigung oder Rekombination. Wie hier nicht näher gezeigt werden soll, erfolgt er besonders häufig an irgendwelchen Gitterfehlstellen. Im thermischen Gleichgewicht ist die Zahl der pro Zeit erzeugten Elektron-Loch-Paare gleich der durch Rekombination verschwindenden, sodass sich eine nur von der Temperatur und der Breite der verbotenen Zone W_0 abhängige konstante Elektronendichte n_- und Löcherdichte n_+ einstellt. Für diese Dichten gilt die

Definition:

$$\text{Elektronendichte } n_- = \frac{\text{Zahl der freien Elektronen}}{\text{Volumen}}$$

$$\text{Löcherdichte } n_+ = \frac{\text{Zahl der Löcher}}{\text{Volumen}}$$

Ist $n_- = n_+$, so spricht man von Eigenleitung.

Temperaturabhängigkeit der Elektronen- und Löcherdichte. Da die freien Elektronen und Löcher thermisch erzeugt werden, kann man die Abhängigkeit ihrer Dichten von der Temperatur ähnlich beschreiben wie bei Dampfmolekülen, die unter Überwindung einer Energieschwelle, der Austrittsarbeit, aus einer Flüssigkeit herauskommen, nämlich mit Hilfe des Boltzmann-Faktors (s. Abschn. 2.4.5.4). Die Energieschwelle, welche die Elektronen überwinden müssen, bezieht man jedoch nicht auf die obere Bandkante des Valenzbandes W_V (Bild 7.23), sondern auf die in Abschn. 7.3 definierte Fermi-Energie W_F .

Diese Betrachtung gilt nur für den Fall, dass die Zahl der freien Elektronen sehr klein gegenüber der Zahl der Gitteratome ist, was bei Halbleitern meist erfüllt ist. Dies ist dann der Fall, wenn die Energiedifferenz $(W - W_F)$ viel größer als kT ist. Bei $(W - W_F) > 2,5 kT$ kann man dann mit guter Näherung die 1

im Nenner der Fermi-Verteilungsfunktion (Gl. (7.2)) vernachlässigen, sodass der Ausdruck $\approx e^{-\frac{W-W_F}{kT}}$ wird.

Die von den Elektronen zu überwindende Energieschwelle ergibt sich damit als Differenz zwischen dem unteren Energieniveau des Leitungsbandes, W_L , und der Fermi-Energie, also als $W_L - W_F$. Daraus folgt für die

Temperaturabhängigkeit der Elektronendichte

$$n_- = n_0 e^{-\frac{W_L - W_F}{kT}} \quad (7.3)$$

n_0 ist hierbei die sog. „effektive Zustandsdichte“ im Valenzband¹⁾.

Die Temperaturabhängigkeit der Löcherdichte n_+ ist entsprechend

$$n_+ = n_0 e^{-\frac{W_F - W_V}{kT}} \quad (7.4)$$

Bei eigenleitenden Halbleitern liegt W_F etwa in der Mitte der verbotenen Zone (Bild 7.23).

$$W_L - W_F = W_F - W_V = \frac{\Delta W_0}{2}. \text{ Also ist } n_- = n_+ = n_0 e^{-\frac{\Delta W_0}{2kT}}$$

In Germanium z. B. ist bei Zimmertemperatur $n_- = n_+ = 2,5 \cdot 10^{13}/\text{cm}^3$.

Da Germanium $4,4 \cdot 10^{22}$ Atome pro cm^3 besitzt, hat also nur etwa jedes milliardste Atom ein Elektron-Loch-Paar zur Verfügung gestellt, während bei einem Metall jedes Atom wenigstens ein freies Elektron abgegeben hat!

Sehr häufig bezeichnet man die Dichte der freien Elektronen bei Eigenleitung als Eigenleitungsdichte oder Intrinsic-Dichte n_i ²⁾.

Elektrische Leitfähigkeit. In Abschn. 3.2.2.1, Ohmsches Gesetz, wird gezeigt, dass sich die elektrische Leitfähigkeit κ eines Elektronenleiters als Produkt aus der Elementarladung e_0 , der Elektronendichte n_- und der Elektronenbeweglichkeit b_- ergibt. Es gilt $\kappa = e_0 n_- b_-$. Wie oben erläutert wurde, tragen bei einem Halbleiter außer den Elektronen auch die Löcher zur Stromleitung bei. Deshalb wird jetzt die

Elektrische Leitfähigkeit $\kappa = e_0 (n_- b_- + n_+ b_+)$; hierbei ist b_- die Beweglichkeit der Elektronen und b_+ diejenige der Löcher.

b_- und b_+ haben in verschiedenen Materialien und auch untereinander verschiedene Werte (s. Tafel 7.24). Darüber hinaus hängen diese in komplizierter Weise von der Temperatur ab. Auf eine nähere Untersuchung der Gründe dafür wollen wir hier verzichten. – Die Messung der Beweglichkeit erfolgt mit dem in Abschn. 3.3.2.1 beschriebenen Halleffekt. –

¹⁾ Das ist die Zahl der besetzten Energieniveaus pro Volumen, aus denen die Elektronen thermisch „befreit“ werden. n_0 ist ebenfalls noch etwas temperaturabhängig, was aber bei den üblichen, technisch vorkommenden Temperaturdifferenzen gegenüber dem Exponentialfaktor vernachlässigbar ist.

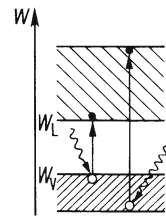
²⁾ Im Englischen heißt Eigenleitung „intrinsic conduction“.

Tafel 7.24 Eigenschaften einiger wichtiger Halbleiter bei Zimmertemperatur (ca. 300 K)

	Si	Ge	Se	GaAs	InSb
Bandabstand ΔW_0 in eV	1,1	0,67	1,7	1,43	0,18
Beweglichkeit in cm^2/Vs b_-	1500	3800	–	9000	80000
b_+	500	1800	0,15	400	800
Eigenleitfähigkeit κ_i in $\Omega^{-1} \text{cm}^{-1}$	$5 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$< 10^{-6}$	$< 10^{-8}$	200

Innerer Fotoeffekt. Durch Einstrahlung von Lichtquanten geeigneter Energie lassen sich Valenzelektronen auf ein Energieniveau im Leitungsband bringen. Dadurch entstehen Elektron-Loch-Paare, welche die Leitfähigkeit erhöhen. Diesen Effekt nennt man den inneren Fotoeffekt (vgl. Abschn. 3.2.2.4).

Nach den Regeln der Quantenmechanik werden nur solche Lichtquanten wirksam, deren Energie hf mindestens gleich der Breite der verbotenen Zone ΔW_0 und höchstens gleich der Energiedifferenz zwischen unterer Kante des Valenzbandes und oberer Kante des Leitungsbandes ist (Bild 7.25)¹⁾.

**Bild 7.25** Innerer Photoeffekt

Daraus ergibt sich der fotoelektrisch wirksame Wellenlängenbereich. Nach dem oben Gesagten hängt er vom Stoff ab. Bei Germanium ist z.B. die größte wirksame Wellenlänge 1,8 μm .

Anwendungen. Die Zunahme der Eigenleitfähigkeit mit wachsender Temperatur nützt man bei sog. Heißleitern oder NTC-Widerständen (Negativer Temperatur Coeffizient des Widerstandes) aus. Diese dienen z.B. zur elektrischen Temperaturmessung, zur Kompensation der Widerstandszunahme von Metall-Widerständen, zur Arbeitspunktstabilisierung in Transistorschaltungen oder als „Anlassheißleiter“ zum Anlassen von Elektromotoren (dabei werden die Heißleiter erst langsam durch Eigen Erwärmung niederohmig).

Sog. Fotowiderstände gestatten mittels des inneren Fotoeffektes die Steuerung elektrischer Ströme durch Licht.

Für die oben genannten Zwecke eignen sich außer Germanium und Silicium auch Selen und die Oxide, Sulfide und Selenide vieler Metalle, z. B. Kupfer(I)oxid.

Aufgaben zu Abschn. 7.4.3.1

1. Wie groß ist der Temperaturkoeffizient des spezifischen Widerstandes $d\rho/(dT\rho)$ bei Ge (Bandabstand $\Delta W_0 = 0,7$ eV) bei einer mittleren Temperatur von 300 K? Man berücksichtige, dass

$$\rho = \frac{1}{\kappa} \text{ und } \kappa \sim n_- = n_0 e^{-\frac{\Delta W_0}{2kT}} \text{ ist.}$$

2. Welche größte Lichtwellenlänge verursacht in reinem Si ($\Delta W_0 = 1,1$ eV bei 300 K) noch innere Fotoleitfähigkeit?

¹⁾ Von zusätzlichen Bedingungen, sog. „Auswahlregeln“, sei hier abgesehen.

7.4.3.2 Störleitung

Stört man den regelmäßigen Gitteraufbau eines Eigenhalbleiters durch Erzeugung von Leerstellen, Versetzungen oder den Einbau von Fremdatomen, so kann man die elektrische Leitfähigkeit z.T. beträchtlich erhöhen. Man spricht dann von Störleitung. Technisch besonders wichtig ist bei Germanium und Silicium der kontrollierte Einbau von Atomen aus der dritten und fünften Gruppe des Periodensystems, die sog. Dotierung.

N-Leitung

Atome aus der fünften Gruppe des Periodensystems (Phosphor, Arsen oder Antimon) besitzen fünf äußere Elektronen. Baut man geringe Mengen solcher Atome in einen reinen Germanium- oder Siliciumkristall auf regulären Gitterplätzen ein (etwa 1 Fremdatom auf 10^5 bis 10^6 Gitteratome), so können nur je vier Elektronen Valenzen bilden. Das fünfte Außenelektron jedes Fremdatoms bleibt nur so schwach gebunden, dass es durch die thermische Gitterbewegung leicht befreit werden kann. Jedes Fremdatom der fünften Gruppe stellt damit praktisch ein freies Elektron zur Verfügung, sodass die Leitfähigkeit wesentlich erhöht wird.

Man nennt Elektronen spendende Fremdatome Donatoren¹⁾. Die Zahl der Donatoren pro Volumen heißt Donatordichte n_D .

Bild 7.26 zeigt diese Verhältnisse im Bändermodell. W_D sind die Energieniveaus der Donatoren. – Diese Energieniveaus werden nur über wenigen x -Werten eingezeichnet, um anzudeuten, dass die Donatoren nur vereinzelt vorkommen. – Da ihre zugehörigen Elektronen praktisch alle thermisch befreit sind, sind die Donatorniveaus unbesetzt. Daraus und aus der Definition der Fermienergie W_F (s. S. 588) folgt, dass W_F in diesem Falle irgendwo in der Nähe von W_D liegen muss. Nach Gl. (7.3) ist die Elektronendichte

$$n_- = n_0 e^{-\frac{W_L - W_F}{kT}}$$

und nach Gl. (7.4) die Löcherdichte

$$n_+ = n_0 e^{-\frac{W_F - W_V}{kT}}$$

Bildet man das Produkt aus beiden, so erhält man

$$n_- n_+ = n_0^2 e^{-\frac{W_L - W_V}{kT}} = n_0^2 e^{-\frac{\Delta W_0}{2kT}}$$

Das ist aber nach Seite 594 auch das Quadrat der Eigenleitendichte, n_i^2 . Also gilt:

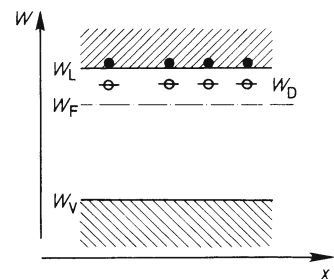


Bild 7.26 Donatorniveaus W_D im Bändermodell

¹⁾ Lat. donare = schenken, spenden.

Unabhängig von dem Betrag der Fermi-Energie W_F ist das Produkt aus Elektronendichte n_- und Löcherdichte n_+ bei konstanter Temperatur T konstant.

$n_- n_+ = n_i^2 = \text{const}$ bei $T = \text{const}$. Für die Temperaturabhängigkeit gilt

$$n_- n_+ = n_i^2 = n_0^2 e^{-\frac{\Delta W_0}{2kT}} \quad (7.5)$$

Das bedeutet: Erhöht man die Dichte der freien Elektronen n_- durch Einbau von Donatoren z.B. um den Faktor 10^3 , so nimmt die Löcherdichte auf das 10^{-3} fache ihres ursprünglichen Wertes ab. n_- ist dann 10^6 mal so groß wie n_+ ! Das ist auch anschaulich verständlich. Denn, wenn sehr viel mehr freie Elektronen als Löcher vorhanden sind, werden die Elektronen natürlich viel häufiger als im Eigenleitungsfall von Löchern eingefangen, die dadurch verschwinden.

Der Ladungstransport bei Dotierung mit Donatoren erfolgt praktisch ausschließlich durch die negativen Elektronen. Daher spricht man von N-Leitung.

P-Leitung

Den Atomen der dritten Gruppe des Periodensystems (Bor, Aluminium, Gallium und Indium) stehen nur drei äußere Elektronen zur Bildung von Valenzen zur Verfügung. Baut man daher solche Atome in ein reines Germanium- oder Silicium-Kristallgitter ein, so fehlt jeweils ein für die Bindung erforderliches Elektron. Dessen Platz kann relativ leicht von einem Elektron eingenommen werden, das durch die Wärmebewegung des Gitters von einem benachbarten Atom abgespalten wird. Dadurch entsteht an diesem ein Loch, das in der oben geschilderten Weise zum Ladungstransport beitragen kann. Die Leitfähigkeit wird gegenüber der des reinen Materials stark erhöht.

Elektronen aufnehmende Fremdatome heißen Akzeptoren¹⁾. Die Zahl der Akzeptoren pro Volumen heißt Akzeptordichte n_A .

Bild 7.27 zeigt die entsprechenden Verhältnisse im Bändermodell. W_A sind die zu den einzelnen Akzeptoratomatomen gehörenden Energieniveaus, die bei Zimmertemperatur praktisch alle mit Elektronen aus dem Valenzband besetzt sind. Die dadurch in diesem entstandenen unbesetzten Niveaus ermöglichen die Löcherleitfähigkeit.

Das Fermi-Niveau W_F liegt jetzt in der Nähe von W_A . Wie oben gezeigt, gilt unabhängig von W_F die Beziehung $n_- n_+ = n_i^2$ (Gl. (7.5)). Erhöht man daher durch gezielten Einbau von Akzeptoren die bei Eigenleitung vorliegende Löcherdichte n_+ um einen bestimmten Faktor, so nimmt die Elektronendichte n_- um denselben Faktor ab.

Der Ladungstransport bei Dotierung mit Akzeptoren erfolgt praktisch allein durch die positiven Löcher. Darum spricht man von P-Leitung.

Störleitung in Ionenkristallen. Die oben beschriebenen Leitungsmechanismen sind auch in Ionenkristallen möglich. Baut man z.B. in Zinkoxid (ZnO) vereinzelt an Stelle der zweiwertigen Zinkatome dreiwertige Aluminiumatome als Donatoren ein, so entsteht N-Leitung.

¹⁾ Lat. accipere = aufnehmen.

Umgekehrt erzeugt ein Ersatz der Zinkatome durch einwertige Lithiumatome als Akzeptoren P-Leitung. Dünne mit Indium dotierte SnO_2 -Schichten sind durchsichtig. Auf Glas aufgebracht, erzeugt man mit ihnen „leitendes Glas“.

Organische Halbleiter. Durch die geeignete Kombination organischer Substanzen, nämlich geeignet chemisch präparierter Polymere, lassen sich seit dem Jahre 2000 auch sog. organische Halbleiter herstellen. Diese sind, weil dies eine der ersten großtechnischen Anwendungen ist, in Abschn. 7.5.2 unter „Organische Leuchtdioden“, OLED-s, beschrieben.

Reinheit von Halbleitermaterialien. Wie schon oben gesagt, besitzt reines Germanium $4,4 \cdot 10^{22}$ Atome pro cm^3 . Die Dichte der Elektron-Loch-Paare ist bei Zimmertemperatur $n_i = 2,5 \cdot 10^{13} / \text{cm}^3$. Das bedeutet, dass auf $1,76 \cdot 10^9$ Ge-Atome nur ein Elektron-Loch-Paar entfällt! Baut man jetzt z.B. eine so geringe Zahl von Donatoratomen ein, dass nur eines auf $1,76 \cdot 10^8$ Ge-Atome kommt, so erhöht man doch die Elektronendichte n_- schon um den Faktor 6,8.

Daraus wird klar, dass die Reinheit des Grundmaterials ganz außergewöhnlich hoch sein muss. Man darf nur etwa ein Fremdatom auf etwa 10^9 Ge-Atome zulassen! (Bei Silicium liegen die Verhältnisse noch extremer.) Ein Vergleich möge das veranschaulichen: Denken wir uns alle Erdbewohner als „gute“ Menschen, so dürften unter ihnen nur etwa sechs „schlechte“ Menschen sein, um die obige „Reinheitsforderung“ zu erfüllen.

Es sei noch erwähnt, dass man Donatoren durch Zusatz von Akzeptoren kompensieren und sogar überkompensieren kann. Man kann dadurch z. B. N-leitendes Material in P-leitendes Material umwandeln. Allerdings entstehen dabei oft relativ viele Gitterfehler, die ihrerseits ebenfalls die Leitfähigkeit beeinflussen können, wie hier nicht gezeigt werden soll.

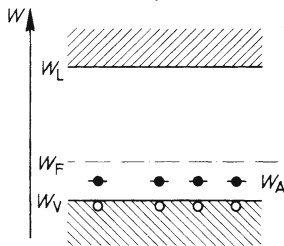


Bild 7.27 Akzeptorenniveau W_A im Bändermodell

Bild 7.28 PN-Schicht (schematisch)

Aufgabe zu Abschn. 7.4.3.2

1. Reines Silicium hat bei 300 K den spezifischen Widerstand $\rho_0 = 2,3 \cdot 10^5 \Omega\text{cm}$. Das entspricht $1,36 \cdot 10^{10}$ Ladungsträgerpaaren pro cm^3 . Welcher relative Anteil an Phosphoratomen muss

eingebaut werden, um den spezifischen Widerstand auf den Wert $\rho = 100 \Omega\text{cm}$ zu erniedrigen? Silicium enthält $5,0 \cdot 10^{22}$ Atome pro cm^3 .

7.4.3.3 Anwendungen der Störleitung

PN-Grenzschicht

Technisch besonders wichtig ist ein Halbleiter, in dem ein mit Akzeptoren dotiertes, also P-leitendes Gebiet und ein mit Donatoren dotiertes, also N-leitendes Gebiet in einem einzigen Kristall unmittelbar aneinander grenzen (Bild 7.28)¹⁾. Zwischen ihnen bildet sich die sog. PN-Grenzschicht. Wie oben gezeigt, ist die Dichte der Akzeptoren oder Donatoren so gering, dass diese den Gitteraufbau des Grundmaterials im Ganzen praktisch nicht beeinflussen. Daher erfolgt der PN-Übergang auch meist innerhalb weniger Atomabstände.

¹⁾ Zur technischen Herstellung s. [28].

Besonders einfach zu übersehen ist der symmetrische PN-Übergang, bei dem die Akzeptorendichte im P-Gebiet gleich der Donatorendichte im N-Gebiet ist. Wir benutzen daher im Folgenden das Modell der symmetrischen PN-Schicht mit abruptem Übergang von P- zu N-Leitung.

Wir betrachten einen PN-Übergang im Germanium. Bei Zimmertemperatur ist dessen Eigenleitungsdichte $n_i = 2,5 \cdot 10^{13}/\text{cm}^3$. Die Akzeptorendichte im P-Gebiet und die Donatorendichte im N-Gebiet seien beide $10^3 n_i = 2,5 \cdot 10^{16}/\text{cm}^3$. Dann ist im P-Gebiet die Löcherdichte ebenfalls $n_+ = 2,5 \cdot 10^{16}/\text{cm}^3$. Wegen $n_+ n_- = n_i^2$ (Gl. (7.5)) beträgt hier die Dichte der freien Elektronen jedoch nur $2,5 \cdot 10^{10}/\text{cm}^3$. Im N-Gebiet liegen die Verhältnisse genau umgekehrt.

Um die Betrachtungen zu vereinfachen, nennt man gelegentlich die in jedem Gebiet in der Mehrzahl vorhandenen Ladungsträger Majoritäten, die anderen Minoritäten.

Wegen des großen Dichtegefälles diffundieren auf Grund ihrer Wärmebewegung Elektronen vom N-Gebiet über die Grenzschicht hinweg in das P-Gebiet und Löcher vom P-Gebiet in das N-Gebiet. Es würde ein völliger Dichteausgleich erfolgen, wenn dabei nicht gleichzeitig elektrische Ladung transportiert würde. Das Letztere ist aber hier der Fall. Daher entsteht durch die fest im Gitter eingebauten Akzeptoratomene, die im P-Gebiet zurückbleiben, eine negative Raumladung. (Jedes der ursprünglich neutralen Atome hat sich ja ein Elektron eingefangen! Vgl. Abschn. „P-Leitung“.) Entsprechend bilden die im N-Gebiet bleibenden Donatoratome eine positive Raumladung.

Bei einer PN-Grenzschicht lädt sich durch Diffusion von Ladungsträgern die P-Seite negativ, die N-Seite positiv auf. Es entsteht in ihr die sog. Diffusionsspannung U_D und ein entsprechendes elektrisches Feld.

Dieses Feld bewirkt einen der Diffusion der Ladungsträger entgegengerichteten Strom, den sog. Feldstrom, indem es Elektronen wieder in das N-Gebiet und Löcher in das P-Gebiet zurückholt.

Im thermodynamischen Gleichgewicht haben Diffusionsstrom und Feldstrom den gleichen Betrag.

Bild 7.29a zeigt das sich in der Grenzschicht einstellende Dichtegefälle der Löcher und der freien Elektronen in logarithmischem, Bild 7.29b in linearem Maßstab. – Man betrachte zunächst nur die ausgezogenen Linien ($U = 0$). – Dabei ist stets $n_+ n_- = n_i^2$ (Gl. (7.5)). – Wie man besonders in der linearen Darstellung deutlich sieht, ist der Grenzschichtbereich praktisch frei von beweglichen Ladungsträgern. Die durch die zurückbleibenden, ortsfesten Donatoren und Akzeptoren gebildete Raumladung ist in Bild 7.29c skizziert.

Den Betrag der Diffusionsspannung U_D erhält man durch folgende Überlegung: Auf Grund der Wärmebewegung kann nur der durch den Boltzmann-Faktor (s. Abschn. 2.4.5.4) $e^{-\frac{e_0 U_D}{kT}}$ gegebene Bruchteil der Majoritäten die Energieschwelle $W_D = e_0 U_D$ überwinden¹⁾.

Dieser Bruchteil ist gleich dem Verhältnis der Dichte der freien Elektronen im P-Gebiet, n_{-p} ,

¹⁾ e_0 = Elementarladung, Ladung des Elektrons.

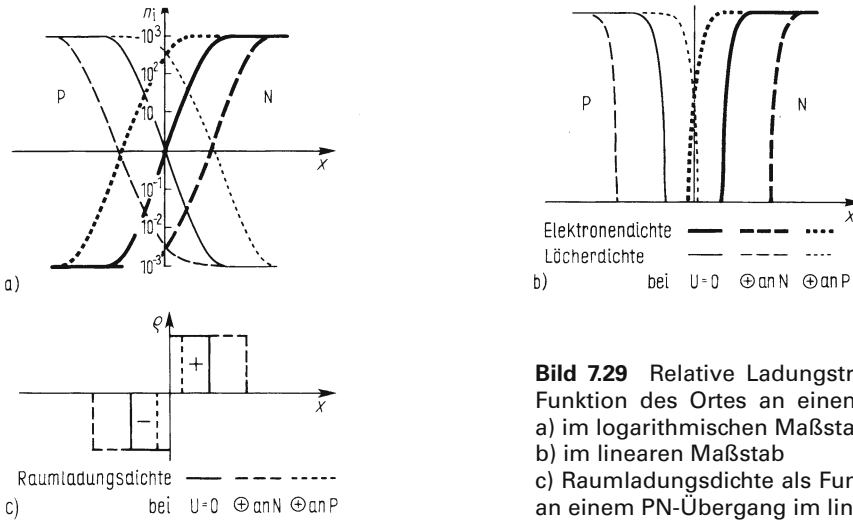


Bild 7.29 Relative Ladungsträgerdichten als Funktion des Ortes an einem PN-Übergang
 a) im logarithmischen Maßstab
 b) im linearen Maßstab
 c) Raumladungsdichte als Funktion des Ortes an einem PN-Übergang im linearen Maßstab

zu deren Dichte im N-Gebiet, n_{-N} . Beide Dichten hängen aber von der Dotierung ab. Denn die Elektronendichte im N-Gebiet n_{-N} ist ja gleich der Donatordichte n_D . Hingegen ist die Elektronendichte im P-Gebiet n_{-P} gemäß Gl. (7.5) $n_{-P} = n_i^2/n_{+P} = n_i^2/n_A$. Also gilt

$$\frac{n_{-P}}{n_{+N}} = e^{-\frac{e_0 U_D}{kT}} \quad \text{oder} \quad \frac{n_i^2}{n_A n_D} = e^{-\frac{e_0 U_D}{kT}}$$

Daraus ergibt sich für den

Betrag der Diffusionsspannung

$$U_D = \frac{kT}{e_0} \ln \frac{n_A n_D}{n_i^2} \tag{7.6}$$

In unserem als Beispiel gewählten PN-Übergang ist $n_D/n_i = n_A/n_i = 10^3$. Bei Zimmertemperatur ist $kT/e_0 = 26$ mV. Also ergibt sich $U_D = 26$ mV $\cdot \ln 10^6 = 359$ mV.

Für unsymmetrische PN-Übergänge und ortsabhängige Dotierungen gelten Zusammenhänge, die den oben beschriebenen analog sind. Sie brauchen deshalb hier nicht eigens behandelt zu werden.

Ähnlich wie eine PN-Grenzschicht verhalten sich Grenzschichten von geeigneten Metall-Halbleiter-Kombinationen. Wir wollen hierauf jedoch nicht eingehen.

PN-Grenzschicht als Gleichrichter. Von besonderem Interesse ist das Verhalten einer PN-Schicht bei Anlegen verschiedener äußerer Spannungen. Wir beginnen mit dem Fall:

Äußere Spannung gleich Null. Wie oben gezeigt, hängt die Zahl der pro Zeit über die Grenzschicht diffundierenden Majoritätsladungsträger, der Diffusionsstrom I_{D0} , von der Dotierungsdichte und über den Boltzmann-Faktor von der Höhe der Diffusionsspannung U_D ab.

Wir setzen den Diffusionsstrom $I_{D0} = C_D e^{-\frac{e_0 U_D}{kT}}$, wobei der Faktor C_D unter anderem von der Dotierung und der Größe der Grenzschichtfläche abhängt.

Der Feldstrom I_F wird nur von den Minoritäten getragen. Deren Dichte ist aber so gering, dass I_F schon von sehr kleinen Spannungen ab nicht mehr zunehmen kann. I_F ist also ein Sättigungsstrom, der proportional der Minoritätendichte ist. Diese ist z. B. im N-Gebiet gleich der dortigen Löcherdichte n_{+N} . Da hier n_{-N} gleich der konstanten Donatordichte n_D ist, gilt wegen $n_{-}n_{+} = n_i^2$ (Gl. (7.5)) die Beziehung

$$n_{+N} = \frac{n_i^2}{n_D} = \frac{n_0^2}{n_D} e^{-\frac{\Delta W_0}{kT}}$$

Wegen der Proportionalität zwischen n_{+N} und I_F setzen wir für den

Feldstrom

$$I_F = C_F e^{-\frac{\Delta W_0}{2kT}} \quad (7.7)$$

mit der Proportionalitätskonstanten C_F .

Ohne äußere Spannung ist $I_{D0} = I_F$. Also gilt

$$C_D e^{-\frac{e_0 U_D}{kT}} = C_F e^{-\frac{\Delta W_0}{kT}} \quad (7.8)$$

Wir untersuchen außerdem die folgenden Fälle:

Äußere Spannung U und Diffusionsspannung U_D gleichgerichtet. Legt man den positiven Pol einer äußeren Spannungsquelle an die N-Schicht, den negativen Pol an die P-Schicht, so erhöht man die Energieschwelle, welche die Majoritäten durch Diffusion überwinden müssen, von $e_0 U_D$ auf $e_0 (U_D + U)$. Diese schafft fast kein Majoritätsladungsträger mehr. Dadurch verarmt die Grenzschicht noch mehr an freien Ladungsträgern, als dies ohnehin schon der Fall ist, die Raumladungszone wird breiter (in Bild 7.29 gestrichelt), und es fließt praktisch nur der sehr kleine Feldstrom I_F . Da der Stromfluss fast völlig gesperrt wird, nennt man die Grenzschicht in diesem Falle auch Sperrschicht.

Äußere Spannung U und Diffusionsspannung U_D entgegengesetzt gerichtet. Polt man die äußere Spannungsquelle so, dass „Plus“ an der P-Schicht und „Minus“ an der N-Schicht liegt, so erniedrigt man die für die Diffusion maßgebliche Energieschwelle. Die Grenzschicht wird mit freien Ladungsträgern überschwemmt, und es kann ein großer Strom fließen; die Raumladungszone verschwindet dabei fast (in Bild 7.29 punktiert). Daraus folgt:

Die PN-Schicht wirkt als Gleichrichter. Sie lässt den Strom von P nach N fließen und sperrt den Strom von N nach P (technische Stromrichtung).

Die Abhängigkeit des Stromes I von der äußeren Spannung U lässt sich folgendermaßen ermitteln: Der Gesamtstrom I ist die Differenz aus Diffusionsstrom I_D und entgegen gerichtetem Feldstrom I_F . Es gilt $I = I_D - I_F$. Dieser ist im Gegensatz zu Gl. (7.8) bei Anlegen der

äußeren Spannung nicht mehr gleich Null. Vielmehr gilt mit

$$I_D = C_D e^{-\frac{e_0(U_D-U)}{kT}}$$

$$I = C_D e^{-\frac{e_0(U_D-U)}{kT}} - C_F e^{-\frac{\Delta W_0}{kT}} = C_D e^{-\frac{e_0 U_D}{kT}} e^{-\frac{e_0 U}{kT}} - C_F e^{-\frac{\Delta W_0}{kT}} \quad (7.9)$$

– Hierbei ist U in Flussrichtung positiv gezählt! –

In der obigen Gleichung ist der Ausdruck $C_D e^{-\frac{e_0 U_D}{kT}}$ der Diffusionsstrom I_{D0} , der bei Fehlen einer äußeren Spannung fließt. Er lässt sich mit Hilfe von Gl. (7.8) durch den von der äußeren Spannung unabhängigen Feldstrom I_F ausdrücken.

Setzt man $C_D e^{-\frac{e_0 U_D}{kT}} = C_F e^{-\frac{\Delta W_0}{kT}}$ (Gl. (7.8)) in Gl. (7.9) ein, so wird daraus

$$I = C_F e^{-\frac{\Delta W_0}{kT}} e^{\frac{e_0 U}{kT}} - C_F e^{-\frac{\Delta W_0}{kT}}$$

und man erhält schließlich die

Abhängigkeit des Stromes I durch eine PN-Schicht von der äußeren Spannung U („Plus“ an P und „Minus“ an N):

$$I = C_F e^{-\frac{\Delta W_0}{kT}} \left(e^{\frac{e_0 U}{kT}} - 1 \right) \quad I = I_F \left(e^{\frac{e_0 U}{kT}} - 1 \right) \quad (7.10)$$

Wie man sieht, wächst der Strom durch die PN-Schicht in Flussrichtung ($U > 0$) mit wachsender Spannung exponentiell an. Bei wirklichen Gleichrichtern (oder „Dioden“ = Zweipolen) wird er jedoch schon bald durch den Wirkwiderstand der zu beiden Seiten der PN-Schicht vorhandenen Halbleiterstücke begrenzt. Bild 7.30 zeigt eine wirkliche Diodenkennlinie. In Sperrichtung ($U < 0$) fließt praktisch nur noch der Feldstrom I_F ; denn kT/e_0 ist sehr klein (26 mV bei Zimmertemperatur). Man bezeichnet I_F daher auch als Sperrstrom I_{sp} . Er ist stark temperaturabhängig, da er von der Anzahl der Minoritäten abhängt.

Nach Gl. (7.7) gilt für die

Temperaturabhängigkeit des Sperrstromes

$$I_{sp} = C_F e^{-\frac{\Delta W_0}{kT}}$$

Dabei ist ΔW_0 als Breite der verbotenen Energiezone eine Materialkonstante.

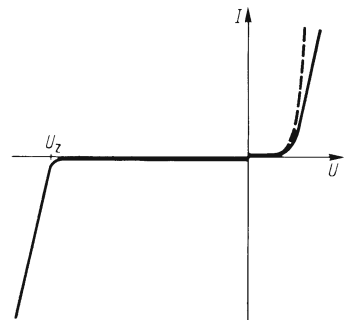


Bild 7.30 Diodenkennlinie einer wirklichen PN-Diode (ausgezogen) und einer PN-Schicht ohne Bahnwiderstand (gestrichelt)

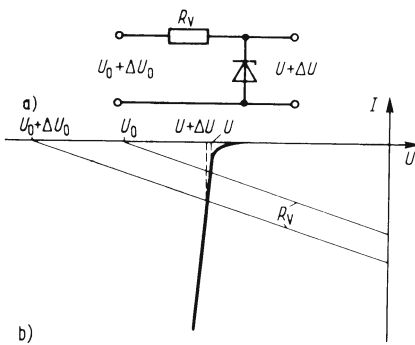


Bild 7.31 a) Spannungsstabilisierung mit einer Z-Diode

b) Erklärung anhand der Kennlinie: wenn die Speisespannung U_0 sich um ΔU_0 vergrößert, verschiebt sich die Vorwiderstandsgerade R_V in der gezeichneten Weise. Die zugehörige relative Spannungsänderung $\Delta U/U$ ist wegen der steilen Kennlinie der Z-Diode sehr viel kleiner. Es gilt $\Delta U/U \ll \Delta U_0/U_0$

Bei Germanium z. B. ist $\Delta W_0 = 0,67$ eV, bei Silicium 1,1 eV. Der Sperrstrom von Silicium-Dioden ist daher stärker temperaturabhängig als der von Germanium-Dioden. Dafür ist bei Si der Absolutwert von I_{sp} bei gleichen Bedingungen viel kleiner.

Z-Diode. Das in Bild 7.30 sichtbare starke Anwachsen des Sperrstromes bei der Spannung U_Z , der sog. Zenerspannung, beruht zum Teil auf dem Zenereffekt (vgl. S. 589), zum Teil auf lawinenartiger Vermehrung der freien Ladungsträger durch Stoßvorgänge, ähnlich wie in einer Gasentladung.

U_Z kann Werte zwischen etwa 2 V und 2000 V haben. Dieser Wert ist die für einen Gleichrichter höchstens zulässige Spitzensperrspannung.

Dioden, bei denen sich in diesem Gebiet die Spannung nur wenig mit dem Strom ändert, heißen Z-Dioden (Zenerdioden¹⁾). Sie dienen unter anderem in Verbindung mit einem Vorwiderstand zur Spannungsstabilisierung (Bild 7.31).

Sperrträghheit. Wie oben auf S. 601 gezeigt wurde, enthält eine in Flussrichtung betriebene PN-Schicht sehr viele freie Ladungsträger. Polt man sie plötzlich um, so sperrt sie nicht sofort, da sich ja zunächst nichts an der Zahl der in der PN-Schicht befindlichen freien Löcher und Elektronen ändert. Es dauert vielmehr eine gewisse Zeit, bis die gespeicherten Ladungsträger durch das elektrische Feld aus der PN-Schicht heraus transportiert werden oder auch durch Rekombination von Elektronen mit Löchern verschwinden. Während dieser Zeit fließt daher auch in Sperrrichtung ein relativ großer Strom. Erst danach fließt nur noch der kleine Sperrstrom.

Diesen Effekt bezeichnet man als Sperrträghheit. Er begrenzt einerseits die Anwendbarkeit von PN-Gleichrichtern bei hohen Frequenzen. Andererseits nutzt man ihn in sog. Speichervariaktoren zur Frequenzvervielfachung aus.

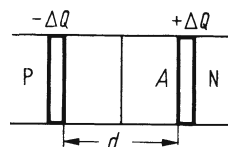


Bild 7.32 Wirkungsweise einer Kapazitätsdiode

Sperrschicht-Kapazität. Wie oben gezeigt (Bild 7.29), hat ein Vergrößern der Sperrspannung um ΔU eine Verbreiterung der Raumladungszone und damit eine Zunahme der gesamten Raumladung um ΔQ zur Folge. ΔQ wird dabei in zwei dünne Schichten zu beiden Seiten der Raumladungszone angebaut. $-\Delta Q$ im P-Gebiet, $+\Delta Q$ im N-Gebiet (Bild 7.32).

Die Grenzschicht wirkt also ähnlich wie ein Plattenkondensator.

¹⁾ Nach C. M. Zener (geb. 1905).

Sie hat eine Kapazität $C = \frac{\Delta Q}{\Delta U} = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{d}$ (Gl. (3.20) und Gl. (3.34)). Hierbei ist A die Sperrschichtfläche, d die Breite der Raumladungszone und ϵ_r die Dielektrizitätszahl des Halbleitermaterials. Da d mit der angelegten Gleichspannung wächst (s. Bild 7.29 und 7.32), gilt:

Die Sperrschichtkapazität nimmt mit wachsender anliegender Gleichspannung ab.

Diesen Effekt nutzt man bei sog. Kapazitätsdioden aus. Sie finden Verwendung z.B. in automatischen Abstimmungen in Rundfunk-Empfängern, zur elektronischen Abstimmung (Ersatz des Drehkondensators), in parametrischen Verstärkern, zur Frequenzvervielfachung als sog. Sperrschicht-Varaktoren und dgl.

Fotodiode. Wie oben gezeigt wurde, fließt durch eine in Sperrrichtung vorgespannte PN-Grenzschicht nur der von den Minoritäten getragene, geringe Feldstrom.

Strahlt man in eine PN-Schicht Licht geeigneter Wellenlänge ein, so erzeugt dieses zusätzliche freie Ladungsträger, welche den Feldstrom erhöhen. Der durch die Diode fließende Strom ist proportional zur Lichtintensität.

Er kann daher zur Umsetzung von Lichtsignalen in entsprechende elektrische Signale dienen. Bild 7.33 zeigt die Kennlinie einer Ge-Fotodiode.

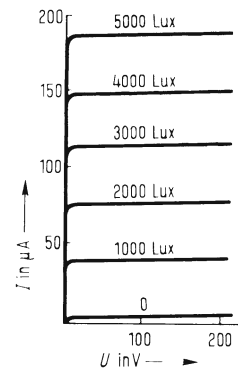


Bild 7.33 Kennlinie einer Ge-Fotodiode mit 4 mm² wirksamer Fläche

Lumineszenzdiode. Bei diesem ebenfalls technisch sehr wichtigen Bauelement wird durch den Strom, der durch eine PN-Schicht fließt, Licht erzeugt. Dies wird in Abschn. 7.5.2 beschrieben.

Sperrschicht-Zähler. Freie Ladungsträger kann man in einer PN-Schicht statt durch Licht auch durch Kernstrahlung erzeugen. Da Letztere sehr energiereich ist, setzen schon einzelne Teilchen so viele Ladungsträger in Freiheit, dass sie eine deutliche vorübergehende Sperrstromzunahme bewirken. Diese Stromimpulse kann man relativ leicht verstärken und zählen.

Fotoelement. Schließt man eine Fotodiode durch einen äußeren Draht kurz (Bild 7.34), so fließt ohne Lichteinfall kein Strom. Das ist auf den ersten Blick etwas verwunderlich, da sich ja am inneren PN-Übergang die Diffusionsspannung aufgebaut hat (s. oben), die nicht nur den inneren Feldstrom, sondern auch einen äußeren Strom über den Draht bewirken sollte. Dass dies nicht der Fall ist, hat folgenden Grund:

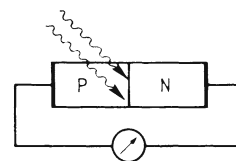


Bild 7.34 Fotoelement (schematisch)

Auch zwischen den äußeren Enden der N- und der P-Schicht ist ein Dichtegefälle der freien Elektronen vorhanden. Dieses hat – wie am inneren PN-Übergang – eine Diffusion von Elektronen über den Draht in die P-Zone zur Folge. Dadurch entsteht auch hier eine Diffusionsspannung, welche die gleich große innere Diffusionsspannung kompensiert.

Strahlt man jetzt Licht in den inneren PN-Übergang ein, so werden Bindungselektronen in Freiheit gesetzt, also Elektron-Loch-Paare erzeugt. Die zusätzlichen Elektronen wandern in die N-Zone, die Löcher in die P-Zone und kompensieren hier teilweise die Raumladungen. Dadurch wird die innere Diffusionsspannung kleiner. Die konstante äußere Diffusionsspannung überwiegt, und es fließt ein Strom.

Die PN-Schicht wirkt als Fotoelement. Ihre Leerlaufspannung ist gleich der Differenz zwischen äußerer und innerer Diffusionsspannung.

Die Leerlaufspannung U_L kann daher auch höchstens den Betrag der Diffusionsspannung U_D erreichen, der nach Gl. (7.6) vom Grundmaterial und der Dotierung abhängt. Fotoelemente verwendet man z.B. in Belichtungsmessern oder als elektrische Energiequellen. Für den letzteren Zweck benutzt man hauptsächlich Siliciumzellen (Bild 7.35).

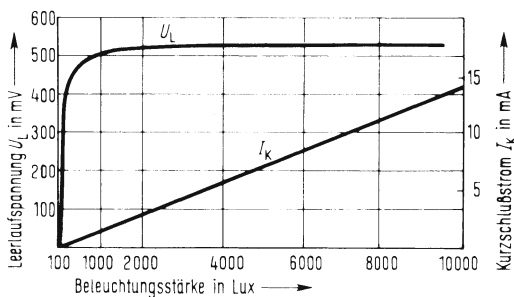


Bild 7.35 Kennlinien eines Si-Fotoelementes mit 150 mm^2 wirksamer Fläche bei Beleuchtung mit Sonnenlicht

Mit ihnen erreicht man bei direkter Sonneneinstrahlung Wirkungsgrade von etwa 10%. Mehrere zusammengeschaltete Silicium-Fotoelemente bilden die gebräuchlichen Sonnenbatterien.¹⁾

Teilweise benutzt man als Fotoelemente auch großflächige Metall-Halbleiter-Kontakte. Diese können unter bestimmten Umständen ähnliche Sperrschichten bilden wie eine PN-Schicht, wie hier nicht näher gezeigt werden soll.

Tunneldiode. Dotiert man einen schmalen Bereich zu beiden Seiten des PN-Überganges sehr hoch, so entsteht eine Zonenfolge des Schemas $P P^+ N^+ N$ (Bild 7.36a). (Das Symbol P^+ soll eine besonders hoch dotierte P-Zone, N^+ eine besonders hoch dotierte N-Zone kennzeichnen). Eine solche Grenzschicht zeigt ein ganz ungewöhnliches Verhalten. Wie bei der normalen PN-Schicht diffundieren aus den hochdotierten P^+ - und N^+ -Schichten die Majoritäten in den jeweils anderen Teil, sodass sich am P^+N^+ -Übergang die entsprechende Aufladung ergibt. Die Raumladungen sind hier jetzt jedoch viel höher als normal, da ja besonders viele Akzeptoren auf der einen und Donatoren auf der anderen Seite eingebaut wurden. Zwischen der P^+ - und der P-Schicht einerseits und der N^+ - und der N-Schicht andererseits besteht ebenfalls ein Dichtegefälle der Majoritäten. Deshalb findet hier genauso Diffusion und Ausbildung einer Raumladung statt. Bild 7.36b zeigt die Ladungsträgerdichten im logarithmischen, Bild 7.36c im linearen Maßstab, Bild 7.36d schließlich die zugehörigen Raumladungen. Da sich wegen der hohen Raumladungen beiderseits des

¹⁾ Durch Kombination anderer Materialien versucht man, auch für großtechnische Anwendungen etwas höhere Wirkungsgrade zu erreichen.

$P^+ N^+$ -Überganges eine hohe Diffusionsspannung U_D (s. oben) aufbaut, sollte man erwarten, dass man einen nennenswerten Stromfluss erst erreicht, nachdem man durch eine entsprechend hohe äußere Spannung in Flussrichtung die Potentialschwelle genügend erniedrigt hat. In Wirklichkeit fließt bereits bei einer sehr kleinen äußeren Spannung (50 bis 100 mV) ein relativ großer Strom. Dieser hat folgende Ursache:

Die Raumladungszonen, welche die Majoritäten überwinden müssen, sind ziemlich schmal. Andererseits sind die Ladungsträgerdichten im P^+ - und N^+ -Gebiet neben den Raumladungszonen sehr hoch. Daher trifft man jenseits der Potentialschwelle eine beträchtliche Anzahl von Ladungsträgern an, die diese nicht vermöge ihrer thermischen Energie „überspringen“, sondern sie auf Grund des wellenmechanischen Tunnel-Effektes (s. Abschn. 6.1.2.3) „durchtunnelt“ haben. Darum fließt schon bei kleinen Spannungen ein Strom. Dieser erreicht bei Steigerungen der Spannung einen Höchstwert, da die Ladungsträgerzahl aus den schmalen hochdotierten Bereichen bald erschöpft ist.

Dadurch baut sich auch die hohe Raumladung ab, und es entstehen weitgehend die Verhältnisse des normalen PN-Überganges (Bild 7.36e und f). Die Kennlinie zeigt nun den gewohnten exponentiellen Anstieg (Bild 7.37).

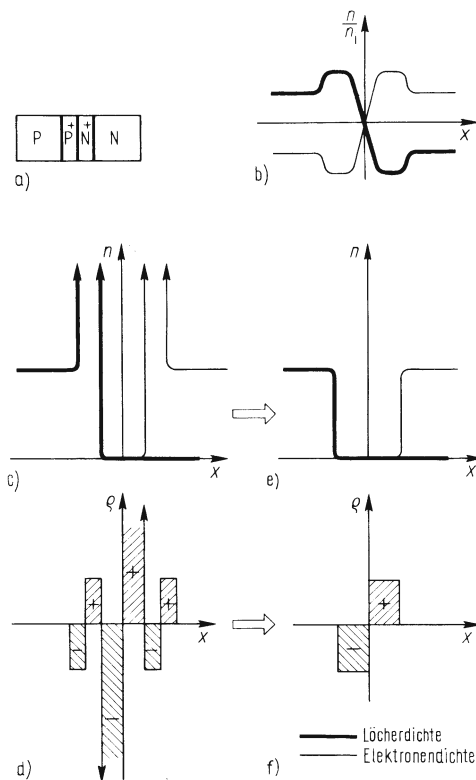


Bild 7.36 Tunneldiode

- a) schematischer Aufbau
 b), c) und e) Ladungsträgerdichten als Funktion des Ortes, (b) logarithmisch, c) und e) linear,
 d) und f) Raumladung als Funktion des Ortes

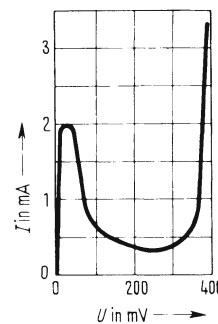


Bild 7.37 Kennlinie einer Tunneldiode in Flussrichtung

Zwischen Strom-Maximum und Strom-Minimum fällt die Kennlinie. Hier hat die Tunneldiode einen negativen differentiellen Innenwiderstand $r = dU/dI$. Sie eignet sich daher zur Schwingungserzeugung (vgl. Abschn. 5.1.5).

Das „Durchtunneln“ einer Potentialschwelle geht sehr schnell vor sich (fast mit Lichtgeschwindigkeit). Daher kann man mit Tunnelioden Schwingungen sehr hoher Frequenz (bis weit in den GHz-Bereich) erzeugen. Da der „Tunnel-Strom“ obendrein nicht auf thermischer Teilchenbewegung beruht, sind Tunnelioden sehr rauscharm.

Flächentransistor. Eines der wichtigsten Bauelemente der Elektronik ist der Flächentransistor. Er besteht aus einem Halbleiterstück, in welchem zwei PN-Übergänge einander sehr dicht benachbart sind (Abstand ca. 10^{-6} m) (Bild 7.38). Je nach der Zonenfolge unterscheidet man NPN- oder PNP-Transistoren. Die Wirkungsweise beschreiben wir an einem NPN-Transistor (Bild 7.39a).

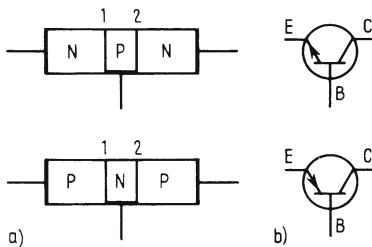


Bild 7.38 NPN- und PNP-Flächentransistor
a) schematischer Aufbau
b) Schaltzeichen

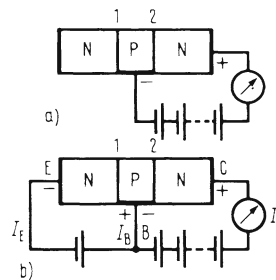


Bild 7.39 Zur Wirkungsweise eines Flächentransistors

Wir denken uns zunächst nur die Grenzschicht 2 in Sperrrichtung angeschlossen (Bild 7.39a). Dann fließt durch sie nur der kleine durch die Minoritäten getragene Feldstrom.

Schließt man jetzt zusätzlich Grenzschicht 1 in Flussrichtung an (Bild 7.39b), so können durch diese sehr viele Majoritäten in den jeweils anderen Teil hinein diffundieren, Löcher in die N-Zone und Elektronen in die P-Zone. Da Letztere sehr dünn ist, gelangen die meisten Elektronen bis in die in Sperrrichtung gepolte Grenzschicht 2. Hier sind sie aber Minoritäten und werden daher vom elektrischen Feld zur rechten N-Zone befördert. Die Grenzschicht 1 sendet Elektronen aus¹⁾, die von Grenzschicht 2 aufgesammelt werden²⁾. Daher rühren auch ihre Bezeichnungen:

Bei einem Flächentransistor heißt
die in Flussrichtung gepolte PN-Schicht „Emitter“ E,
die in Sperrrichtung gepolte PN-Schicht „Kollektor“ C,
das zwischen beiden liegende Halbleiterstück „Basis“ B.

Der vom Emitter ausgehende Strom I_E gelangt fast vollständig in den Kollektorstromkreis und fließt dort als Kollektorstrom I_C weiter. Nur ein geringer Bruchteil (ca. 0,5...10%) des Emitterstromes fließt über den Basisanschluss als Basisstrom I_B ab. Das bedeutet:

¹⁾ Lat. *emittere* = aussenden.

²⁾ Lat. *colligere* = aufsammlen.

Der Kollektorstrom I_C hängt vom Emittorstrom I_E ab und ist diesem nahezu gleich. Es gilt

$$I_C = A I_E \quad A \approx 0,9 \text{ bis } 0,995 \quad (7.11)$$

Daher lässt sich der Kollektorstrom durch den Emittorstrom steuern.

Der Faktor A heißt Stromverteilung in Basisschaltung.

Die Sperrspannung U_{CB} zwischen Kollektor und Basis kann man viel größer wählen als die zur Erzielung des Emittorstromes erforderliche Spannung U_{EB} . (Während Letztere im Allgemeinen unter 1 V liegt, kann U_{CB} je nach Transistor-Typ Werte von ca. 2 V bis ca. 400 V annehmen.) Daher kann man mit einer kleinen Leistung $U_{EB} I_E$ eine viel größere Leistung $U_{CB} I_C \approx U_{CB} I_E$ steuern.)

Änderungen der kleinen Eingangsleistung werden zu großen Änderungen der Ausgangsleistung verstärkt.

Der Flächentransistor ist ein Leistungsverstärker.

Bild 7.40 zeigt ein entsprechendes Schaltbild. In diesem Beispiel ist die Basis die für „Eingang“ und „Ausgang“ gemeinsame Elektrode. Eine solche Schaltung heißt daher Basisschaltung.

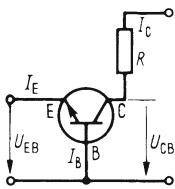


Bild 7.40 Basisschaltung

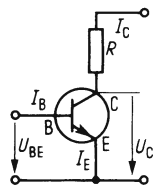


Bild 7.41 Emitterschaltung

Wählt man stattdessen als gemeinsame Elektrode den Emittor (Bild 7.41), so ergibt sich die Emitterschaltung. Bei dieser fließt im Eingangsstromkreis nur die Differenz zwischen Emittorstrom und Kollektorstrom, also der sehr kleine Basisstrom $I_B = I_E - I_C$. Das bedeutet:

Die Emitterschaltung erlaubt die Steuerung des großen Stromes I_C durch den kleinen Strom I_B . Änderungen von I_B werden zu viel größeren Änderungen von I_C verstärkt.

Der Flächentransistor wirkt als Stromverstärker. Es gilt

$$I_C = B I_B \quad (7.12)$$

Der Faktor B heißt Stromverstärkung in Emitterschaltung.

Natürlich erfolgt in dieser Schaltung auch eine Leistungsverstärkung.

Den Zusammenhang zwischen den Größen B in Gl. (7.12) und A in Gl. (7.11) ergibt folgende Überlegung.

Nach Gl. (7.12) ist $B = I_C/I_B$. Nun ist aber $I_B = I_E - I_C$. Daher wird

$$B = \frac{I_C}{I_E - I_C} = \frac{I_C/I_E}{1 - I_C/I_E}$$

und mit $I_C/I_E = A$ (Gl. (7.11)) schließlich

$$B = \frac{A}{1 - A} \quad (7.13)$$

Da A je nach Transistortyp Werte etwa zwischen 0,9 und 0,995 haben kann, kann B etwa zwischen 9 und 200 liegen.

Die hier für den NPN-Transistor ermittelten Eigenschaften sind für einen PNP-Transistor völlig analog. Man muss nur die Polungen vertauschen („Plus“ am Emitter und „Minus“ am Kollektor) und statt der Bewegung der Elektronen diejenige der Löcher betrachten.

Kennlinien des Flächentransistors. Bild 7.42 zeigt die Kennlinien für die Basisschaltung. In Quadrant I ist $I_C = f(U_{CB})$ bei verschiedenen Emittierströmen I_E aufgezeichnet. Man sieht deutlich den Sättigungscharakter des Stromes. I_{CB0} ist der Sperrstrom in Basisschaltung. Er fließt durch die Kollektorschicht, wenn kein Emittierstrom eingespeist wird ($I_E = 0$). Quadrant II zeigt $I_C = f(I_E)$. Im dritten Quadranten ist die „Eingangskennlinie“ $I_E = f(U_{EB})$ zu sehen, sie ist praktisch die Kennlinie der in Flussrichtung gepolten Emittierdiode (vgl. z.B. Bild 7.30).

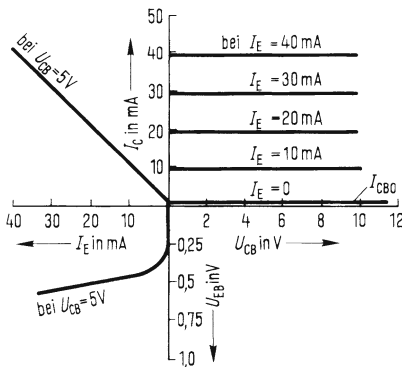


Bild 7.42 Kennlinien eines Flächentransistors in Basisschaltung

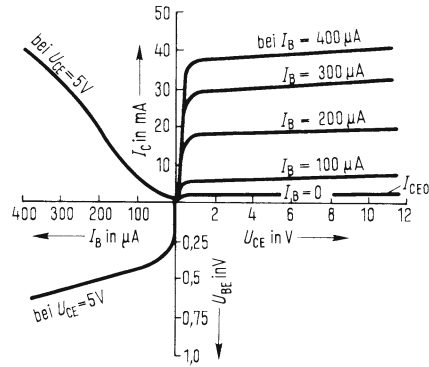


Bild 7.43 Kennlinien eines Flächentransistors in Emitterschaltung

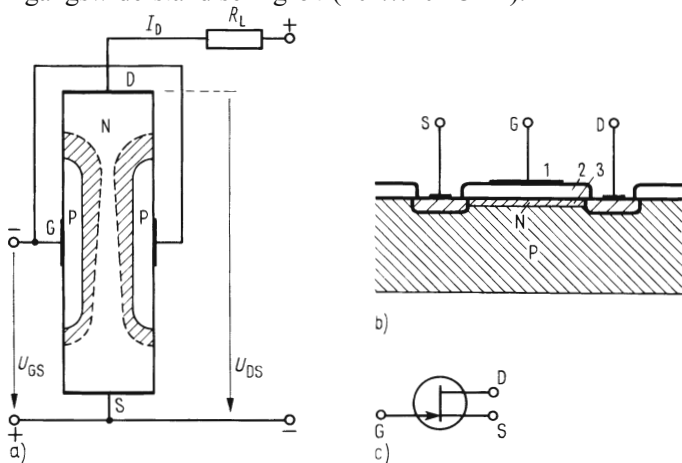
Bild 7.43 gibt die Kennlinien für die Emitterschaltung wieder. Sie ähneln sehr stark denen für die Basisschaltung. An die Stelle von I_E tritt I_B , an die Stelle von U_{CB} die Spannung U_{CE} . Die Eingangsspannung U_{BE} ist für den gleichen Kollektorstrom gleich U_{EB} . I_{CE0} ist der Reststrom in Emitterschaltung. Er ist im Allgemeinen viel größer als I_{CB0} (s. oben). Es gilt $I_{CE0} \approx \beta I_{CB0}$. Es sei noch erwähnt, dass der Transistor hier einen größeren Eingangswiderstand R_{BE} besitzt als denjenigen in Basisschaltung R_{EB} . Es ist nämlich $R_{BE} = U_{BE}/I_B$ und $R_{EB} = U_{EB}/I_E$. Nun ist $I_B = I_C/\beta \approx I_E/\beta$. Damit wird wegen $U_{EB} = U_{BE}$ schließlich $R_{BE} \approx \beta R_{EB}$.

Unipolar- oder Feldeffekt-Transistor. Dieser Transistor besitzt eine ganz andere Wirkungsweise als der Flächentransistor. Die Art, wie bei ihm ein Strom gesteuert wird, ähnelt vielmehr derjenigen einer Vakuum-Verstärkerröhre. Bild 7.44a zeigt seinen prinzipiellen Aufbau. Ein Stab aus N-leitendem Material mit den Anschlüssen S (für Source (Quelle))

und D (für Drain (Senke)) wird an zwei gegenüberliegenden Seiten von P-leitenden Gebieten begrenzt. Legt man an den Stab in der gezeichneten Weise eine Spannung U_{DS} an, so fließt ein Strom, der nur von Elektronen, also Ladungsträgern nur einer Polarität, getragen wird. – Daher die Bezeichnung Unipolar-Transistor. – Legt man an die beiden miteinander verbundenen PN-Schichten über die Elektrode G (für Gate (Tor)) eine Sperrspannung U_{GS} , so entsteht im N-Gebiet eine von Ladungsträgern freie Raumladungszone, deren Dicke gemäß S. 599 und 602 umso größer ist, je größer die Sperrspannung ist (in Bild 7.44a schraffiert). Der Durchmesser des leitfähigen Kanals und damit der Strom wird also durch die anliegende Sperrspannung oder das elektrische Feld des PN-Übergangs gesteuert. Daher der Name Feldeffekt-Transistor, FET. Da im Steuerkreis nur der sehr kleine Sperrstrom fließt, ist der Eingangswiderstand sehr groß ($10^6 \dots 10^9$ Ohm).

Bild 7.44

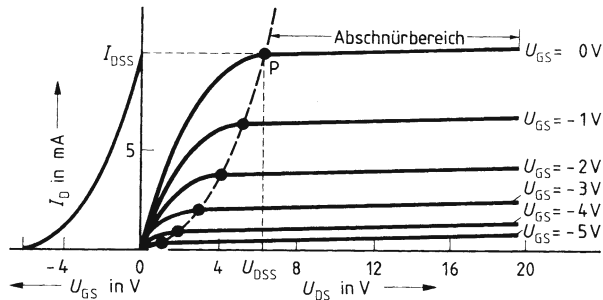
a) Wirkungsweise eines Feldeffekt-Transistors (schematisch). R_L Lastwiderstand, G Steuerelektrode (Gate), S und D Anschlüsse des gesteuerten Stromkanales (Source und Drain)
 b) Schema eines Feldeffekt-Transistors mit isolierter Steuerelektrode (MOS-FET)
 c) Schaltzeichen eines Feldeffekt-Transistors



Steigert man bei konstanter Spannung U_{GS} die Spannung U_{DS} , so wächst auch dadurch die Sperrspannung an den PN-Schichten und damit deren Ausdehnung. Hierdurch wird der N-Kanal, vor allem in der Nähe der D-Elektrode, immer enger, bis er sich bei Erreichen der Spannung U_{DSS} abzuschnüren beginnt. – Man beachte das Kennlinienfeld des Bildes 7.45. – Von diesem Punkt an (für $U_{GS} = 0$, in Bild 7.45 mit P bezeichnet) wächst der Strom I_D kaum noch an. Er wird durch Injektion von Ladungsträgern in das Sperrgebiet aufrecht erhalten. – Dieses Gebiet heißt „Abschnürbereich“. – Man sieht, dass hier der Innenwiderstand $\Delta U_{DS}/\Delta I_{DSS}$ des Feldeffekttransistors sehr hoch ist.

Bild 7.45

Übertragungskennlinie $I_D = f(U_{GS})$ (links) und Ausgangskennlinien $I_D = f(U_{DS})$ bei verschiedenen Eingangsspannungen U_{GS} (rechts) eines FET. U_{DSS} ist die Abschneürspannung bei $U_{GS} = 0$, I_{DSS} der zugehörige Sättigungsstrom.



Trägt man die zu verschiedenen Spannungen U_{GS} gehörenden Abschneür- oder Sättigungsströme I_{DSS} als Funktion von U_{GS} auf, so bekommt man die im zweiten Quadranten des Bildes 7.45 eingezeichnete sog. Übertragungskennlinie.

Bei einer anderen Form des Feldeffekt-Transistors (Bild 7.44b) (MOS-FET) befindet sich beispielsweise auf einem P-dotierten Substrat (meist P-Silicium) eine sehr dünne N-leitende Schicht 3, die durch eine dünne Isolierschicht (Metalloxidschicht) 2 von einer metallischen Gate-Elektrode 1 getrennt ist. Die Schichten 1, 2 und 3 bilden hierbei einen Kondensator. Legt man an G eine gegenüber S positive Spannung, so werden im N-Kanal 3 negative Ladungen, d.h. zusätzliche freie Elektronen, influenziert, welche seine Leitfähigkeit erhöhen. Legt man an G eine gegen S negative Spannung, kompensiert die in der N-Schicht influenzierte positive Ladung einen Teil der freien Elektronen, sodass die Leitfähigkeit abnimmt. Bild 7.46 zeigt die zugehörige Kennlinie. Man erkennt dort auch, dass sich der MOS-FET bezüglich der Abhängigkeit des Stromes I_D von der Spannung U_{DS} wie der eingangs beschriebene FET verhält. Wegen der isolierten Steuerelektrode hat der MOS-FET allerdings einen besonders hohen Eingangswiderstand ($10^9 \dots 10^{15}$ Ohm).

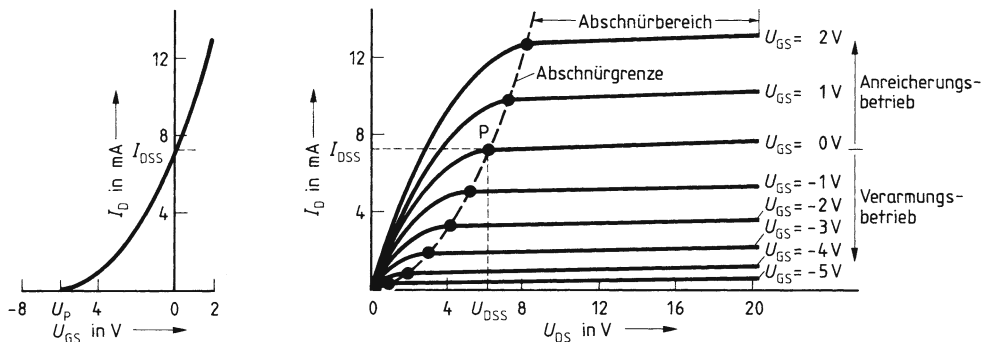


Bild 7.46 Die gleichen Kennlinien wie in Bild 7.45 für einen N-Kanal-MOS-FET

Außer den hier beschriebenen Ausführungen von Feldeffekt-Transistoren gibt es auch noch solche, bei denen die P- und N-Schichten vertauscht sind. Hierzu sei jedoch auf die Spezialliteratur (z. B. [19]) verwiesen.

Allgemein gilt:

Feldeffekt-Transistoren besitzen einen sehr hohen Eingangswiderstand. Sie gestatten daher eine praktisch leistungslose Steuerung eines Stromes durch eine Spannung. Außerdem haben sie einen hohen Innenwiderstand.

Je nach Typ haben sie Steilheiten $S = \Delta I_D / U_{GS}$ zwischen 0,5 mA/V und ca. 20 mA/V.

Vierschicht-Triode oder Thyristor. Dieses Bauelement besitzt große Bedeutung für die Industrie-Elektronik, insbesondere die Steuerungs- und Antriebstechnik. Seine Wirkungsweise machen wir uns anhand von Bild 7.47 klar. Wir erkennen dort vier abwechselnd dotierte Zonen. Legt man an die beiden äußeren Schichten 1 und 4 in der gezeichneten Weise eine Spannung an, so sind die beiden äußeren PN-Übergänge in Flussrichtung, der innere hingegen in Sperrrichtung gepolt. Es fließt nur ein kleiner Sperrstrom. Legt man jetzt an die Steuerelektrode (Zone 3) eine positive Spannung, so gelangen wie bei einem Flächentransistor durch die dünne Zone 3 viele Elektronen in die Sperrschicht 2-3 und erhöhen dort den Sperrstrom. – 2-3-4 wirkt wie ein NPN-Transistor. – Das hat aber zur Folge, dass auch am linken PN-Übergang (1-2) die Flussspannung steigt. Dieser „emittiert“

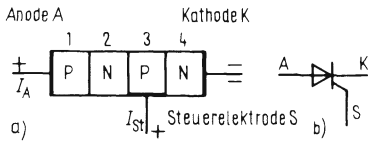


Bild 7.47 Vierschichttriode oder Thyristor
 a) schematischer Aufbau
 b) Schaltzeichen

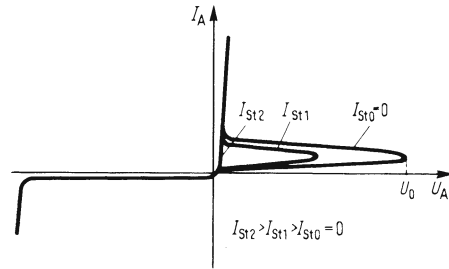


Bild 7.48 Kennlinien eines Thyristors. Bei Einspeisung eines Steuerstromimpulses I_{Stz} „zündet“ der Thyristor. Bei $I_{Stz} = 0$ bleibt er gesperrt, solange die zugehörige Maximalspannung U_0 nicht überschritten wird.

Löcher in die mittlere PN-Schicht – 1-2-3 wirkt wie ein PNP-Transistor. – Der mittlere PN-Übergang wird also von Ladungsträgern überschwemmt, und die ganze Strecke „kippt“ in einen niederohmigen Zustand. In diesem bleibt sie jetzt auch nach Wegnahme der Steuerspannung, bis die an 1 und 4 liegende Spannung ebenfalls entfernt wird. Legt man „Minus“ an die Anode und „Plus“ an die Kathode, so erhält man das Verhalten eines normalen in Sperrrichtung gepolten Gleichrichters. Bild 7.48 zeigt eine Kennlinie. Sie ähnelt stark derjenigen eines Thyratrons (s. Abschn. 3.2.6.2). Daher auch der Name Thyristor.

Eine Vierschicht-Triode lässt sich durch einen kurzen Spannungsimpuls vom gesperrten in den leitfähigen Zustand schalten. Sie wirkt wie ein Thyratron.

Im Vergleich mit Letzterem ist die Durchlassspannung im eingeschalteten Zustand jedoch viel kleiner (nur etwa 1 V).

Unijunction-Transistor oder Doppelbasisdiode (Bild 7.49). Dieses Bauelement besteht aus einem schwach dotierten, N-leitenden Kristall mit relativ kleinem Querschnitt, der an den beiden Enden die sperrschichtfreien Anschlüsse B_1 und B_2 als sog. Basisanschlüsse besitzt. – Daher der Name „Doppelbasisdiode“. – In der Nähe von B_1 befindet sich eine P-Zone mit dem äußeren Anschluss E, die den Gesamtwiderstand R_{BB} des Kristalls in die Teilwiderstände R_{B1} und R_{B2} aufteilt. Zwischen der P-Zone und dem N-leitenden Kristall entsteht eine PN-Schicht (engl. junction), die den Namen „Unijunction-Transistor“ erklärt.

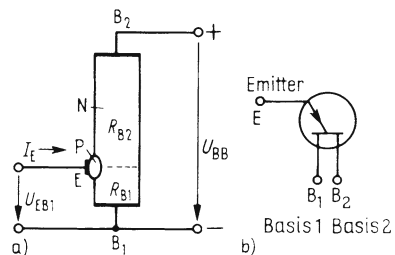


Bild 7.49 Unijunction-Transistor oder Doppelbasisdiode
 a) schematische Darstellung
 b) Schaltzeichen

Man legt an B_2 den Pluspol und an B_1 den Minuspol einer äußeren Spannung U_{BB} der Größenordnung 2 V bis 30 V, welche einen Strom durch den Kristall fließen lässt. Dieser erzeugt am Teilwiderstand R_{B1} eine Spannung

$$U_{B1} = U_{BB} R_{B1} / R_{BB}$$

Für die Anwendung dieses Bauelementes sind jetzt die I_E - U_{EB1} -Kennlinien seines zwischen E und B_1 liegenden Teiles von Interesse (Bild 7.50). Ist die Spannung U_{EB1} kleiner als U_{B1} , so ist die PN-Schicht gesperrt, und es fließt nur ein kleiner Reststrom I_{E0} . Das entspricht einem Eingangswiderstand von einigen $M\Omega$. Erhöht man U_{EB1} nur wenig über U_{B1} , so wird die PN-Schicht in Flussrichtung gepolt, wird also in Richtung der P-Schicht von Elektronen, in Richtung der N-Schicht von Löchern überschwemmt. Letztere gelangen dabei auch in den Teilwiderstand R_{B1} , wodurch R_{B1} und damit gemäß Gl. (7.14) auch U_{B1} erniedrigt wird. Die PN-Schicht wird dadurch noch stärker in Flussrichtung vorgespannt, woraufhin R_{B1} von weiteren Löchern überschwemmt und noch niedriger wird usw.; auf diese Weise sinkt mit wachsendem Strom I_E die Spannung U_{EB1} .

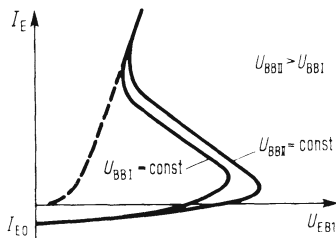


Bild 7.50 I_E - U_{EB1} -Kennlinien eines Unijunction-Transistors bei zwei verschiedenen Basis-Basis-Spannungen U_{BB} . Gestrichelt angedeutet ist die Diodenkennlinie der PN-Schicht

Es entsteht ein Kennlinienstück mit negativem Widerstand, bis die Kennlinie in die normale Diodenkennlinie der PN-Schicht übergeht.

Bild 7.50 zeigt diesen Verlauf für zwei verschiedene Spannungen U_{BB} .

Wichtig ist hierbei noch:

Das Kennlinienstück mit negativem Widerstand beginnt erst nach Überschreiten einer Schwellenspannung.

Durch diese Eigenschaft lässt sich der Unijunction-Transistor in Impulsgeneratoren, Schwellwertschaltern und dgl. einsetzen. Er ähnelt in seinem Verhalten einer Gasentladungsstrecke.

Gunn-Effekt. Im Jahre 1963 entdeckte J. B. Gunn, dass in sehr dünnen Scheiben von N-leitendem Galliumarsenid (GaAs), Indiumphosphid (InP) oder Indiumarsenid (InAs) hochfrequente elektrische Schwingungen entstehen, wenn man an die Scheiben eine genügend hohe elektrische Gleichspannung legt. Ein $1 \mu\text{m}$ dickes GaAs-Scheibchen liefert z.B. eine Frequenz von 40 GHz!

Dieser Effekt, der sog. Gunn-Effekt, lässt sich durch folgende Modellvorstellung deuten:

Die den Gunn-Effekt zeigenden Substanzen besitzen eine Gitterstruktur, bei der die Gitteratome in verschiedenen Kristallrichtungen unterschiedliche Wechselwirkungskräfte aufeinander ausüben. Dadurch ist auch die zur Ablösung eines Bindungselektrons erforderliche Energie ΔW_0 in verschiedenen Kristallrichtungen unterschiedlich hoch. Im Bändermodell bedeutet das eine unterschiedliche Höhe des Leitungsbandes über dem Valenzband. Bild 7.51 zeigt diese Verhältnisse für GaAs.

Im thermodynamischen Gleichgewicht befinden sich die von den Donatoren stammenden freien Elektronen auf dem niedrigsten Energieniveau, das für sie möglich ist, nämlich W_{L1} .

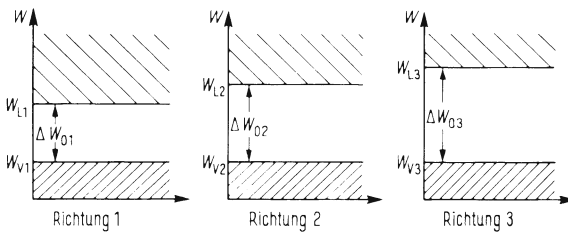


Bild 751 Energiebändermodell für GaAs

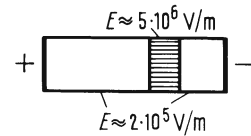


Bild 752 Wanderung einer Hochfeld-Domäne beim Gunn-Effekt

Legt man jetzt eine genügend hohe Spannung an (kritische Feldstärke $E_{\text{krit}} \approx 3,7 \cdot 10^5 \text{ V/m}$), so gewinnt ein großer Teil der Elektronen auf einer Laufstrecke, die klein gegen die Scheibendicke ist, im elektrischen Feld so viel Energie, dass sie auf das höhere Niveau W_{L2} oder W_{L3} gelangen. Aus Gründen, die hier nicht näher erläutert werden sollen, wird in diesen Energiebereichen aber ihre Beweglichkeit kleiner. Dadurch nimmt auch die Leitfähigkeit einer dünnen Kristallzone ab, in der sich diese Elektronen befinden. An dieser Zone fällt deshalb jetzt fast die gesamte von außen angelegte Spannung ab, sodass sich hier eine sog. „Domäne“ hoher Feldstärke (ca. $5 \cdot 10^6 \text{ V/m}$) bildet, die mit einer Geschwindigkeit v_D von etwa 10^5 m/s zur Anode wandert (Bild 7.52). Hier verschwindet die Hochfelddomäne, und der Kristall wird kurzzeitig niederohmig. Dann bildet sich vor der Kathode eine neue hochohmige Zone aus, die wieder zur Anode läuft usw. Das bedeutet aber:

In dünnen Scheiben aus N-leitendem GaAs, InAs oder InP entstehen oberhalb einer kritischen Feldstärke durch den Gunn-Effekt elektrische Schwingungen sehr hoher Frequenz. Letztere hängt von der Scheibendicke ab.

Im Dauerbetrieb sind mit Wirkungsgraden zwischen etwa 6% bis 20% Leistungen von 100 W bei 1 GHz und 20 mW bei 50 GHz, im Impulsbetrieb 300 W bei 1 GHz und 20 mW bei 100 GHz erreicht worden.

LSA-Betrieb. Den oben beschriebenen Sachverhalt kann man als Kennlinie in einem I - U -Diagramm veranschaulichen (Bild 7.53). Dem Betrieb unterhalb der kritischen Feldstärke – und damit einer kritischen angelegten Spannung – entspricht ein kleiner Widerstand r_1 des Kristalles, dem Betrieb darüber ein großer Widerstand r_2 . Dazwischen liegt ein Kennlinienstück mit negativem Widerstand r_{neg} .

J.A.Copeland zeigte 1967, dass man in diesem Gebiet entsprechende Halbleiterkristalle zur Schwingungserzeugung benutzen kann, ohne die Hochfelddomänen (s. oben) jeweils bis zur Anode wandern lassen zu müssen. Dadurch ist die Frequenz nicht mehr von der Scheibendicke abhängig, sondern nur noch von den Daten des äußeren Schwingkreises.

Diese Betriebsart heißt LSA-Betrieb. LSA ist hierbei die Abkürzung für „limited space-charge accumulation.“

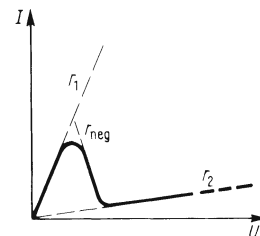


Bild 753 Kennlinie zur Schwingungserzeugung im LSA-Betrieb

Integrierte Schaltungen. In Abschn. 7.4.3.3 wird gezeigt, wie man Dioden, Transistoren, Kapazitäten und Widerstände in Halbleitern realisieren kann. Wie allgemein bekannt ist, beschränkt man sich heute nicht mehr auf deren Realisierung als einzelne Bauelemente, sondern ist in der Lage, in einem einzigen Stück Halbleiter durch geschickte Kombination von P- und N-Schichten eine sehr große Zahl solcher Bauelemente zu ganzen elektronischen Schaltungen zusammenzufassen. Eine solche Schaltung heißt „Integrierte Schaltung“, abgekürzt „IS“ oder „IC“ (von der englischen Bezeichnung „integrated circuit“).

Man unterscheidet hierbei im Wesentlichen zwei große Gruppen, die sog. „linearen IS“, zu denen z. B. die Operationsverstärker gehören, und die sog. „digitalen IS“, welche z.B. die Mikroprozessoren umfassen.

In beiden Gruppen kennzeichnet man den sog. „Integrationsgrad“ durch die Zahl der Transistorfunktionen, die man in einem einzigen Siliciumkristall mit einer Fläche von wenigen mm^2 zu einer sinnvoll funktionierenden elektronischen Schaltung zusammenfassen kann. Dieser Integrationsgrad hat in der Vergangenheit eine geradezu rasante Entwicklung erfahren. Die phantastische Zahl von einer Milliarde Transistorfunktionen pro IS erscheint realistisch.

Festkörpersensoren für Gase. Zur Messung und Regelung der Konzentration bestimmter Gase dienen in vielen Fällen geeignete Anordnungen von Festkörpern, die man Sensoren nennt. Aus der großen Vielfalt soll ein technisches Beispiel beschrieben werden, um die prinzipiellen Möglichkeiten solcher Sensoren zu erklären.

Lambda-Sonde. Diese dient zur Messung des Sauerstoffpartialdrucks im Abgas von Verbrennungsmotoren und ermöglicht damit über die Regelung des Luft-Brennstoff-Verhältnisses die Einstellung des jeweils optimalen Wirkungsgrades. Bild 7.54 zeigt das Aufbauschema. Ein Röhrchen aus Zirkonoxid-Keramik (ZrO_2) trägt innen und außen Elektroden aus porösem Platin, die innen dem Abgas, außen der Umgebungsluft ausgesetzt sind. Die Platin-Elektroden bewirken selektiv eine katalytische Umwandlung von Sauerstoffmolekülen in O^- -Ionen, die durch die porösen Platin-Schichten als Störstellen in das ZrO_2 diffundieren. Ihre Konzentrationen sind den Sauerstoffpartialdrücken vor den jeweiligen Elektroden proportional.

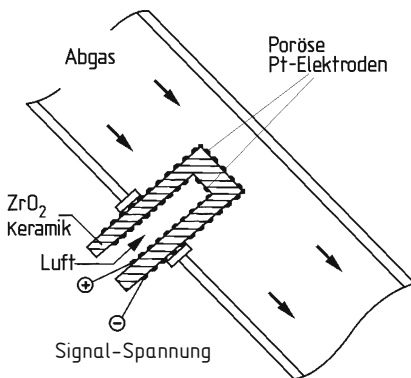


Bild 7.54 Aufbauschema einer Lambda-Sonde

Bild 7.55 zeigt dies in einem vereinfachten Schema. Wegen der unterschiedlichen Dichten auf der Luft- und der Abgasseite diffundieren die Störstellen in Richtung des Dichtegefälles. Hierbei lädt sich die Luft-Seite positiv auf, und es entsteht analog zu dem in Abschn. 7.4.3.3 bei einer PN-Schicht beschriebenen Mechanismus eine Diffusionsspannung U_D , die einen Dichteausgleich verhindert (Bild 7.56). Diese Spannung benutzt man zur Motorregelung.

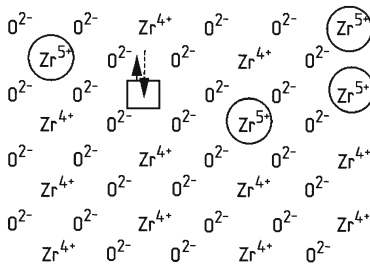


Bild 7.55 Schema der Funktionsweise einer Lambda-Sonde

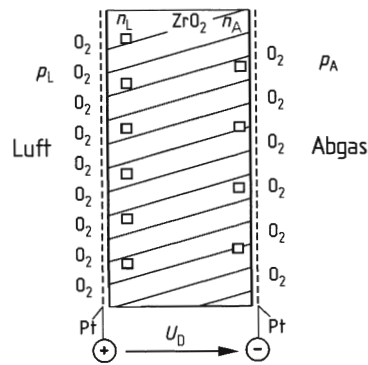


Bild 7.56 Entstehung der Regelspannung bei einer Lambda-Sonde

Aufgaben zu Abschn. 7.4.3.3

1. Wie groß ist die Diffusionsspannung einer unsymmetrischen PN-Schicht in Silicium mit $n_A = 10^5 n_i$ und $n_D = 10^3 n_i$ bei 300 K?

($\frac{kT}{e_0} = 26 \text{ mV}$).

2. Wie hängt der „differentielle Widerstand“ $r = dU/dI$ einer Diodenkennlinie in Flussrichtung (exponentieller Teil) vom Strom I ab? – Diese Abhängigkeit kann man z.B. zum Bau eines elektronisch regelbaren Spannungsteilers (Diode und normaler Widerstand in Reihe) ausnutzen.

3. Ein Silicium-Gleichrichter hat bei Zimmer-temperatur (20 °C) den Sperrstrom $I_{sp1} = 1,2 \mu\text{A}$. Wie groß ist der Sperrstrom bei 30°C und 100°C?

4. Bei einer Z-Diode ändert sich die Spannung U im Durchbruchgebiet linear von 6,3 V auf 6,5 V, wenn man den zugehörigen Strom I_Z von 5 mA auf 15 mA steigert. Diesen Zusammenhang pflegt man mit der „Zenerspannung“ U_Z und dem „differentiellen Zener-Widerstand“ $r_Z = \frac{\Delta U}{\Delta I_Z}$

in der Form $U = U_Z + r_Z I_Z$ darzustellen. In unserem Beispiel ergibt sich $U_Z = 6,2 \text{ V}$ und $r_Z = 20 \text{ Ohm}$. Um wie viel Prozent ändert sich die Spannung U_L an einem Verbraucher R_L in der Schaltung gemäß Bild 7.57, wenn die Versorgungsspannung $U_0 = 12 \text{ V}$ um 10% wächst?

5. Wie groß kann höchstens die Leerlaufspannung eines Silicium-Photoelementes bei 300 K werden, bei dem $n_A = 10^3 n_i$ und $n_D = 10^5 n_i$ ist?

6. In den in Bild 7.58 gezeichneten Transistorschaltungen soll durch den Lastwiderstand 20 kΩ

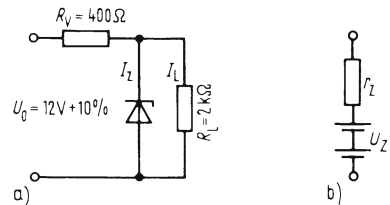


Bild 7.57 a) Schaltbild zu Aufgabe 4
b) Ersatzschaltbild für die Z-Diode

ein Kollektorstrom $I_C = 1 \text{ mA}$ fließen. Hierzu ist in der Basisschaltung (Bild 7.58a) ein Emitterstrom $I_E = 1,02 \text{ mA}$ und eine Emitter-Basis-Spannung $U_{EB} = 0,25 \text{ V}$ erforderlich. (Der Kollektorreststrom werde vernachlässigt.)

Man vergleiche die Stromverstärkung V_I , Spannungsverstärkung V_U und Leistungsverstärkung V_P in der Basisschaltung mit den entsprechenden Werten der mit dem gleichen Transistor betriebenen Emitterschaltung (Bild 7.58b).

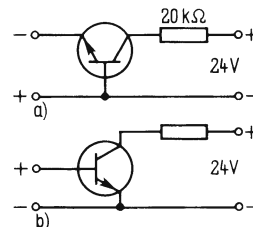


Bild 7.58 Schaltbild zu Aufgabe 6

Anmerkung: Es gilt $V_P = V_U V_I$, wie man sich leicht klarmacht.

7. In der in Bild 7.59a gezeichneten Schaltung wird ein Thyristor durch die Zündschaltung stets in der Mitte jeder zweiten Halbperiode gezündet, sodass ein Strom fließt, dessen Zeitabhängigkeit Bild 7.59b ausgezogen zeigt. Wie groß ist der Effektivwert dieses Stromes?

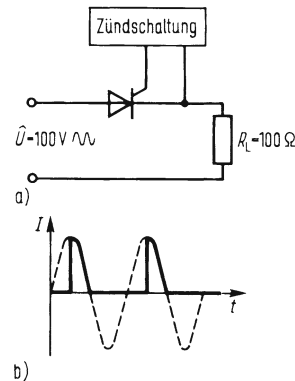


Bild 7.59 Schaltbild und Stromverlauf zu Aufgabe 7

7.4.4 Supraleitung

Bei einigen Metallen, Legierungen und metallisch leitenden Verbindungen sinkt bei Abkühlung auf sehr tiefe Temperaturen (einige K) der Wirkwiderstand auf einen unmessbar kleinen Wert. Diese Erscheinung bezeichnet man als Supraleitung.

Der Übergang vom normal leitenden in den supraleitenden Zustand erfolgt dabei innerhalb eines sehr kleinen Temperaturbereiches von nur wenigen hundertstel bis zehntel Kelvin bei der sog. Sprungtemperatur T_S . Für diese gilt: Bei Abkühlung auf die Sprungtemperatur T_S hat der spezifische elektrische Widerstand ρ die Hälfte des Wertes ρ_N bei Normalleitung (Bild 7.60).

Tafel 7.61 zeigt die Sprungtemperaturen einiger Supraleiter.

Tafel 7.61 Sprungtemperaturen T_S und kritische magnetische Induktionen B_k bzw. B_{k2} einiger Supraleiter			
Supraleiter	T_S in K	B_k in T	B_{k2} in T
In	3,4	0,029	
Sn	3,7	0,031	
Pb	7,2	0,080	
PbBi	8,6		12,5
Nb	9,2		0,6
NbTi	8–10		9–12
NbZr	9–11		7–9
V ₃ Ga	14,5		21
V ₃ Si	17		23,5
Nb ₃ Sn	18,3		21
Nb ₃ Al	18,7		29,5
Nb ₃ (Al _{0,73} Ge _{0,27})	20,7		41
MgB ₂	38		18
YBa ₂ Cu ₃ O ₇	ca. 92		

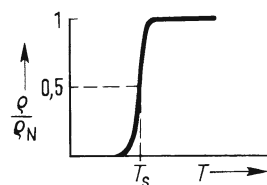


Bild 7.60 Sprungtemperatur

Besonders interessant ist die hohe Sprungtemperatur des zuletzt stehenden Oxids, das bereits bei der Temperatur des flüssigen Stickstoffs ($T = 77$ K bei 1013 h Pa) supraleitend ist, sodass man nicht mit dem seltenen und darum teuren flüssigen Helium zu kühlen braucht.

Allerdings weist diese Verbindung wie auch ähnlich aufgebaute Substanzen eine relativ kleine kritische magnetische Induktion auf.

Die Deutung der Supraleitung ist ziemlich schwierig. Wir müssen daher hier mit einer relativ groben Modellvorstellung vorlieb nehmen. Nach dieser treten unterhalb der Sprungtemperatur durch Wechselwirkung mit dem Kristallgitter jeweils zwei Elektronen mit entgegengesetzten Spins zu sog. Cooper-Paaren¹⁾ zusammen, die sich wie ein einziges Teilchen im elektrischen Feld bewegen. Da die Cooper-Paare keinen Spin besitzen, sind sie auch nicht mehr durch das Pauliprinzip (vgl. Abschn. 6.1.2.2) an die für die freien Elektronen gültigen Energiebänder gebunden. Sie verhalten sich wie Bosonen und können sich deshalb alle gleichzeitig im tiefstmöglichen Energieniveau befinden. Hierbei tritt eine Kopplung der Wellenfunktionen aller Cooper-Paare auf, die bewirkt, dass sich deren Ladungsschwerpunkt wie ein einziger großer negativer Ladungsträger durch das positive Kristallgitter bewegt. Es ist einleuchtend, dass irgendwelche Gitterstörungen, welche die Bewegung einzelner Elektronen stark beeinflussen können, die Bewegung der gekoppelten Elektronengesamtheit nicht zu behindern vermögen.

Erst wenn die Stromdichte einen oberen, sog. kritischen Wert überschreitet, können mehr und mehr Cooper-Paare durch Zufuhr ihrer Bindungsenergie in Einzelelektronen aufgebrochen werden, worauf wieder Normalleitung auftritt.

Magnetisches Verhalten der Supraleiter. Dieses ist, wie wir unten sehen werden, für die Anwendung der Supraleiter besonders interessant.

Supraleiter I. Art. Bringt man einen Supraleiter bei einer Temperatur $T < T_S$ in ein Magnetfeld und steigert die magnetische Erregung, so wird er bei der sog. kritischen magnetischen Induktion B_k wieder normal leitend. B_k hängt vom Material und von der Temperatur ab.

In Magnetfeldern mit $B < B_k$ bilden sich an der Oberfläche des Supraleiters Abschirmströme, die das Magnetfeld im Inneren kompensieren, sodass hier die magnetische Erregung Null ist. Das bedeutet:

Ein supraleitender Körper I. Art ist in Magnetfeldern, deren magnetische Induktion kleiner als die kritische Induktion B_k ist, ideal diamagnetisch mit der Permeabilitätszahl $\mu_r = 0$ und der Suszeptibilität $\chi = -1$.

Oberhalb der kritischen Induktion B_k durchsetzt das Magnetfeld den Körper natürlich wieder, da er dann ja normalleitend ist.

Auch wenn man einen Supraleiter I. Art schon im normal leitenden Zustand (also bei $T > T_S$) in ein Magnetfeld mit der magnetischen Induktion $B < B_k$ bringt und dann unter die Sprungtemperatur T_S abkühlt, wird das Magnetfeld bis auf eine sehr dünne Schicht, die sog. Eindringtiefe (einige 10^{-8} m), aus dem nun supraleitenden Körper verdrängt. Diese Erscheinung heißt Meißner-Ochsenfeld-Effekt²⁾.

¹⁾ Die Theorie der Supraleitung stammt von J. Bardeen, L. N. Cooper und J. J. B. Schrieffer (gemeinsamer Nobelpreis 1972).

²⁾ W. Meißner (1882 bis 1974) und R. Ochsenfeld (1901 bis 1993) entdeckten diesen Effekt im Jahre 1933.

Supraleiter II. Art. Bei diesen wird nicht wie bei den Supraleitern I. Art bei Erreichen einer kritischen magnetischen Induktion der Körper schlagartig vom äußeren Magnetfeld vollständig durchsetzt, wobei dieser normalleitend wird. Vielmehr dringt bei den Supraleitern II. Art bei Überschreiten einer kritischen magnetischen Induktion B_{k1} das äußere Magnetfeld nur allmählich in den Supraleiter ein, bis es bei einer zweiten kritischen Induktion B_{k2} den Körper völlig durchdrungen hat, worauf dieser erst dann normalleitend wird. Technisch interessant ist dabei, dass die kritischen magnetischen Induktionen B_{k2} der Supraleiter II. Art sehr viel größer sein können als die kritischen magnetischen Induktionen B_k der Supraleiter I. Art. Der Bereich zwischen B_{k1} und B_{k2} bildet, wie man inzwischen weiß, einen sog. „Mischzustand“ aus supraleitenden und normalleitenden Gebieten. Höchst bemerkenswert ist hierbei, dass die normalleitenden Gebiete ein regelmäßiges Muster im Supraleiter bilden (Bild 7.62) und dass jedes dieser Gebiete nur genau je ein ganzzahliges Vielfaches eines sog. „magnetischen Flussquants“ $\Phi_0 = h/2e_0 = 2,07 \cdot 10^{-15} \text{ Vs}$ führt¹⁾. Jeder dieser „Flussschläuche“ ist von Ringströmen im Supraleiter umgeben.

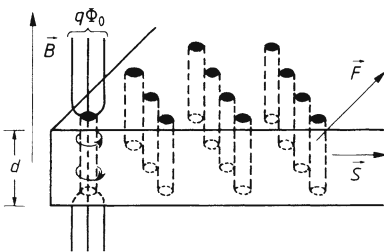


Bild 7.62 Schema eines Flussschlauch-Gitters im Supraleiter II. und III. Art. Die Flussschläuche sind normalleitend. $q = 1, 2, 3, \dots$

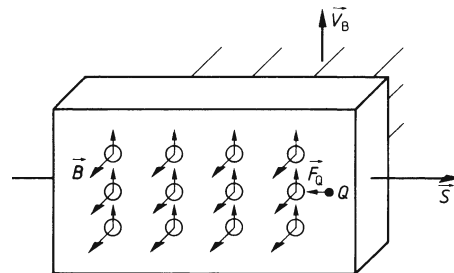


Bild 7.63 Die Flussschläuche und damit das Magnetfeld wandern mit der Geschwindigkeit \vec{v}_B durch den Leiter. Dies entspricht einer Bewegung der Ladungsträger relativ zum Magnetfeld mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_{rel} = -\vec{v}_B$ welche die Lorentzkraft \vec{F}_0 entgegen der Stromrichtung verursacht. – In Wirklichkeit haben die Ladungsträger natürlich nur ihre Driftgeschwindigkeit in Richtung von S . –

Es ist jetzt leicht einzusehen, warum bei Steigerung der äußeren magnetischen Erregung und damit des magnetischen Flusses die Zahl der Flussquanten und mit ihr die Dichte der Flussschläuche immer mehr zunimmt, bis schließlich der ganze Leiter normalleitend wird.

Supraleiter III. Art. Schickt man einen Strom mit der Stromdichte \vec{S} durch den eben beschriebenen Leiter im Mischzustand, so übt er auf jeden Flussschlauch eine Lorentzkraft \vec{F} mit dem Betrag $Sq\Phi_0 d$ senkrecht zu \vec{S} und \vec{B} aus (Bild 7.62). Unter dem Einfluss dieser Kraft wandern die Flussschläuche mit der Geschwindigkeit \vec{v}_B quer zur Stromrichtung durch den Supraleiter hindurch (Bild 7.63). – Die Ringströme verschwinden hierbei an einem Rand des Leiters und bilden sich am anderen Rand neu, wobei keine Ladung transportiert wird. – Wie man sich leicht überlegt, verursacht diese Bewegung des magnetischen Feldes relativ zu den Ladungen ihrerseits eine Lorentzkraft \vec{F}_Q entgegen der Stromrichtung, gegen welche die Ladungsträger sich bewegen müssen (Lenzsche Regel).

¹⁾ Die Tatsache, dass sich aus Experimenten für den Betrag des Flussquants nicht h/e_0 sondern $h/2e_0$ ergibt, ist einer der Beweise für die Existenz der Cooper-Paare (s.o.).

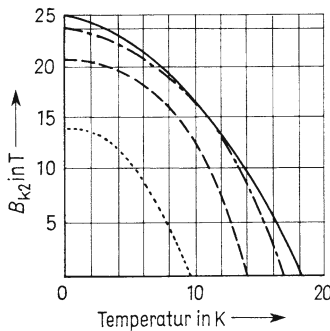


Bild 7.64 Kritische magnetische Induktion B_{k2} einiger Hochfeldsupraleiter als Funktion der Temperatur

- Nb_3Sn Drahtdurchmesser 0,5 mm
- - - V_3Si Drahtdurchmesser 0,5 mm
- · - V_3Ga gesintert
- · · $Nb_{50}Ti_{50}$

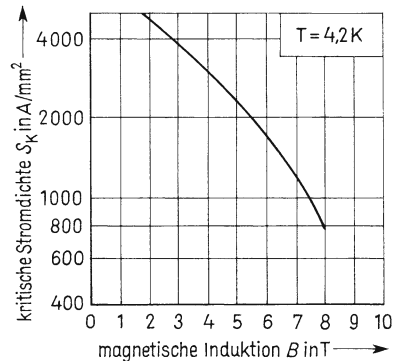


Bild 7.65 Kritische Stromdichte in Supraleitern aus $Nb_{50}Ti_{50}$ bei 4,2 K in Abhängigkeit von der magnetischen Induktion

Das heißt aber, dass es am Leiterstück einen Spannungsabfall gibt. Es weist einen endlichen Widerstand auf wie bei Normalleitung. Man hat jedoch gelernt, die Flussschläuche durch geeignet im Kristallgitter verteilte Gitterfehler wie Korngrenzen, Versetzungen und dgl. sozusagen „anzuheften“. Dadurch können die Flussschläuche sich nicht bewegen, und es gibt daher auch nicht den oben beschriebenen Spannungsabfall in Stromrichtung. Es bleibt bei Supraleitung. Im Englischen heißt „anheften“ „to pin“. Deshalb nennt man diese Fehlstellen auch „pinning-Zentren“. Sie ermöglichen eine relativ hohe kritische Stromdichte S_k , die dann erreicht ist, wenn die Lorentzkraft auf die Flussschläuche gleich der festhaltenden „pinning-Kraft“ geworden ist und die Flussschläuche „losreißen“. Supraleiter mit „pinning-Zentren“ heißen „harte Supraleiter“, „Hochfeldsupraleiter“ oder „Supraleiter III. Art“.

Daten und Kennlinien einiger typischer Supraleiter zeigen die Tafel 7.61 und die Bilder 7.64 und 7.65.

Supraleiter III. Art als Dauermagnete. Erstaunlicherweise kann man Supraleiter III. Art nicht nur zur verlustfreien Stromleitung benutzen, sondern auch als Dauermagnete mit Remanenz-Induktionen, die um das Zehnfache größer sind als diejenigen konventioneller ferromagnetischer Materialien. Hierbei magnetisiert man z.B. Zylinder aus einem der sog. „Hochtemperatur-Supraleiter“, dem in Tafel 7.61 zuletzt genannten $YBa_2Cu_3O_7$, im stromlosen Zustand in einem äußeren sehr starken Feld eines Elektromagneten auf. Dabei dringen bei einer Temperatur, die weit unter der Sprungtemperatur liegt, immer mehr Flussschläuche in den Supraleiter ein, die von den oben beschriebenen „pinning-Zentren“ festgehalten werden. Senkt man anschließend das äußere Magnetfeld wieder langsam auf Null ab, so bleiben die meisten Flussschläuche an den „pinning-Zentren“ fixiert. Auf diese Weise verbleibt ein remanentes Magnetfeld, dessen magnetische Induktion im Zentrum des Zylinders einen erstaunlich hohen Wert behält, in unserem Beispiel bei $T = 23 K$ den Wert $B_R = 16 T$. Das ist etwa 10mal so viel wie bei den bekannten konventionellen Werkstoffen für Dauermagneten, wie z.B. BaO , FeO_3 gesintert (vgl. Tafel 3.79). Da die Kraft eines Magneten gemäß Gl. (3.89) dem Quadrat seiner magnetischen Induktion proportional ist,

kann man mit diesen Dauermagneten aus Supraleitern demnach 100 mal so große Kräfte erzielen wie mit konventionellen Magnetwerkstoffen.

Anwendungen. In einer supraleitenden Spule, deren Anfang und Ende verbunden sind, fließt ein einmal induzierter Strom ohne Energieverlust beliebig lange weiter. Man braucht nur noch Kühlleistung aufzubringen, die bei guter Wärmeisolierung meist viel kleiner ist als die elektrische Verlustleistung einer entsprechenden normalleitenden Spule. Eine solche Spule kann z.B. als großer Dauermagnet wirken, wie er in Teilchenbeschleunigern, in der Magnetohydrodynamik, bei Magnetschwebbahnen oder zur magnetischen Abschirmung verwendet wird. Wichtig ist dabei, dass das eigene Magnetfeld nicht die kritische magnetische Induktion B_k übersteigt. Technisch sind daher besonders Stoffe mit hohen B_k -Werten wie z.B. Nb_3Sn oder Nb_3Al von Bedeutung.

Supraleitende Hohlraumresonatoren sind Mikrowellenresonatoren mit extrem hohem Gütefaktor. Weitere Anwendungen werden in Abschn. 7.4.5 beschrieben.

Durch die mit Dauermagneten aus Supraleitern möglichen sehr großen Magnetkräfte eröffnen sich für geschickte Ingenieure hoch interessante Anwendungen wie z.B. extrem tragfähige Magnetlager oder sehr kleine Elektromotoren mit großer Leistung.

7.4.5 Josephson-Effekte

Im Jahre 1962 sagte der damals 22-jährige britische Student Brian D. Josephson auf Grund theoretischer Überlegungen einige Effekte über das Tunneln von Cooper-Paaren voraus, die, wie wir unten sehen werden, wichtige technische Anwendungen gefunden haben¹⁾. Dazu gehören u.a. eine Methode zur äußerst genauen Darstellung der elektrischen Spannungseinheit Volt und die Konstruktion von Magnetfeldmessgeräten, die so empfindlich sind, dass man mit ihnen beispielsweise die Magnetfelder messen kann, die von Hirnströmen erzeugt werden. Diese sind bis zu 100millionenfach schwächer als das Erdmagnetfeld!

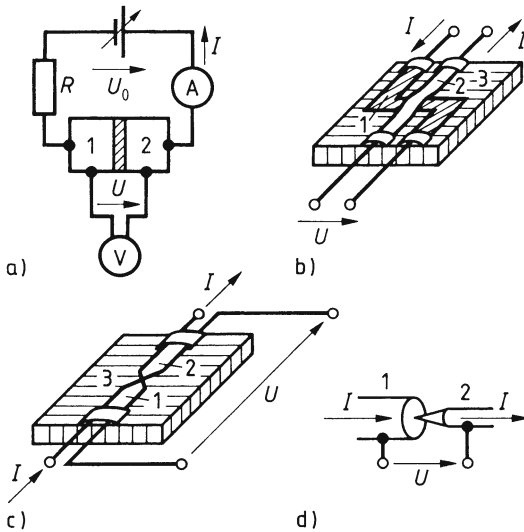
Tunneln von Cooper-Paaren durch Josephson-Barrieren.

Bild 7.66 zeigt schematisch den Aufbau einer Josephson-Barriere oder, wie man häufiger sagt, eines Josephson-Kontaktes sowie die sehr einfache Messanordnung, Bild 7.66b, c, d zeigen einige technische Ausführungen. Zwei supraleitende Schichten 1 und 2 sind durch eine sehr dünne (wenige nm „dicke“) Isolierschicht oder eine sehr dünne Engstelle getrennt. Genau genommen gelten die folgenden Betrachtungen nur für eine Anordnung gemäß Bild 7.66b, die dem Schema von Bild 7.66a am nächsten kommt. Die anderen Ausführungen nach Bild 7.66c und 7.66d sind sog. „schwache Kopplungen“ (weak links), die sich allerdings prinzipiell ähnlich wie die nach Bild 7.66b verhalten.

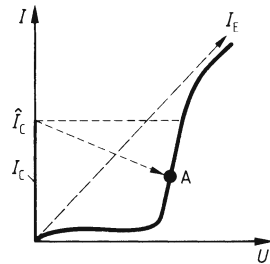
Wie in Abschn. 6.1.2.4 gezeigt wird, können durch einen solchen „Potentialwall“ bereits oberhalb der Sprungtemperatur Einzelelektronen „hindurch tunneln“. Sie verursachen den Strom I_E (Bild 7.67).

Kühlt man die Josephson-Barriere jedoch unter die Sprungtemperatur ab, so formieren sich, wie oben beschrieben, viele Elektronen zu Cooper-Paaren. Verblüffenderweise können diese die Isolierschicht durchtunneln, ohne dass an dieser eine Spannung anliegt. Ja, bei Anlegen einer Spannung wird der hiermit verbundene Gleichstrom sogar zu Null, und dafür erzeugt der Josephson-Kontakt einen sehr hochfrequenten Wechselstrom, dessen Frequenz der anliegenden Spannung direkt proportional ist. – Es sei noch darauf hingewie-

¹⁾ Er erhielt dafür im Jahre 1973 den Nobelpreis.

**Bild 7.66**

- a) Zwei Supraleiter 1 und 2 sind durch eine dünne Isolierschicht (schraffiert) verbunden. Die Messungen erfolgen in der angegebenen Schaltung.
- b) Auf einem Glassubstrat 3 sind zwei ca. 10^{-5} m dicke supraleitende Schichten 1 und 2 aufgedampft. Sie sind durch eine etwa 10^{-9} m dünne Oxidschicht an der Kreuzungsstelle gekoppelt.
- c) Die schwache Kopplung der etwa 10^{-5} m dicken Supraleiter 1 und 2 erfolgt durch eine etwa 10^{-6} m dünne Engstelle.
- d) Die schwache Kopplung erfolgt durch eine dünne Spitze.

**Bild 7.67** Abhängigkeit des Stromes I durch einen Josephson-Kontakt von der an ihm gemessenen Spannung U .

--- I_E bei $T > T_S$

— I_E bei $T < T_S$

Bei $T < T_C$ fließt der Cooperpaarstrom I_C bis zu einem kritischen Maximalwert \hat{I}_C bei $U=0$. Bei Überschreiten von \hat{I}_C springt der Arbeitspunkt in einigen 10^{-12} s nach A.

sen, dass diese Effekte nur beobachtbar sind, wenn man den Josephson-Kontakt sorgfältig gegen äußere Magnetfelder abschirmt. Selbst das Erdmagnetfeld stört. Wie wir unten noch sehen werden, liefert aber gerade diese Magnetfeld-Abhängigkeit einen weiteren interessanten und nützlichen Aspekt. – Erhöht man den Strom bis zu einem durch die Eigenschaften eines speziellen Kontaktes bestimmten kritischen Wert \hat{I}_C , so verschwindet der Cooperpaar-Gleichstrom I_C und es stellt sich ein neuer Arbeitspunkt A auf der U - I -Kennlinie ein, der unter anderem durch die Spannung U_0 und den vorgeschalteten Widerstand R bestimmt ist. Dieser Übergang vollzieht sich in der unvorstellbar kurzen Zeit von einigen 10^{-12} s. – Jeder, der sich jetzt denkt, dass man dies für den Bau ultraschneller Rechner ausnützen könnte, hat recht. Nur sind die Realisierung und die Integration in andere Rechnerstrukturen nicht so einfach. –

Deutung

Um die oben kurz beschriebenen Effekte anschaulich zu verstehen, nehmen wir der Einfachheit halber einen symmetrischen Josephson-Kontakt, d.h. völlig gleiche Supraleiter auf beiden Seiten der Isolierschicht, an. Der wesentliche Gesichtspunkt ist dann die Tatsache, dass sich die Cooper-Paare im Grundzustand wie Bosonen verhalten. Diese

pflegen nämlich nicht nur alle das gleiche Energieniveau einzunehmen, sondern sie stimmen in allen Zustandsgrößen ihrer Wellenfunktionen überein (vgl. Abschn. 6.1.2.2). Insbesondere zeigen sie wie die Photonen eines Lasers (vgl. Abschn. 6.1.3.1) „Phasenkohärenz“. Das bedeutet aber, dass alle Cooper-Paare auf jeder Seite der Isolierschicht sich mit je einer einzigen makroskopischen Wellenfunktion beschreiben lassen, die das Verhalten des ganzen jeweiligen Kollektivs erfasst.

Wenn dieser Sachverhalt klar ist, fällt eine anschauliche Deutung nicht schwer. Wir können jetzt nämlich den Josephson-Kontakt als eine Anordnung aus zwei sehr lose miteinander gekoppelten gleichen schwingungsfähigen Systemen auffassen, die beide im ungekoppelten Zustand die gleiche Energie W_0 und damit die gleiche de Broglie-Frequenz $f_0 = W_0/h$ haben. Nennt man die Nullphasenwinkel auf der linken beziehungsweise rechten Seite φ_{01} und φ_{02} , so gilt für die Wellenfunktionen $\psi_1 = \hat{\psi}_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_{01})$ und $\psi_2 = \hat{\psi}_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_{02})$. Das Quadrat der Amplitude $\hat{\psi}_0^2$ ist gemäß Abschn. 6.1.2.3 ein Maß für die Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Teilchen. Deshalb dürfen wir hier, da es sich um makroskopische Wellenfunktionen handelt, $\hat{\psi}_0^2$ sogar gleich der Teilchendichte n_{C0} im ungekoppelten Zustand annehmen. Wie in Abschn. 5.1.8 gezeigt wird, lässt sich die Schwingung je eines der Einzelsysteme nach der Kopplung beschreiben durch die Gleichung

$$\begin{aligned} \psi &= 2\hat{\psi}_0 \cos \left[\frac{(\omega_1 - \omega_{II})t + \varphi_{01} - \varphi_{02}}{2} \right] \sin \left[\frac{(\omega_1 + \omega_{II})t + \varphi_{01} + \varphi_{02}}{2} \right] \\ &= \hat{\psi} \sin \left[\frac{(\omega_1 - \omega_{II})t + \varphi_{01} + \varphi_{02}}{2} \right] \end{aligned}$$

Hierbei sind gemäß Abschn. 5.1.9 ω_1 und ω_{II} die durch die Kopplung entstehenden Fundamentalkreisfrequenzen. Da wir uns für den Cooperpaar-Strom, d.h. die zeitliche Änderung der Teilchendichte interessieren, benötigen wir den wegen der sehr schwachen Kopplung sich nur langsam ändernden Amplitudenfaktor $\hat{\psi}$. Quadriert man diesen, so erhält man die Dichte der Cooperpaare $n_C = \hat{\psi}^2$:

$$\begin{aligned} n_C &= 4\hat{\psi}_0^2 \cos^2 \left[\frac{(\omega_1 - \omega_{II})t + \varphi_{01} - \varphi_{02}}{2} \right] \\ &= 2\hat{\psi}_0^2 + 2\hat{\psi}_0^2 \cos [(\omega_1 - \omega_{II})t + \varphi_{01} - \varphi_{02}] \end{aligned} \quad (7.15)$$

Ein Maß für den Cooperpaar-Strom I_C von einer Seite zur anderen erhalten wir durch Differenzieren:

$$\frac{dn_C}{dt} = -2\hat{\psi}_0^2 (\omega_1 - \omega_{II}) \sin [(\omega_1 - \omega_{II})t + \varphi_{01} - \varphi_{02}]$$

und wegen $I_C \sim dn_C/dt$

$$I_C = \hat{I}_C \sin [(\omega_1 - \omega_{II})t + \varphi_{01} - \varphi_{02}]$$

Wie man sieht, „schwebt“ der Cooperpaar-Strom langsam – wegen der schwachen Kopplung ist $\omega_1 \approx \omega_{II}$ – von einer Seite zur anderen und zurück. Dies entspricht genau dem

¹⁾ $2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$

Verhalten der Energie bei zwei gleichen gekoppelten Pendeln oder Schwingkreisen (s. Abschn. 5.1.9).

Nun kann man bei den beiden Letzteren einen Selbsterregungsmechanismus einbauen, der die Phase $\Delta\varphi = (\omega_1 - \omega_2) t + \varphi_{01} - \varphi_{02}$ konstant hält. Dies ist dort etwas aufwendig, bei einem Josephson-Kontakt jedoch sehr einfach. Denn hier sind beide Seiten über eine Spannungsquelle durch einen Leiter, wie in der Messschaltung, verbunden, der die durch die Isolierschicht z.B. von links nach rechts strömende Ladung links von außen wieder zuführt. Dann bleibt dn_C/dt und damit I_C konstant.

Wie weit I_C vom Maximalwert \hat{I}_C abweicht, hängt jetzt nur noch von der jeweiligen Phasendifferenz der beiden Wellenfunktionen ab. Es gilt

$$I_C = \hat{I}_C \sin \Delta\varphi$$

und für den Gesamtstrom

$$I = I_E + \hat{I}_C \sin \Delta\varphi$$

Schwingen beide Wellenfunktionen links und rechts in Phase, ist $\Delta\varphi = 0$, und es fließt kein Cooperpaar-Strom. Entsprechendes gilt für gegenphasiges Schwingen, d.h. bei $\Delta\varphi = \pi$. Dieses Verhalten ist völlig analog demjenigen klassischer Systeme, z. B. zweier gekoppelter Pendel, bezüglich des Energieaustausches. Allerdings darf man die Analogie nicht zu weit treiben: Beim Josephson-Kontakt werden auch Ladungsträger und nicht nur Energie ausgetauscht!

Wechselstrom-Effekte

Wir betrachten jetzt das Verhalten des Cooperpaar-Stromes I_C bei Anliegen einer äußeren Spannung U . Wie sofort ersichtlich, ist nun die Energie der einen Seite gegenüber der anderen um $\Delta W = 2e_0 U$ erhöht. Dies ergibt aber eine Differenz der de Broglie-Frequenzen um $\Delta f = 2e_0 U/h$ oder $\Delta\omega = 2e_0 U/\hbar$. Deshalb entsteht eine sehr hochfrequente Schwebung mit dieser Schwebungsfrequenz. Die Phase ist nicht mehr konstant, sondern ändert sich mit der Zeit:

Mit $\Delta\varphi = \Delta\varphi_0 + \Delta\omega t = \Delta\varphi_0 + (2e_0 U/\hbar) t$ gilt:

$$I_C = \hat{I}_C \sin [\Delta\varphi_0 + (2e_0 U/\hbar) t]$$

Dies bedeutet zweierlei: Erstens ist I_C im zeitlichen Mittel gleich Null. Es gibt keinen Cooperpaar-Gleichstrom mehr¹⁾. Und zweitens entsteht ein sehr hochfrequenter

Wechselstrom mit der Frequenz $f = \frac{2e_0}{h} U = 483\,579,9 \text{ GHz}$ bei der Spannung 1 V.

Wie man sieht, ist über die beiden Naturkonstanten e_0 und \hbar die Spannungseinheit Volt direkt mit der Frequenz verknüpft. Da Letztere aber heutzutage durch Atomuhren außerordentlich genau darstellbar ist, lässt sich auch das Volt äußerst präzise festlegen.

¹⁾ Gelegenheit zum Staunen: Bei $U = 0$ kann ein Gleichstrom fließen, bei $U \neq 0$ verschwindet er.

Es kommt aber noch schöner: Überlagert man einer außen anliegenden Spannung nämlich eine Wechselspannung mit $\omega = (2e_0 U_0 / \hbar)$, so fließt wieder ein Cooperpaar-Gleichstrom! Und das kommt so: Aus der letzten Gleichung der vorigen Seite folgt: $\Delta\dot{\varphi} = 2e_0 U / \hbar$. Ist U zeitabhängig, gilt daher allgemein: $\Delta\varphi = \Delta\varphi_0 + (2e_0 / \hbar) \int_0^t U(t) dt$. Wir nehmen jetzt an, es sei $U(t) = U_0 + \hat{u}_s \cos \omega t$, wobei $\hat{u}_s \ll U_0$ sein soll. Dann wird

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_0 + \frac{2e_0}{\hbar} U_0 t + \frac{2e_0 \hat{u}_s}{\hbar \omega} \sin \omega t$$

Benutzt man die Näherung $\sin(x + \Delta x) \approx \sin x + \Delta x \cos x$, so erhält man

$$I_C = \hat{I}_C \left[\sin \left(\Delta\varphi_0 + \frac{2e_0 U_0}{\hbar} t \right) + \frac{2e_0 \hat{u}_s}{\hbar \omega} \sin \omega t \cdot \cos \left(\Delta\varphi_0 + \frac{2e_0 U_0}{\hbar} t \right) \right]$$

Der erste Ausdruck in der eckigen Klammer ist im zeitlichen Mittel wieder gleich Null, der zweite ergibt bei $\omega = 2e_0 U_0 / \hbar$

$$\frac{2e_0 \hat{u}_s}{\hbar \omega} \frac{1}{2} \{ \sin(2\omega t + \Delta\varphi_0) + \sin \Delta\varphi_0 \}^{1)}$$

Hierbei ist wieder der erste Klammersausdruck im zeitlichen Mittel Null, der zweite ergibt einen Cooperpaar-Gleichstrom

$$I_C = \hat{I}_C \frac{\hat{u}_s}{2U_0} \sin \Delta\varphi_0$$

Einspeisen einer Wechselspannung mit der Frequenz $f = 2e_0 U_0 / \hbar$ liefert einen Cooperpaar-Gleichstrom.

Zu guter Letzt noch ein weiterer, technisch sehr wichtiger Effekt:

Speist man in einen Josephson-Kontakt eine elektromagnetische Welle mit der Frequenz f ein (Bild 7.68), so entstehen wegen der nichtlinearen Kennlinie auch Harmonische, d.h. Wellen mit Frequenzen, die ganzzahlige Vielfache von f sind. Dadurch führt man dem Josephson-Kontakt Photonen mit den Energien $m h f$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) zu.

Diese Energiedifferenzen ergeben die außen messbare Spannung $U = hf/2e_0$ und ganzzahlige Vielfache davon, und das bei irgendeinem Strom I_C zwischen $+\hat{I}_C$ und $-\hat{I}_C$, auch bei $I_C = 0$ (Bild 7.69). Dies ist die praktikabelste Möglichkeit, um eine sehr genaue Gleichspannung direkt aus einer sehr genauen Frequenz darstellen zu können (siehe hierzu auch Bild 7.70).

Im Jahre 1990 vereinbarte man einen international verbindlichen Wert für die sog. Josephson-Konstante

$$K_{J-90} = 483597,9 \text{ GHz/V.}$$

$$\text{Mit dieser ergibt sich } U = \frac{m}{K_{J-90}} f.$$

¹⁾ $\sin \alpha \cos \beta = 1/2 [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$

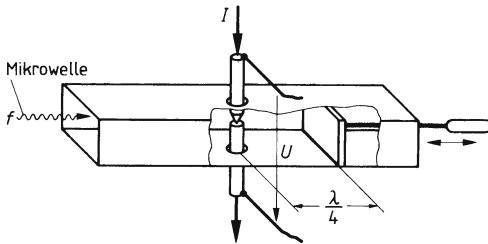


Bild 7.68 Josephson-Punktkontakt im Hohlleiter

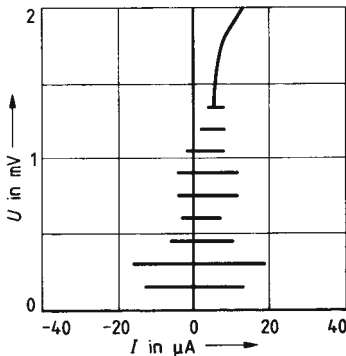


Bild 7.69 Nullstromstufen eines Josephson-Kontaktes

Magnetfeldabhängigkeit der Josephson-Effekte

Wie bereits eingangs gesagt, sind die Josephson-Effekte stark abhängig von bereits sehr schwachen Magnetfeldern. Dies wollen wir im Folgenden verständlich machen.

Beeinflussung der Phase der Wellenfunktionen elektrisch geladener Teilchen durch ein Magnetfeld. In Bild 7.71 trifft ein Strom geladener Teilchen mit je der Ladung Q auf ein Magnetfeld mit der magnetischen Induktion \vec{B} . Wir nehmen an, sie gehörten zu einer einzigen makroskopischen Wellenfunktion, wie es bei Cooper-Paaren der Fall ist. Dann sind auch alle Elementarwellen kohärent. Wir betrachten jetzt die Elementarwellen 1 und 2 und behandeln sie zunächst klassisch als Teilchenstrom (gezeichnet ist der Fall für $Q < 0$). Wie bereits in Abschn. 3.3.3.2 gezeigt, erfahren die Teilchen im Magnetfeld die Lorentz-



Bild 7.70 Um eine für praktische Vergleichsmessungen brauchbare Spannung darstellen zu können, gelang es der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt, Streifenleitungen mit sehr vielen hintereinander geschalteten Josephson-Kontakten auf einem einzigen Chip unterzubringen. Das Bild zeigt 4 Streifenleiter, in die von links über eine sog. Flossenleitung eine elektromagnetische Welle eingespeist wird. Die Gleichspannung zwischen 0,1 V bis 1,3 V wird über den beiden Elektroden abgegriffen. Der Chip ist 22 mm lang. Er enthält 1440 hintereinander geschaltete Josephson-Kontakte.

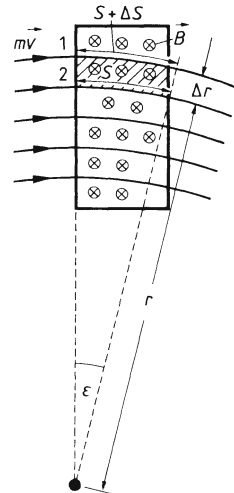


Bild 7.71 Zur Herleitung der Phasenverschiebung von Materiewellen durch ein Magnetfeld. Die Bahnkrümmung sowie der Winkel sind aus Gründen der Anschaulichkeit stark übertrieben gezeichnet. In Wirklichkeit liegt ϵ bei wenigen 10^{-4}° , sodass man beide Bahnen praktisch als Geraden betrachten kann.

kraft $\vec{F}_L = Q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$ oder, da $\vec{v} \perp \vec{B}$, $F_L = QvB$. Diese muss gleich der Zentripetalkraft $m\omega^2 r$ sein¹⁾. Also gilt $m\omega^2 r = Q\omega r B$.

Wie man sieht, eilt am Ende des Magnetfeldes Welle 1 der Welle 2 um Δs vor. Die Wellen haben also den Gangunterschied $d = \Delta s$. Diesen und die daraus folgende Phasenverschiebung $\Delta\varphi = 2\pi\Delta s/\lambda$ wollen wir jetzt berechnen. λ ist hierbei die Broglie-Wellenlänge h/mv (vgl. Abschn. 5.3). Mit dem Winkel ε gilt $s = \varepsilon r$ und $s + \Delta s = \varepsilon(r + \Delta r)$, also $\Delta s = \varepsilon\Delta r$. Wegen $\varepsilon = \omega t$ wird $\Delta s = \omega t \Delta r$ und mit $\omega = QB/m$ (s. o.) $\Delta s = QBt \Delta r/m$.

Hieraus folgt die Phasenverschiebung

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta s}{\lambda} = 2\pi \frac{mv}{h} \Delta s = 2\pi \frac{mv t Q B \Delta r}{hm}$$

und mit $vt = s$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{h} Q B s \Delta r$$

Nun ist aber $Bs\Delta r$ der von beiden Teilströmen oder Elementarwellen umfasste magnetische Fluss Φ . Also ergibt sich das interessante Ergebnis:

Die Phasendifferenz zweier kohärenter Materiewellen, die zwei Teilströmen elektrisch geladener Teilchen mit je der Ladung Q zugeordnet sind, und die auf verschiedenen Seiten eine von einem magnetischen Fluss Φ durchsetzte Fläche passiert haben, beträgt

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{Q}{h} \Phi = \frac{Q}{\hbar} \Phi \quad (7.16)$$

Sie lässt sich, wie bei klassischen Wellen, nur durch Interferenzerscheinungen beobachten. Hierbei hat sich der Betrag des Impulses mv nicht geändert. Das alles ist erstaunlicherweise, wie hier nicht gezeigt werden soll, auch dann der Fall, wenn die Bahnen der Teilchen den Bereich des Flusses überhaupt nicht berühren und gilt außerdem für eine beliebige Form der Wege. Dies ist analog der Tatsache, dass bei einer zeitlichen Änderung von Φ die Induktionsspannung in beliebig geformten Leiterschleifen stets denselben Wert $U_{\text{ind}} = d\Phi/dt$ hat.²⁾

Magnetfeldabhängigkeit des maximalen Cooperpaar-Stromes \hat{I}_C . Bild 7.72 zeigt eine vergrößerte Josephson-Barriere, durch die von der Seitenfläche her ein Magnetfeld hindurchdringt. Dieses durchsetzt die Fläche mit der Höhe a und der Breite, die sich aus der Dicke dieser Isolierschicht d und den beiden Eindringtiefen $2e$ in den angrenzenden Supraleitern zusammensetzt. ($2e \approx 100$ nm, $d \approx 2$ nm).

Wir nehmen willkürlich an, die Cooper-Paare würden die Isolierschicht von links nach rechts durchtunneln. Da die zugehörige makroskopische Materiewelle am ganzen linken Rand phasenkohärent schwingt, bewirkt das Magnetfeld, wie oben gezeigt, Phasenverschiebungen zwischen oben und unten. Wir vergleichen jetzt noch einmal Bild 5.88 zur Beugung am Spalt. Auch in Bild 7.72 teilen wir die Wellenfront willkürlich in N Elementarwellen auf und argumentieren analog zur Betrachtung am Spalt.

¹⁾ ω ist in dieser Herleitung die Winkelgeschwindigkeit.

²⁾ Vgl. [47]

Insbesondere berechnen wir die Phasenverschiebung zwischen zwei benachbarten Elementarwellen. Diese schließen zusammen mit dem linken und rechten Rand am Ende der beiden Eindringtiefen den N -ten Teil des gesamten Flusses ein. Demnach ergibt sich mit Gl. (7.16)

$$\Delta\varphi = \frac{Q}{\hbar} \cdot \frac{\Phi}{N}$$

und, da es sich um Cooperpaare mit $Q = 2e_0$ handelt,

$$\Delta\varphi = \frac{2e_0}{\hbar} \cdot \frac{\Phi}{N}$$

Wir erinnern uns jetzt daran, dass $\hbar/2e_0 = \Phi_0$ das „magnetische Flussquant“ ist. Setzen wir dieses ein, so erhalten wir

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0 N}$$

Aus Gl. (5.104) entnehmen wir mit $2\varphi = N\Delta\varphi$,

also $\varphi = \pi \frac{\Phi}{\Phi_0}$ für die resultierende Amplitude

$\hat{\psi}_T$, die jetzt statt $\hat{\psi}_0$ mit dem rechten System koppelt,

$$\hat{\psi}_T = \hat{\psi}_0 \frac{\sin\varphi}{\varphi} = \hat{\psi}_0 \frac{\sin\left(\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right)}{\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}}$$

Daraus folgt mit $\hat{\psi}_T \hat{\psi}_0$ anstelle von $\hat{\psi}_0^2$ in Gl. (7.15)¹⁾:

Der maximale Cooperpaar-Strom bei dem magnetischen Fluss Φ beträgt

$$I_C = \hat{I}_C(0) \left| \frac{\sin\left(\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right)}{\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}} \right| \quad (7.17)$$

($\hat{I}_C(0)$ ist der Höchststrom bei $\Phi = 0$)

Dies ist in Bild 7.73 dargestellt.

¹⁾ In diesem Fall gilt Gl. (5.44) aus Abschn. 5.1.8.1 für den Fall ungleicher Amplituden

$$\hat{\psi}^2 = \hat{\psi}_0^2 + \hat{\psi}_T^2 + 2\hat{\psi}_0\hat{\psi}_T \cos[(\omega_I - \omega_{II})t + \varphi_{01} - \varphi_{02}]$$

damit wird

$$dn_C/dt = d\hat{\psi}^2/dt = -2\hat{\psi}_T\hat{\psi}_0(\omega_I - \omega_{II}) \sin[(\omega_I - \omega_{II})t + \varphi_{01} - \varphi_{02}]$$

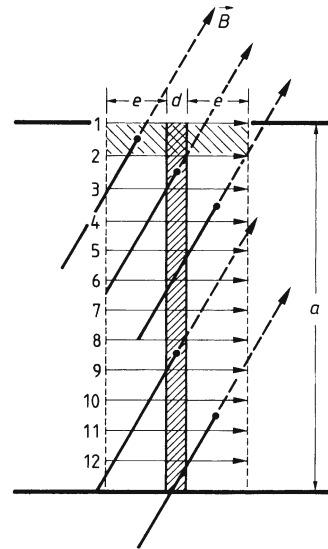


Bild 7.72 Schema eines Josephson-Kontaktes, den ein Magnetfeld senkrecht durchsetzt. d = Dicke der Isolierschicht (einige 10^{-9} nm), e = Eindringtiefe des Magnetfeldes in die beiden Supraleiter (ca. 50 nm).

Die von links nach rechts tunnelnde Materiewelle ist willkürlich in $N = 12$ Elementarwellen aufgeteilt.

Die grob schraffierte Fläche zwischen den Elementarwellen 1 und 2 wird vom Teilfluss Φ/N durchsetzt. Nach Gleichung (7.16) ist $\Delta\varphi_{12} = Q\Phi/(\hbar N)$

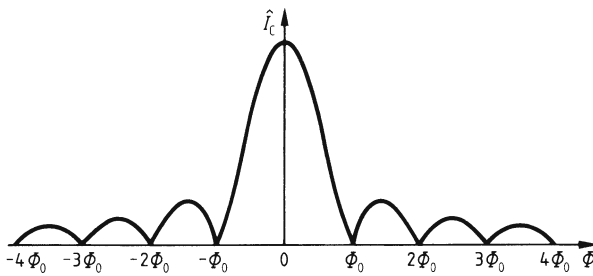


Bild 7.73 Maximaler Cooperpaar-Strom \hat{I}_C als Funktion des magnetischen Flusses Φ

Nun ist das Flussquant außerordentlich klein: $\Phi_0 = 2,07 \cdot 10^{-15}$ Vs. Man sieht also, dass bereits sehr kleine Magnetfeldänderungen den maximal möglichen „kritischen“ Cooperpaar-Strom beeinflussen.

An dieser Stelle sei noch einmal darauf aufmerksam gemacht, dass die oben beschriebenen Interferenzeffekte nicht bei dem Tunnelstrom aus Einzelelektronen auftreten, da diese ja nicht einer kollektiven makroskopischen Wellenfunktion zugeordnet sind.

Für den Einzelelektronenstrom stellt ein Josephson-Kontakt bei der Temperatur $T \leq T_S$ einen nichtlinearen Widerstand dar, an dem, wie ganz am Anfang gezeigt (Bild 7.67), bei Überschreiten des kritischen Cooperpaar-Stromes eine Spannung abfällt. Eine technische Anwendung zeigt Bild 7.74.

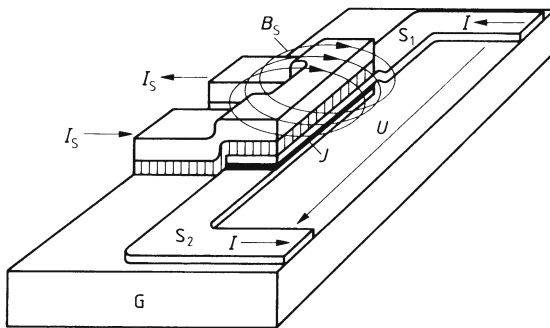


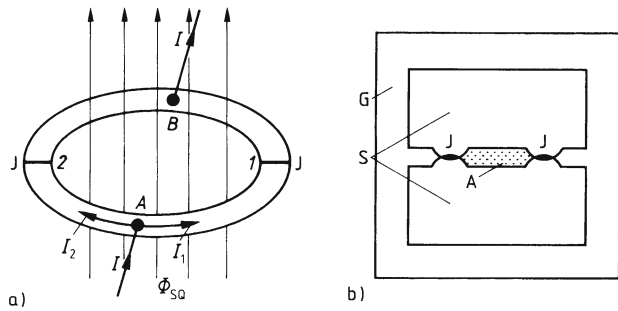
Bild 7.74 Ultraschneller Schalter. Von Supraleiter S_1 nach Supraleiter S_2 fließt durch den Josephson-Kontakt J der Strom $I = \hat{I}_C(0)$. U ist gleich Null. Oberhalb der senkrecht schraffierten Isolierschicht befindet sich eine Leitung für den Steuerstrom I_S , mit dem man das den Josephson-Kontakt J durchsetzende Magnetfeld B_S erzeugen kann. Schaltet man I_S ein, sinkt dadurch \hat{I}_C , und der Arbeitspunkt springt auf die I_E -Kennlinie (vgl. Bild 7.67). Es entsteht die Spannung $U > 0$. Die Schaltzeit beträgt wenige 10^{-12} s.

Supraleitender Quanten-Interferometrischer Detektor, SQUID.¹⁾ Für einen unglaublich empfindlichen Magnetfeld-Detektor, einen sog. SQUID, kombiniert man zwei Josephson-Kontakte an zwei gegenüberliegenden Stellen eines geschlossenen supraleitenden Ringes (Bild 7.75). Dieser werde von einem magnetischen Fluss Φ_{SQ} durchsetzt. Dann haben zwei Cooperpaar-Ströme, die je über die Josephson-Kontakte 1 und 2 von A nach B fließen, zusätzlich zu einer Phasenverschiebung in den Josephson-Kontakten nach Gl. (7.16)

gegeneinander die zusätzliche Phasenverschiebung $\Delta\varphi = \frac{2e_0}{\hbar} \Phi_{SQ} = 2\pi \frac{\Phi_{SQ}}{\Phi_0}$ erfahren.

¹⁾ SQUID kommt eigentlich aus dem Englischen und bedeutet Superconducting **Q**uantum **I**nterferometer **D**evice.

Bild 7.75 a) Schema eines SQUID mit zwei Josephson-Kontakten J.
 b) Ausführung eines SQUID. Auf einem Glassubstrat G sind zwei supraleitende Schichten mit Engstellen als Josephson-Kontakte J aufgedampft. A ist die vom magnetischen Fluss durchsetzte Messfläche. Eine Seitenlinie der Messfläche ist etwa 0,4 mm lang.



Um ein besonders leicht zu diskutierendes Ergebnis zu erhalten, teilen wir diese je zur Hälfte auf die beiden Teilströme auf und schreiben mit einer durch die Josephson-Kontakte bewirkten Phasenverschiebung $\Delta\varphi_J$,

$$I_{C1} = \hat{I}_C(0) \sin \left(\Delta\varphi_J + \pi \frac{\Phi_{SQ}}{\Phi_0} \right)$$

$$\text{und } I_{C2} = \hat{I}_C(0) \sin \left(\Delta\varphi_J - \pi \frac{\Phi_{SQ}}{\Phi_0} \right)$$

Addition¹⁾ ergibt

$$I_C = 2\hat{I}_C(0) \sin \Delta\varphi_J \cos \pi \frac{\Phi_{SQ}}{\Phi_0}$$

Da die Teilflüsse durch die Josephson-Kontakte wegen ihrer gegenüber der SQUID-Fläche winzigen Flächen nur verschwindend klein gegenüber dem SQUID-Fluss sind, ändern sich diese bei einer äußeren Flussänderung kaum, sodass man $\Delta\varphi_J$ in guter Näherung als konstant ansehen kann.

Für den Gesamtstrom gilt

$$I = 2I_E + 2\hat{I}_C(0) \sin \Delta\varphi_J \cos \pi \frac{\Phi_{SQ}}{\Phi_0}$$

Bild 7.76 zeigt die Kennlinie. Für die praktische Messung linearisiert man sie auf folgende Weise: man speist einen sehr kleinen konstanten Wechselfluss zusätzlich zum Fluss, der gemessen werden soll, ein. Dann kompensiert man mit einem Gleichfluss den zu messenden Fluss so, dass der SQUID immer im gleichen Arbeitspunkt bleibt. – Man merkt das an

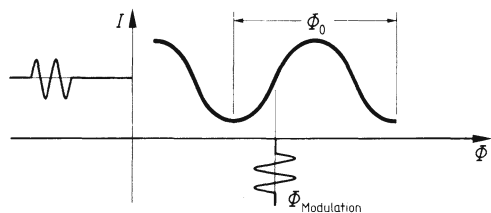


Bild 7.76 Kennlinie eines SQUID

¹⁾ $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$

der konstanten Amplitude des Wechselstromes. – Aus dem in einer bekannten Spule mit definiertem Strom erzeugten Kompensationsfluss gewinnt man dann die Messgröße.

Der Durchmesser eines SQUID beträgt nur etwa 0,1 mm. Deswegen erhöht man die Empfindlichkeit noch durch einen sog. „Flusstransformator“. Dieser besteht einfach aus zwei supraleitenden Spulen, die in Reihe geschaltet sind (Bild 7.77).

Der zu messende Fluss Φ_1 wirft in Spule 1 mit größerem Durchmesser einen Strom an, der in Spule 2 den Fluss Φ_2 erzeugt, welcher den SQUID durchsetzt. Mit solchen Messanordnungen gelingt es, magnetische Induktionen in der Größenordnung 10^{-13} T zu messen!

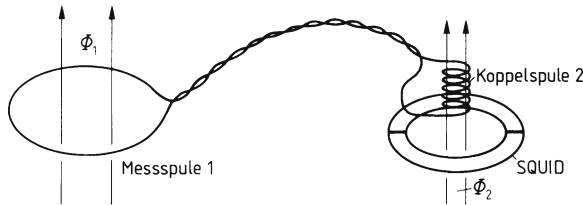


Bild 7.77 SQUID mit Flusstransformator

Anwendungen. Wie bereits in der Unterschrift zu Bild 7.70 beschrieben, benutzt man einen der Wechselstrom-Josephson-Effekte zur Darstellung außerordentlich genauer Gleichspannungen, bei denen die relative Messunsicherheit nur etwa 10^{-8} beträgt. Mit diesen lassen sich die technisch üblichen Spannungsnormale sehr genau kalibrieren.

Die extrem hohe Messempfindlichkeit der SQUID-s für Magnetfelder (etwa 10^{-13} T) gestattet es, mit ihnen z.B. die von Hirnströmen oder Strömen im Herzen erzeugten Magnetfelder zu messen. In geeigneten Messanordnungen lassen sich damit ohne irgendeine Beeinflussung des Organismus Krankheiten diagnostizieren. In der Technik dienen SQUID-s zur Auffindung von „Fehlstellen“, z.B. Lunkern oder Rissen in metallischen Werkstücken. Da die magnetische Induktion des Erdmagnetfeldes etwa $4 \cdot 10^{-5}$ T, diejenige des 50 Hz-Wechselfeldes in freier Landschaft etwa $2 \cdot 10^{-9}$ T beträgt, ist klar, dass die beschriebenen Messungen nur unter extremer magnetischer Abschirmung oder mit „Brückenschaltungen“, sog. Gradiometeranordnungen, mit 2 SQUID-s möglich sind, bei denen der zweite SQUID zur gegenphasigen Kompensation der Störfelder dient.

Aufgabe

Die Messfläche eines SQUID beträgt $0,4 \text{ mm} \cdot 0,1 \text{ mm} = 4 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2$. Mit Hilfe der in Bild 7.76 gezeigten Wechselfluss-Methode gelingt es, Flussänderungen von etwa $10^{-4} \Phi_0$ zu messen. ($\Phi_0 = 1$ Flussquant). Erhöht man die Messempfindlichkeit durch einen Flusstrans-

formator noch um den Faktor 100, so lassen sich extrem kleine Änderungen der magnetischen Induktion erfassen, wie sie beispielsweise durch Gehirnstromänderungen – z.B. beim Lösen dieser Aufgabe – entstehen.

Wie groß sind diese?

7.4.6 Quanten-Hall-Effekt

Im Jahre 1980 entdeckte Klaus von Klitzing¹⁾ einen unerwarteten Effekt, der seitdem als Quanten-Hall-Effekt (abgekürzt: QHE) bekannt ist. Er soll im Folgenden beschrieben werden.

Der genannte Wissenschaftler interessierte sich für den Einfluss starker Magnetfelder auf die elektrische Leitung in sehr dünnen Schichten (Dicke ca. 10^{-8} m $\underline{\Delta}$ etwa 40 Atomdurchmesser), die man in guter Näherung als „zweidimensionale Leiter“ annehmen kann. Diese kann man z.B. in einer sog. Heterostruktur realisieren, wie sie in Bild 7.78a schematisch

¹⁾ Klaus von Klitzing erhielt für diese Entdeckung im Jahre 1985 den Nobelpreis.

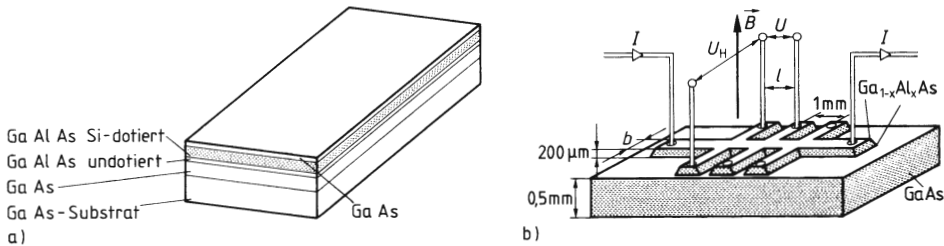


Bild 7.78 a) Schema einer GaAs-GaAlAs-Heterostruktur

b) Messanordnung, die aus einer Heterostruktur – wie sie in a) gezeigt ist – herausgeätzt wurde. Das zweidimensionale Elektronengas bildet sich an der Grenzfläche zwischen GaAs und GaAlAs.

dargestellt ist. Wie hier nicht näher gezeigt werden soll, findet die Elektronenleitung in der sehr dünnen Grenzfläche zwischen dem GaAs und dem undotierten GaAlAs statt. Bild 7.78b zeigt eine Messanordnung mit Anschlüssen zum Einprägen eines Stromes I , zur Messung einer Spannung U in Stromrichtung sowie einer Spannung U_H quer zur Stromrichtung. Die letzteren Anschlüsse sind erforderlich, weil bei Anwesenheit eines Magnetfeldes senkrecht zum Leiter eine Hall-Spannung zu erwarten ist (s. Abschn. 3.3.2.1). Die Elektronen-Konzentration ist in einer gegebenen Heterostruktur konstant.

Will man die Elektronen-Konzentration in einem „zweidimensionalen Leiter“ von außen steuern, so benutzt man einen Feldeffekt-Transistor mit isolierter Steuerelektrode, einen sog. MOS-FET (vgl. Abschn. 7.4.3.3). Wie in Bild 7.79a schematisch dargestellt ist, werden zusätzlich zu den Anschlüssen an Source und Drain noch Anschlüsse für die Messung einer Spannung U am N-Kanal in Stromrichtung sowie einer Spannung U_H quer zur Stromrichtung angebracht. Bild 7.79b zeigt diese Anordnung an der Oberfläche eines P-dotierten Siliciumplättchens (Man beachte, dass der MOS-FET mit seinen Anschlüssen nur 0,4 mm lang ist!)

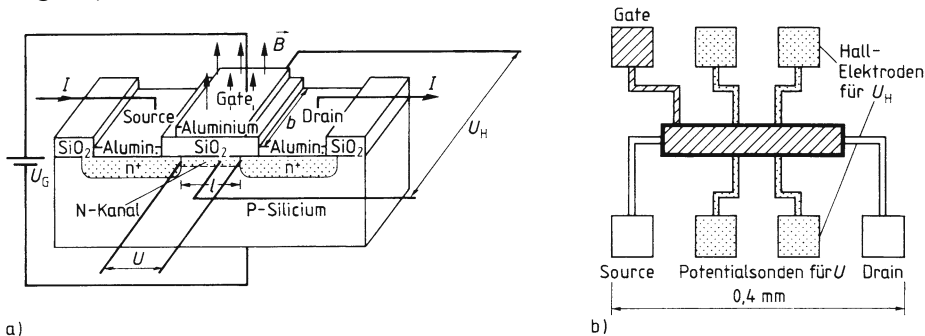


Bild 7.79 a) Schema eines für Quanten-Hall-Messungen um Anschlüsse zur Messung des Spannungsabfalls U am N-Kanal und der quer dazu entstehenden Hall-Spannung U_H ergänzten MOS-FET

b) Realisierung auf der Oberfläche eines Kristalls aus P-Silicium

Durch Verändern der positiven Spannung U_G an der Steuerelektrode, dem Gate, kann man auf der Unterseite der Siliciumoxidschicht im N-Kanal durch Influenz eine nur 5 bis 10 nm dicke Schicht aus freien Elektronen erzeugen, deren Konzentration direkt proportional zu U_G ist. Eine solche dünne Schicht kann man ebenfalls mit sehr guter Näherung als zweidimensionalen Leiter betrachten.

Experimentelle Ergebnisse

Alle Versuche finden bei einer sehr tiefen Temperatur von wenigen mK bis zu einigen K statt. Wie in Bild 7.78a dargestellt, wird ein Strom I durch den „zweidimensionalen Leiter“ eingeprägt. Senkrecht dazu durchsetzt diesen ein sehr starkes Magnetfeld, dessen magnetische Induktion bis etwa 20 T gesteigert werden kann.

Das Ergebnis ist äußerst überraschend! Zwar gibt es, wie erwartet, eine Hall-Spannung U_H senkrecht zu I und B , diese wächst bei konstanter Elektronen-Konzentration jedoch nicht wie beim klassischen Hall-Effekt linear mit wachsendem B an, sondern, wie in Bild 7.80 oben dargestellt, in charakteristischen Stufen! Gleichzeitig wird im Bereich dieser Stufen der Spannungsabfall U am Leiter gleich Null! (Bild 7.80 unten).

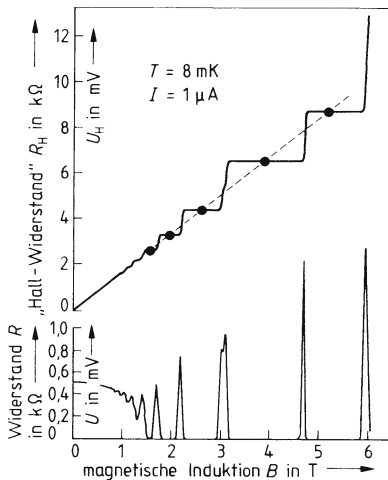


Bild 7.80 Abhängigkeit der Hall-Spannung U_H und des „Hall-Widerstandes“ R_H (oben) sowie des Spannungsabfalls U in Stromrichtung und des Längswiderstandes $R = U/I$ (unten) von der magnetischen Induktion B . Eingeprägter Längsstrom I , Elektronenkonzentration und Temperatur T sind konstant. Die Messung erfolgte an einer GaAs-GaAlAs-Heterostruktur gemäß Bild 7.78a und b.

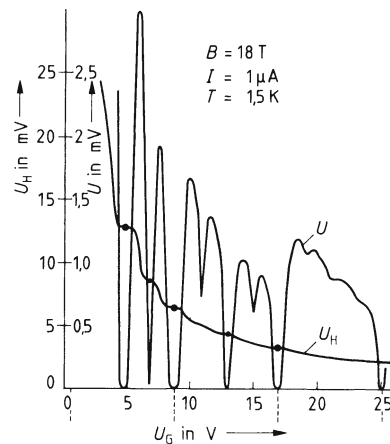


Bild 7.81 Abhängigkeit der Hall-Spannung U_H und des Spannungsabfalles U in Stromrichtung von der Gate-Spannung U_G bei einem MOS-FET, Magnetische Induktion B , eingeprägter Längsstrom I und Temperatur T sind konstant.

Ähnlich verblüffend ist das Ergebnis, wenn man in einer Messanordnung gemäß Bild 7.79a einen konstanten Strom I durch Source und Drain einprägt, das Magnetfeld jedoch konstant hält, und die Elektronen-Konzentration durch Verändern der Gatespannung U_G erhöht. Hier ergibt sich (s. Bild 7.81), dass U_H stufenweise abnimmt und U in den Stufenbereichen gleich Null wird.

Man kann nun eine Größe definieren, die in der normalen Elektrotechnik nicht vorkommt, nämlich das Verhältnis der quer zum Leiterstrom I entstehenden Hall-Spannung U_H zu diesem Leiterstrom. Diese Größe ist zwar dimensionsmäßig ein elektrischer Widerstand, entspricht aber nicht der üblichen Widerstandsdefinition als Quotient aus längs des Stromes anstehender Spannung und zugehörigem Strom. Man nennt diese ungewöhnliche Größe trotzdem „Widerstand“. Es gilt die

Definition:

$$\text{„Hall-Widerstand“} = \frac{\text{Querspannung}}{\text{Längsstrom}} \quad R_H = \frac{U_H}{I}$$

Bestimmt man dessen Wert für die „Stufenspannungen“, so bekommt man ein bemerkenswertes Ergebnis:

R_H nimmt nur ganzzahlige oder gebrochen rationale Bruchteile des Wertes $R_K = 25812,807 \, \Omega$ an. R_K heißt von Klitzing-Konstante. Sie ist mit einer relativen Unsicherheit von etwa $2 \cdot 10^{-7}$ bekannt.¹⁾

$$\text{Es gilt: } R_H = \frac{25812,807 \, \Omega}{z}$$

mit $z = 1, 2, 3, \dots$ und $z = 1/3, 2/3, 2/5, 3/5, \dots$
 fundamentaler gebrochener
 quantisierter „Hall-Widerstand“

Obendrein stellt sich heraus, dass sich R_K durch die Naturkonstanten Plancksches Wirkungsquantum h und Elementarladung e_0 darstellen lässt. Es gilt mit guter Näherung

$$R_K = \frac{h}{e_0^2}$$

Erstaunlicher geht es kaum! Die Einheit Ohm lässt sich unabhängig von Materialeigenschaften durch zwei Naturkonstanten h und e_0 darstellen! Kein Wunder, dass die Fachleute für elektrische Messtechnik begeistert sind. Einzelheiten zur Messtechnik entnehme man z.B. [46].

Seit dem 1.1.1990 leiten alle Staatsinstitute ihre Widerstandseinheit vom Quanten-Hall-Effekt ab. Sie haben sich dafür auf einen bestimmten Wert für die von Klitzing-Konstante geeinigt, der R_{K-90} genannt wird und den Wert $25812,807 \, \Omega \pm 0$ hat, also willkürlich als fehlerfrei angenommen wird. Diese Regelung hat die Vorteile, dass seitdem Widerstandskalibrierungen in allen Staatsinstituten zu den gleichen Werten führen und keinen zeitlichen Änderungen unterworfen sind.

Deutung

Man kann einige Charakteristika des Quanten-Hall-Effektes durch einfache Modellvorstellungen verständlich machen. Wir tun dies in drei Schritten: Als Erstes betrachten wir das Verhalten freier Elektronen, die sich nur in einer Ebene bewegen können, in einem starken, die Ebene senkrecht durchsetzenden Magnetfeld. Als Zweites überlegen wir, was geschieht, wenn wir ein in der Ebene liegendes elektrisches Feld dazu schalten. Schließlich gehen wir auf das Verhalten der Elektronen im realen zweidimensionalen Leiter ein.

Freie Elektronen im Magnetfeld. In Abschn. 3.3.3.2 ist der Versuch mit dem sog. Fadenstrahlrohr beschrieben: In einer Ebene senkrecht zu einem Magnetfeld \vec{B} bewirkt die Lorentz-

¹⁾ Bei bestimmten Exemplaren von QHE-Widerständen sind die Werte bis auf einige 10^{-9} reproduzierbar.

kraft, dass Elektronen sich auf Kreisbahnen bewegen. Da die Lorentzkraft $\vec{F}_L = e_0 \vec{v} \times \vec{B}$ die Zentripetalkraft liefert, gilt $m^* \omega_0^2 r = e_0 v_B B$ (\vec{v} steht ja senkrecht auf \vec{B}) und mit $v = \omega_0 r$ schließlich $m^* \omega_0^2 r = e_0 \omega_0 r B$. (m^* ist hierbei die sog. effektive Masse des Elektrons, die sich in einem Festkörper von der Ruhemasse m_{e0} unterscheidet und vom Material abhängt.) Daraus erhält man:

Die Winkelgeschwindigkeit beträgt $\omega_0 = \frac{e_0}{m^*}$. Sie hängt nicht vom Bahnradius ab.

Während man es beim Versuch mit dem Fadenstrahlrohr mit ziemlich schwachen Magnetfeldern zu tun hat ($B \approx 1$ mT), beobachtet man den QHE in sehr starken Feldern von einigen T und in Materialien, in denen m^* deutlich kleiner als m_{e0} ist. Dies hat zwei Konsequenzen: Erstens bewegen sich die Elektronen mit einer einige tausend mal höheren Winkelgeschwindigkeit. Zweitens folgt aus der Quantenmechanik:

Es sind nur solche Bahnen möglich, bei denen der Drehimpuls ein ganzzahliges Vielfaches von \hbar beträgt. $L = n\hbar$ mit $n = 1, 2, 3, \dots$

Der Grund dafür ist der gleiche, wie er in Abschn. 6.1.2 für die „Bohrschen Bahnen“ in der Atomhülle erläutert ist. Genau genommen, müsste man auch im vorliegenden Fall Wellenfunktionen benutzen. Wir bleiben jedoch beim Bohr-Sommerfeldschen Modell, weil es den großen Vorzug der Anschaulichkeit besitzt.

Verschiedene Drehimpulse bedeuten auch verschiedene Energien, die wir jetzt berechnen wollen. In Bezug auf den Kreismittelpunkt besitzt ein Elektron die kinetische Energie

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m^* v^2 = \frac{1}{2} m^* r^2 \omega_0^2 = \frac{1}{2} J \omega_0^2$$

Die potentielle Energie errechnet sich als

$$W_{\text{pot}} = \int_0^r F_{\text{zp}} dr = \int_0^r m^* \omega_0^2 r dr = \frac{1}{2} m^* \omega_0^2 r^2$$

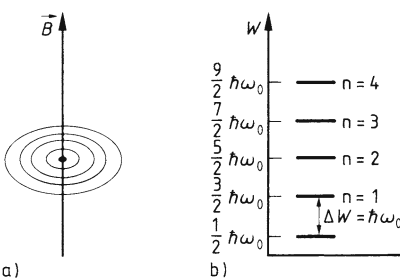


Bild 7.82

a) „Erlaubte Bahnen“ (nicht maßstäblich) und b) Energie-Niveau-Schema der Landau-Niveaus

– Man beachte, dass ω_0 bei festem Magnetfeld konstant ist (s.o.). – Damit wird $W_{\text{pot}} = W_{\text{kin}}$ und $W = W_{\text{kin}} + W_{\text{pot}} = m^* r^2 \omega_0^2 = J \omega_0^2$. Berücksichtigt man, dass $L = J \omega_0$ ist, erhält man $W = L \omega_0$ und mit $L = n\hbar$ schließlich $W = n\hbar \omega_0$. Hierbei haben wir angenommen, dass im Bezugspunkt $W = 0$ ist. Wie in Abschn. 6.1.2.4 gezeigt wird, ist dies wegen der Heisenbergschen Unbestimmtheitsrelation jedoch nicht möglich. Vielmehr existiert hier die „Nullpunktsenergie“ W_0 , die sich analog zu Abschn. 6.1.2.4 als $W_0 = \hbar \omega_0 / 2$ ergibt. Das heißt:

Elektronen, die in einer Ebene senkrecht zu einem Magnetfeld kreisen, können wegen $L = n\hbar$ nur die Energie-Niveaus

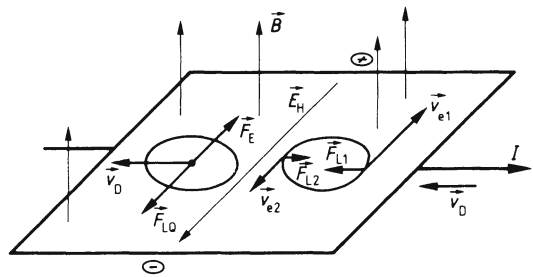
$$W_n = \frac{1}{2}\hbar\omega_0 + n\hbar\omega_0 = \left(\frac{1}{2} + n\right)\hbar\omega_0 \quad \text{mit } n = 1, 2, 3, \dots$$

einnehmen. Diese heißen Landau-Niveaus.¹⁾

Da $\omega_0 = e_0B/m^*$ unabhängig vom Radius ist, bedeutet dies in unserem Modell, dass bei einer bestimmten magnetischen Induktion B wegen $m^*r^2\omega_0 = n\hbar$ nur Bahnen mit bestimmten Radien existieren können, auf denen die Elektronen „strahlungslos kreisen“ (siehe Bild 7.82). Wie man leicht ausrechnet, liegen die Radien in der Größenordnung 10^{-8} m.

Freie Elektronen in gekreuzten magnetischen und elektrischen Feldern. Wir stellen uns vor, wir würden auf ein im Magnetfeld kreisendes Elektron, wie in Bild 7.83 gezeichnet, ein in der Bahnebene liegendes elektrisches Feld \vec{E}_H wirken lassen. Dann wird unmittelbar nach dessen Einschalten das Elektron in Richtung von \ominus nach \oplus beschleunigt, in der Richtung von \oplus nach \ominus abgebremst. Also ist die Lorentzkraft F_L auf dem einen Bahnstück größer (F_{L1}) als auf dem anderen (F_{L2}). Dies bewirkt erstens eine Deformation der Bahn, zum anderen aber eine resultierende Kraft quer zum elektrischen Feld, die das kreisende Elektron in dieser Richtung beschleunigt. Mit zunehmender Quergeschwindigkeit entsteht dadurch aber eine weitere Lorentzkraft F_{LQ} , die solange anwächst, bis sie die elektrische Feldkraft genau kompensiert. Dies ist der Fall, wenn die Driftgeschwindigkeit v_D einen solchen Wert erreicht hat, dass $F_{LQ} = e_0v_D B = e_0E_H$ ist.

Bild 7.83 Zustandekommen der Driftgeschwindigkeit \vec{v}_D eines kreisenden Elektrons im Magnetfeld \vec{B} , auf das gleichzeitig senkrecht zu \vec{B} das elektrische Feld \vec{E}_H wirkt: Rechts sieht man, dass durch E_H zunächst eine Deformation der Kreisbahn sowie eine nach links resultierende Lorentzkraft $\vec{F}_L = \vec{F}_{L1} - \vec{F}_{L2}$ entsteht, welche eine Beschleunigung nach links bewirkt, bis in der linken Bildhälfte die Driftgeschwindigkeit so groß geworden ist, dass die dadurch entstehende zusätzliche Lorentzkraft \vec{F}_{LQ} gerade die elektrische Feldkraft \vec{F}_E kompensiert. Insgesamt ergibt sich eine Zykloidenbahn.



Hieraus folgt:

$v_D = E_H/B$. Mit dieser Geschwindigkeit driftet die gesamte Bahn und damit das Elektron senkrecht zu \vec{E}_H und \vec{B} ; ein höchst bemerkenswerter Vorgang!

Da das Elektron keine Querkraft in Richtung von \vec{E}_H mehr „spürt“, ist die Bahn auch wieder schön kreisförmig. Dies ist so, als ob auf das Elektron nur noch ein mit \vec{v}_D mitdriftendes effektives Magnetfeld wirken würde. Es leuchtet sofort ein, dass die möglichen Energie-Niveaus, die Landau-Niveaus, hierbei erhalten bleiben.

¹⁾ L.D. Landau (1908 bis 1968).

Quanten-Hall-Effekt im zweidimensionalen Leiter. Bei den Experimenten zum QHE wird der Strom I natürlich nicht von einem einzigen, sondern sehr vielen Elektronen getragen. Deren Zahl sei N_e (in der Größenordnung von einigen 10^{11} je cm^2). Dann gilt mit der Leiterlänge l für den Strom

$$I = Q/t = ((Q/l) (l/t)) = (Q/l) v_D = (N_e e_0/l) v_D$$

Nur für kreisende Elektronen, also solche, deren Energie einem Landau-Niveau entspricht, gilt die oben hergeleitete Beziehung $v_D = E_H/B$. Hierbei ist E_H die quer zum Strom entstandene elektrische Hall-Feldstärke. Stimmt diese Driftgeschwindigkeit mit derjenigen überein, die den Strom I ergibt, ist gemäß den Überlegungen des vorhergehenden Absatzes kein elektrisches Feld in Stromrichtung erforderlich; die Spannung in Längsrichtung ist gleich Null, in Übereinstimmung mit den Experimenten.

Jetzt gilt also:

$$I = \frac{N_e e_0}{l} v_D = \frac{N_e e_0}{l} \frac{E_H}{B}$$

Es ist plausibel, anzunehmen, dass das Magnetfeld N_Φ magnetische Flussquanten umfasst, (vgl. Abschn. 7.4.4), die allerdings, da hier keine Cooper-Paare im Spiel sind, in diesem Falle je den Betrag $\Phi_0 = h/e_0$ haben. Dann können wir mit $B = \Phi/lb = N_\Phi \Phi_0/lb$ schreiben:

$$I = \frac{N_e e_0}{l} \frac{E_H lb}{N_\Phi \Phi_0} = \frac{N_e e_0 E_H b}{N_\Phi \Phi_0} = \frac{N_e e_0 U_H}{N_\Phi \Phi_0}$$

– Man vergewissere sich noch einmal, dass diese Beziehung für den Fall verschwindender Längsspannung U gewonnen wurde. – Dann gilt:

Der „Hall-Widerstand“ ist

$$R_H = \frac{U_H}{I} = \frac{N_\Phi \Phi_0}{N_e e_0} = \frac{N_\Phi h}{N_e e_0^2}$$

Offenbar steht dieses Ergebnis in Übereinstimmung mit den eingangs beschriebenen Experimenten, wenn $z = N_e/N_\Phi$, also gleich der Zahl der Elektronen pro Flussquant ist. – Beim fundamentalen QHE ist dies immer eine ganze Zahl. –

Anschaulich darf man sich also vorstellen, dass die Energieskala der Landau-Niveaus für jedes Flussquant existiert.

Es gibt so viele gleich hohe Landau-Niveaus, wie es Flußquanten gibt: im Fachjargon sagt man auch:

„Die Landau-Niveaus sind N_Φ -fach entartet“.

Bild 7.84 veranschaulicht ein Modell für diesen Sachverhalt. Jedes dieser Niveaus kann wegen des Pauli-Prinzips mit je zwei Elektronen mit entgegengesetzten Spins besetzt werden, wodurch sich eine Feinaufspaltung jedes Niveaus ergibt.

Auch durch Wechselwirkung mit dem Kristallgitter kann eine weitere Niveau-Aufspaltung entstehen. Dies geschieht aber für jedes Flussquant in gleicher Weise. Deshalb gilt:

Alle besetzbaren Niveaus sind N -fach entartet.

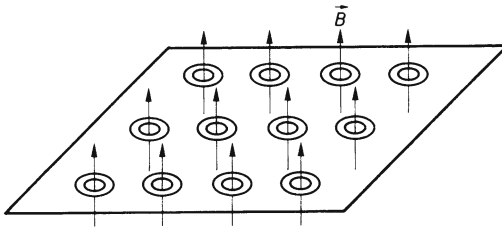


Bild 7.84 Modell eines zweidimensionalen Flussquantengitters mit je zwei Bahnen, die Landau-Niveaus entsprechen. In diesem einfachen Bild mit $N_\Phi = 12$ ist jedes Landau-Niveau „12fach entartet“. In Wirklichkeit entfallen auf jeden cm^2 etwa 10^{11} Flussquanten.

Die „eingefangenen“ kreisenden Elektronen bilden im zweidimensionalen Gitter deshalb immer eine Art „zweidimensionalen Kristall“, der sich mit v_D in Längsrichtung bewegt.¹⁾

Quanten-Hall-Effekt im realen zweidimensionalen Leiter. Bisher haben wir aus Gründen der Übersichtlichkeit vernachlässigt, dass im realen Leiter die Elektronen auch Zusammenstöße mit den Gitteratomen erfahren. Es zeigt sich jedoch, dass in den vorliegenden starken Magnetfeldern die mittlere Zeit zwischen zwei Stößen sehr viel größer als die Umlaufzeit $T_0 = 2\pi/\omega_0$ ist, weshalb die auf den erlaubten Niveaus befindlichen Elektronen im Mittel so lange kreisen können, dass das obige Bild seine Gültigkeit behält.

Allerdings ist es plausibel, dass die Winkelgeschwindigkeit durch die Stoßprozesse sowohl etwas kleiner als auch etwas größer als der durch das äußere Magnetfeld vorgegebene Wert $\omega_0 = e_0 B/m^*$ werden kann, sodass auch die Energiedifferenzen $W = \hbar\omega$ nicht mehr scharf, sondern nach oben und unten verbreitert sind. (Das ist in Bild 7.85a gestreift gezeichnet.)

Da bei gegebenem Magnetfeld die Zahl der Flussquanten konstant bleibt, ist natürlich die Gesamtzahl aller Niveaus in der jeweiligen Verteilung immer noch gleich N_Φ .

Modellerweiterung: Elektronen in Haftstellen. Ein mögliches Modell für das Verständnis der experimentellen Ergebnisse ist, sich vorzustellen, dass im Leiter eine sehr große Zahl von Haftstellen (vgl. Abschn. 7.5.2), d.h. bestimmte Arten von Gitterfehlern, existiert, denen man ein breites Spektrum von Energie-Niveaus zuordnen muss, in denen

¹⁾ Genau genommen müsste man in einem endlich langen Leiter noch berücksichtigen, dass auch die Lage der Kreismittelpunkte „gequantelt“ ist. Die „erlaubten“ Orte liegen jedoch so dicht aneinander, dass wir darauf nicht näher einzugehen brauchen.

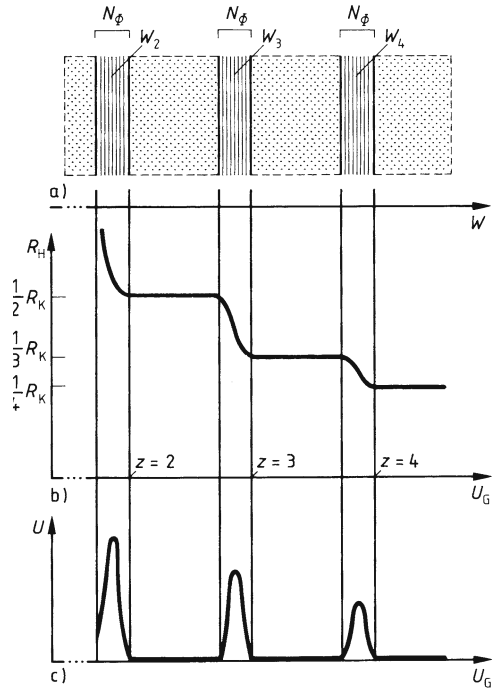


Bild 7.85

a) Bändermodell für die besetzbaren Energie-Niveaus

Gestreift: verbreiterte Landau-Niveaus W_2 , W_3 und W_4 . Punktiert: Niveaus von Elektronen-Haftstellen. Die Gesamtzahl aller Niveaus in einem verbreiterten Landau-Niveau ist gleich N_Φ .

b) Hall-Widerstand R_H als Funktion der Gate-Spannung U_G , d.h. der Zahl der Elektronen im zweidimensionalen Leiter

c) Längsspannung U als Funktion der Gate-Spannung

Elektronen eingefangen werden und dadurch nicht zum Strom beitragen können. Dies ist in Bild 7.85a punktiert eingezeichnet.

Erklärung: Mit dem obigen Modell ist jetzt eine qualitative Erklärung des fundamentalen Quanten-Hall-Effektes möglich. Man vergleiche hierzu Bild 7.85 und Bild 7.80.

Bild 7.85a zeigt ein Bändermodell¹⁾ der besetzbaren Energie-Niveaus. Die gestreift gezeichneten Bereiche stellen die verbreiterten Landau-Niveaus W_2 , W_3 und W_4 dar. In jedem dieser Bereiche beträgt gemäß dem oben Gesagten die Zahl der besetzbaren Niveaus jeweils N_Φ . Dazwischen sind punktiert die Haftstellen-Niveaus eingezeichnet.

Wir betrachten jetzt den Fall konstanten Magnetfeldes, sodass $\hbar\omega_0 = \hbar e_0 B/m^*$ ebenfalls konstant ist, und überlegen, was passiert, wenn bei einem MOS-FET entsprechend Bild 7.81 die Gate-Spannung U_G und damit die Zahl der Elektronen im Leiter erhöht wird.

Hierbei beginnen wir nicht bei Null, sondern nehmen an, das unterste Landau-Niveau sei gefüllt, die darüber liegenden Haftstellen ebenfalls, bis zum unteren (in der Zeichnung: linken) Niveau des zweiten verbreiterten Landau-Bereiches. Da dieser zunächst nicht vollständig gefüllt ist, können die kreisenden Elektronen auf höhere freie Niveaus dieses Bereiches gelangen. Das ist mit Energieaufwand verbunden, der wegen der Stoßprozesse nur durch ein elektrisches Längsfeld mit der Spannung U (s. Bild 7.85c) möglich ist.

Dieser Bereich stellt sozusagen ein „Mini-Leitungsband“ (vgl. Abschn. 7.4.1) dar. Mit wachsendem U_G werden nacheinander alle N_Φ -Niveaus von W_2 besetzt. Hierbei nimmt wegen $R_H \sim 1/N_e$ der Hall-Widerstand ab.

Nach vollständiger Besetzung können die kreisenden Elektronen nicht mehr in höhere Landau-Niveaus gelangen²⁾. Also nehmen alle an dem durch E_H und B verursachten Driften teil, und U ist gleich Null. Weitere Elektronenzufuhr durch Steigerung von U_G führt zu einer Besetzung der darüber liegenden Haftstellen, sodass diese Elektronen nichts zum Strom beitragen können. Die Zahl der kreisenden Elektronen pro Zahl der Flussquanten, $z = N_e/N_\Phi$, bleibt gleich 2, bis das nächste verbreiterte Landau-Niveau erreicht ist und der ganze Vorgang bis $z = N_e/N_\Phi = 3$ sich wiederholt. Der weitere Verlauf versteht sich offensichtlich jetzt von selbst.

Entsprechende Überlegungen lassen sich zur Erklärung von Bild 7.80 anstellen. Doch wollen wir hier darauf verzichten. Verblüffend ist, dass in diesem Modell die für die Messtechnik wichtigen Stufen offensichtlich von den „richtigen“ Gitterfehlern in der jeweiligen Probe abhängen und trotzdem eine Reproduzierbarkeit bis zu einigen 10^{-9} erreicht wird.

Deswegen wollen wir am Schluss einschränkend sagen, dass das hier verwendete Modell zwar recht anschaulich ist, aber leider noch keine quantitative Vorhersage für die Breite der Stufen ermöglicht.

Übrigens erhält man die experimentellen Ergebnisse des gebrochen quantisierten QHE, wenn man sich in einer Abwandlung von Bild 7.84 vorstellt, dass die einzelnen „Flussschläuche“ (vgl. Abschn. 7.4.4) nicht nur eines, sondern mehrere Flussquanten enthalten können, sodass das Verhältnis $z = N_e/N_F$ auch die Werte $1/3$, $2/3$, $2/5$, $3/5$ usw. annehmen kann.

Anwendung: Da man mit Hilfe des Quanten-Hall-Effektes Widerstände mit einer relativen Messunsicherheit bis 10^{-9} darstellen kann, lassen sich hiermit die üblichen, einer gewissen Alterung unterworfenen Widerstandsnormale kalibrieren. S. hierzu S. 633.

1) Im Gegensatz zu Abschn. 7.3 ist hier die Energie nicht in der Ordinaten-, sondern in der Abszissenachse aufgetragen.

2) Auch thermisch ist dies nicht möglich, da kT sehr viel kleiner als $\hbar\omega_0$ ist.

7.5 Lumineszenz

Sendet ein gasförmiger, flüssiger oder fester Körper Licht aus, das nicht ausschließlich durch Wärme, sondern eine andere Art von Anregung hervorgerufen wurde, so nennt man diese Erscheinung Lumineszenz.

Anregung zur Lumineszenz kann z.B. durch Bestrahlen eines Körpers mit Licht, Röntgenstrahlen, Elektronen-, Protonen- und Alpha-Strahlen sowie Stromdurchgang erfolgen.

Die Lichtemission eines Temperaturstrahlers (vgl. Abschn. 2.6.3 und 5.2.5.5) wird demnach nicht zur Lumineszenz gerechnet.

Das macht sich schon in den Spektren des emittierten Lichtes bemerkbar. Während ein Temperaturstrahler ein Spektrum liefert, dessen Intensität in Abhängigkeit von der Wellenlänge durch das Plancksche Strahlungsgesetz beschrieben wird (vgl. Abschn. 5.2.5.5), besitzen die Lumineszenzspektren oft eine auffallend andere Struktur. Bekannt sind die Linien-Spektren des Lichtes, welches atomare Gase z.B. nach Anregung durch Elektronenstoß in einer Gasentladung aussenden (vgl. Abschn. 6.1.1.1 und Anhang).

In Festkörpern, auf die wir unsere Betrachtungen hier beschränken wollen, entstehen keine Linien-, sondern sog. Bandenspektren (Bild 7.86).

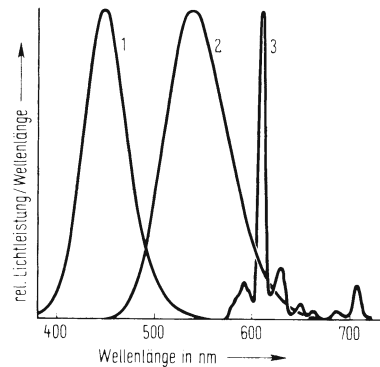


Bild 7.86 Bandenspektren dreier fester Leuchtstoffe

1 Zinksulfid, mit $10^{-2}\%$ Silber aktiviert, ZnS Ag
2 Zink-Cadmium-Sulfid (7% Cd), mit 1% Kupfer aktiviert, ZnCd S-Cu

3 Yttriumoxid, mit 6% Europium aktiviert, Y_2O_3 -Eu

(Die Prozentangaben sind Gewichtsprozente.)
Diese drei Leuchtstoffe sind die blau (1), grün (2) und rot (3) leuchtenden der Farbblidröhre im Fernsehgerät.

7.5.1 Grundlegende Erscheinungen

Die wichtigsten Kennzeichen der Lumineszenz wollen wir in einigen Versuchen kennenlernen. Dazu benutzen wir folgende

Versuchsordnung. Ein kleines Blech (einige cm^2) wird mit einem Bindemittel (z.B. Wasserglas) bestrichen. Auf dieses streuen wir als Leuchtstoff eine dünne Schicht Zinksulfidpulver. Das Pulver muss sehr rein sein, soll jedoch winzige Spuren von Silber ($10^{-2}\%$) enthalten – Kurzbezeichnung ZnS-Ag –. Nach dem Trocknen des Bindemittels besitzen wir einen sog. Lumineszenzschirm, mit dem wir die grundlegenden Erscheinungen der Festkörper-Lumineszenz untersuchen können.

Die Lichtleistung P_L des vom Leuchtstoff emittierten Lichtes in Abhängigkeit von der Zeit t messen wir mit einer kalibrierten Fozelle mit nachgeschaltetem Schreiber. Ein Farbfilter vor der Fozelle lässt auf diese nur das Lumineszenzlicht fallen.

□ **Versuch 1. Leuchterscheinungen.** Wir beleuchten den Lumineszenzschirm im Dunkeln mit ultravioletttem Licht. Der Schirm leuchtet hell blau auf. Er wandelt also das unsichtbare UV-Licht in sichtbares Licht um. Nach Abschalten des UV-Lichtes leuchtet er erstaunlicherweise noch weiter, wobei seine Helligkeit allmählich abnimmt (Bild 7.87). Der Leuchtstoff wirkt als Lichtspeicher. □

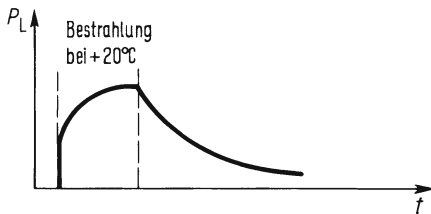


Bild 7.87 Lichtleistung P_L als Funktion der Zeit t im Versuch 1

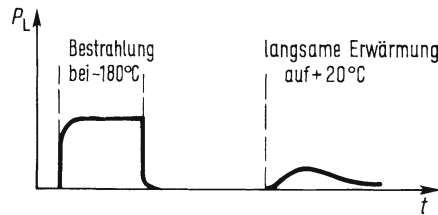


Bild 7.88 Lichtleistung P_L als Funktion der Zeit t in Versuch 2

□ **Versuch 2. Temperaturabhängigkeit der Leuchterscheinungen.** Wir kühlen den Lumineszenzschirm durch Besprühen mit flüssiger Luft stark ab und beleuchten ihn dann mit UV-Licht. Wieder sendet er helles blaues Licht aus, das jetzt aber mit Abschalten des UV-Lichtes sofort ohne nennenswertes Nachleuchten verschwindet. Das Nachleuchten setzt erst wieder ein, wenn sich der Leuchtstoff wieder erwärmt (Bild 7.88). □

□ **Versuch 3. Ausleuchten.** Wie in Versuch 1 regen wir den Lumineszenzschirm bei Zimmertemperatur durch UV-Bestrahlung zum Leuchten an, das nach Abschalten des UV-Lichtes mit abnehmender Helligkeit andauert. Jetzt tauchen wir den Schirm in heißes Wasser. Dabei nimmt seine Helligkeit deutlich sichtbar zu, um dann viel schneller abzuklingen, als dies bei Zimmertemperatur geschieht. Dieser Effekt heißt Ausleuchten (Bild 7.89). □

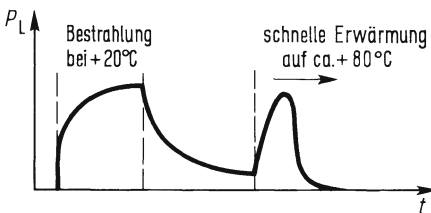


Bild 7.89 Lichtleistung P_L als Funktion der Zeit t in Versuch 3

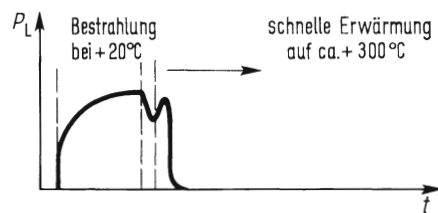


Bild 7.90 Lichtleistung P_L als Funktion der Zeit t in Versuch 4

□ **Versuch 4. Tilgen.** Wir regen den Lumineszenzschirm bei Zimmertemperatur durch UV-Bestrahlung zum Leuchten an und legen ihn danach auf eine Heizplatte mit einer Temperatur von ca. 300 °C. Das Nachleuchten wird nur ganz kurzzeitig etwas stärker, um dann sofort völlig zu verschwinden. Man spricht vom Tilgen des Nachleuchtens (Bild 7.90). □

□ **Versuch 5. Anregung durch Licht verschiedener Wellenlänge.** Wir versuchen, den Leuchtstoff durch Licht verschiedener Wellenlänge anzuregen. Ergebnis: Mit violetttem Licht gelingt die Anregung fast so gut wie mit UV-Licht. Mit blauem Licht ist nur eine schwache, mit grünem und rotem Licht hingegen gar keine Anregung möglich. Die Farbe des emittierten Lichtes ist in allen Fällen gleich. □

Dieses Versuchsergebnis führt uns zu einer für alle Leuchtstoffe in entsprechender Weise geltenden Regel:

Stokessche Regel: Licht, das Lumineszenz hervorruft, muss eine kürzere Wellenlänge oder höchstens eine gleich große Wellenlänge wie das Lumineszenzlicht haben¹⁾.

Der Leuchtstoff kann also Licht von kürzerer in solches mit längerer Wellenlänge verwandeln.

□ **Versuch 6. Lumineszenzspektren bei verschiedener Zusammensetzung des Leuchtstoffes.** Den in Versuch 1 bis 5 benutzten Leuchtstoff aus Zinksulfid mit geringen Spuren von Silber, ZnS-Ag, ersetzen wir nacheinander durch Leuchtstoffe, in denen immer mehr Zink durch Cadmium ersetzt ist, die also die Zusammensetzung ZnCdS-Ag haben. Mit diesen führen wir wieder die Versuche 1 bis 5 durch. Dabei beobachten wir: Steigerung des Cd-Anteiles von 0...100% ergibt eine Änderung der Leuchtfarbe von Blau über Grün und Rot bis Infrarot. Außerdem nimmt dabei die Nachleuchtdauer ab. □

Es gilt also:

Durch Änderung der Zusammensetzung eines Leuchtstoffes lässt sich seine Leuchtfarbe und Nachleuchtdauer an verschiedene Anwendungsfälle anpassen.

Außer Zinksulfid oder Zink-Cadmiumsulfid gibt es noch eine große Zahl anderer anorganischer oder organischer Stoffe, die Festkörperlumineszenz zeigen. Das sind z.B. Zinksilikat, Cadmiumsilikat, Zink-Berylliumsilikat, Erdalkali-Molybdate und -Wolframate, Erdalkalioxide und -sulfide, halogenhaltige Phosphate, Alkali- und Erdalkalihalogenide, Naphthalin, Anthracen, Phenantren. Die Beschreibung ihrer Eigenschaften geht über den Rahmen dieses Buches hinaus (s. z.B. [25]).

Die in Versuch 1 bis 6 beobachteten Erscheinungen sind für viele Leuchtstoffe typisch. Dabei spielt, abgesehen von der Lichtwellenlänge, die Art der Anregung im Allgemeinen kaum eine Rolle. Wir hätten in den obigen Versuchen die Anregung statt mit UV-Licht z.B. auch mit Elektronen- oder Röntgenstrahlen durchführen können. An der Art der Leuchterscheinungen sowie deren Abhängigkeit von der Temperatur hätte sich nichts geändert. Allerdings unterscheiden sich verschiedene Leuchtstoffe durch ihre Spektren (vgl. auch Bild 7.90) sowie durch die Helligkeit und Dauer des temperaturabhängigen Nachleuchtens. Das Letztere kann über Stunden anhalten, wie es z.B. bei den Leuchtzifferblättern solcher Uhren der Fall ist, in denen der Leuchtstoff nicht ständig durch die Beta-Teilchen eines eingebauten radioaktiven Stoffes angeregt wird. Andere Leuchtstoffe haben nur Nachleuchtdauern von 10^{-2} s oder gar 10^{-6} s. Es gibt jedoch auch Leuchtstoffe, bei denen die Lichtemission nach Abschalten der Anregung, unabhängig von der Temperatur, nur etwa 10^{-8} s andauert, bei welchen also das temperaturabhängige Nachleuchten ganz fehlt.

Wir wollen noch einige häufig verwendete Bezeichnungen kennenlernen:

Man nennt das von der Temperatur unabhängige Leuchten Fluoreszenz²⁾, das temperaturabhängige Nachleuchten Phosphoreszenz³⁾.

Leuchtstoffe heißen gelegentlich auch Phosphore³⁾.

¹⁾ G. G. Stokes (1819 bis 1903). In besonderen Fällen, auf die wir hier nicht eingehen wollen, kann diese Regel gelegentlich auch verletzt werden.

²⁾ Nach dem Mineral Fluorit (CaF₂).

³⁾ Phosphor = Lichtträger.

Lichtausbeute. Leuchtstoffe wandeln irgendeine Anregungsenergie, z.B. die Energie von Lichtquanten oder die Bewegungsenergie von Elektronen, in Lichtenergie der Lumineszenzstrahlung um. Wie bei vielen anderen technischen Prozessen ist auch für diese Art der Energieumwandlung der Wirkungsgrad interessant. Regt man in den oben beschriebenen Versuchen 1 bis 5 jeweils mit konstanter Leistung an, lässt also während gleicher Anregungszeit jeweils die gleiche Energie vom Leuchtstoff aufnehmen, so kann man die in den einzelnen Fällen emittierten Lichtenergien leicht anhand der Kurven miteinander vergleichen, in denen die Lichtleistung P_L als Funktion der Zeit t registriert wurde (Bilder 7.87, 7.88, 7.89, 7.90). Denn es ist ja die gesamte

Lumineszenzenergie oder „Lichtsumme“

$$W_{Li} = \int_0^{\infty} P_L dt$$

Sie entspricht der Fläche unter der P_L - t -Kurve. Misst man diese aus, so ergibt sich:

Bei gegebener Anregungsenergie ist die Lichtsumme konstant, wenn kein Tilgen eintritt.

Zum Beispiel hat die Lichtsumme in Versuch 1 bis 3 den gleichen Betrag, während sie in Versuch 4 niedriger ist. Das Verhältnis der gesamten Lumineszenzenergie zur Anregungsenergie, also der Wirkungsgrad, kann etwa 80% erreichen.

Quantenausbeute. Recht interessant ist ein Vergleich zwischen der Zahl der bei der Anregung mit Licht absorbierten Lichtquanten N_a und derjenigen der emittierten Lichtquanten N_e .

Definition: Das Verhältnis der Zahl der emittierten Lichtquanten N_e und der Zahl der absorbierten Lichtquanten N_a heißt Quantenausbeute.

Da nach der Stokesschen Regel das emittierte Licht immer langwelliger als das eingestrahelte Licht ist, hat jedes emittierte Lichtquant oder Photon immer eine kleinere Energie hf_e als jedes Photon des Anregungslichtes hf_a . Die Quantenausbeute ist also immer größer als der Wirkungsgrad.

Aus Experimenten ergibt sich:

Die Quantenausbeute kann bis zu 100% betragen. $N_e/N_a \leq 1$

7.5.2 Deutung der Festkörper-Lumineszenz

Wie in Abschn. 7.3 gezeigt wird, spalten in jedem Festkörper die Energieniveaus für die äußeren Elektronen der Gitterbausteine durch die Wechselwirkung untereinander in Energiebänder auf, von denen das oberste besetzte Band Valenzband, das unterste unbesetzte Band Leitungsband genannt wird. Es ist naheliegend, die Festkörperlumineszenz anhand dieses Energiebändermodells zu deuten.

Alle festen Leuchtstoffe sind im völlig reinen Zustand Isolatoren oder Eigenhalbleiter, wobei die Grenze zwischen beiden vom Bandabstand $\Delta W_0 = W_L - W_V$ abhängt (vgl. Abschn. 7.4.2). Im reinen Kristall ohne Gitterfehler kann daher ein Elektron nur dadurch Energie gewinnen, dass es von einem Niveau im Valenzband auf ein anderes im Leitungsband gehoben wird, wobei ein Elektron-Loch-Paar erzeugt wird (vgl. Abschn. 7.4.3). Fällt es jetzt sofort (in ca. $10^{-9} \dots 10^{-8}$ s) wieder auf das Ausgangsniveau zurück, so wird dabei ein Lichtquant abgegeben, dessen Energie genau mit der Anregungsenergie übereinstimmt. Führt man auch die Anregungsenergie durch Lichtquanten einheitlicher Energie zu, so dürfte eigentlich das ausgesandte Licht auch nur aus gleichartigen Lichtquanten bestehen, was einer einfachen Streuung gleichkäme. In Wirklichkeit entsteht bei der Festkörperlumineszenz jedoch auch bei der Anregung mit einheitlichen Lichtquanten ein ganzes Bandenspektrum von Lichtquanten sehr unterschiedlicher Energie (Bild 7.86).

Der Schluss liegt nahe, dass diese einfach dadurch entstehen, dass die bei der Anregung erzeugten freien Elektronen durch Stöße mit dem Gitter Energie verlieren und dadurch auf ein niedrigeres Energieniveau im Leitungsband gelangen, von wo aus sie dann mit einem Loch rekombinieren. Aus Gründen, auf die wir hier nicht näher eingehen wollen, gibt es jedoch quantenmechanische Auswahlregeln, die einen direkten Band-Band-Übergang nur zwischen ganz bestimmten, einander zugeordneten Niveaus erlauben¹⁾. Eine Rekombination beliebiger Elektron-Loch-Paare unter Erzeugung von Lichtquanten entsprechend unterschiedlicher Energie ist daher nur an irgendwelchen Störstellen des Gitters möglich, für die diese Auswahlregeln nicht gelten. Solche Störstellen können z.B. Frenkel- oder Schottky-Defekte (vgl. Abschn. 7.1.2.2) oder eingebaute Fremdatome sein, die den reinen Kristall für die Lumineszenz „aktivieren“.

Gitterfehler, in denen das Lumineszenzlicht entsteht, nennt man Leuchtzentren oder Aktivatorzentren.

Solche Zentren sind Akzeptoren (z.B. einwertige Silberatome anstelle zweiwertiger Zinkatome im ZnS-Gitter, vgl. Abschn. 7.4.3.2). Diese haben gemäß Abschn. 7.4.3.2 (P-Leitung) Energieniveaus W_A , die über dem Valenzband des ungestörten Gitters in der verbotenen Zone liegen (Bild 7.91, s. Seite 644) und durch thermisch angeregte Elektronen besetzt sind. Es leuchtet ein, dass solche Leuchtzentren auch noch unbesetzte höhere Niveaus W_B haben können, die ebenfalls in der verbotenen Zone liegen dürfen.

Die Art der Leuchtzentren bestimmt die spektrale Verteilung des Lumineszenzlichtes.

Außer Akzeptoren enthalten die meisten festen Leuchtstoffe auch noch Donatoren (z.B. einfach negative Chlorionen (Cl^-) anstelle doppelt negativer Schwefelionen (S^{2-}) im ZnS-Gitter). Deren Energieniveaus W_D liegen gemäß Abschn. 7.4.3.2 (N-Leitung) unterhalb des Leitungsbandes ebenfalls in der verbotenen Zone. Sie sind im Allgemeinen unbesetzt, da die Donatoren durch Zufuhr von Wärmeenergie ihre überschüssigen Elektronen verloren haben. Letztere rekombinieren an irgendwelchen Gitterstörstellen mit den freien,

¹⁾ Im Wesentlichen handelt es sich darum, dass der Impuls-Erhaltungssatz erfüllt sein muss.

beschriebenen angeregten Zustand nennt man auch Exciton, den zugehörigen Energie-transport Excitonenwanderung.

In allen oben beschriebenen Fällen ist klar, dass die beteiligten Elektronen auf Energieniveaus gehoben werden müssen, die mindestens so hoch wie die obersten Niveaus der Leuchtzentren liegen. Zur Anregung mit Licht sind also Photonenenergien erforderlich, die mindestens so groß sind wie die Energie der emittierten Photonen. Damit ist die Stokessche Regel erklärt.

Phosphoreszenz. Das temperaturabhängige Nachleuchten, die Phosphoreszenz, tritt vorwiegend in Leuchtstoffen auf, in denen bei der Anregung freie Elektronen entstehen. Wird die Anregungsenergie dem ungestörten Gitter zugeführt, so entsteht mit jedem freien Elektron auch ein Loch. Die Löcher diffundieren in der oben beschriebenen Weise zu den Leuchtzentren, wodurch deren untere Energieniveaus geleert werden (2 in Bild 7.91). Bei der Absorption der Anregungsenergie in Leuchtzentren wird das Loch direkt in dessen unterem Niveau erzeugt (3 in Bild 7.91). Ein Teil der freien Elektronen jedoch wird von den Haftstellen eingefangen (4 in Bild 7.91). Da deren Energieniveaus W_D etwas tiefer als das Leitungsband liegen, können die Elektronen erst durch Energiezufuhr wieder befreit werden und dann erst zu den Leuchtzentren diffundieren (5 in Bild 7.91). Diese Energie wird im Allgemeinen der in Form von Gitterschwingungen vorhandenen Wärmeenergie entnommen. Wie schnell die Haftstellen geleert werden, hängt daher von der Energiedifferenz $W_L - W_D$ und der Temperatur ab.

Bei sehr tiefen Temperaturen reicht die Wärmeenergie nicht zur Befreiung der Elektronen aus den Haftstellen aus, wie es in Versuch 2 beobachtet wurde. Man spricht von „Einfrieren“ der Lichtenergie.

In manchen Leuchtstoffen liegen die Haftstellenniveaus so tief unter dem Leitungsband, dass auch bei Zimmertemperatur noch keine Befreiung der gespeicherten Elektronen eintritt. Dies kann man jedoch z.B. durch Einstrahlung von Photonen geeigneter Energie erreichen. In diesem Falle wird also ein Nachleuchten durch Licht verursacht und scheinbar die Stokessche Regel verletzt.

Die stärkeren Gitterschwingungen bei höheren Temperaturen bewirken eine schnellere Entleerung der Haftstellen. Dadurch ist das Nachleuchten sehr intensiv, klingt aber schneller ab. Man vergleiche Versuch 3.

Die Zahl der entweder sofort oder nach vorübergehender Speicherung in die Leuchtzentren gelangenden Elektronen ist bei gegebener Anregungsenergie im Allgemeinen konstant. Es entsteht also auch eine konstante Zahl von Photonen und damit eine konstante Lichtsumme. Bei sehr hohen Temperaturen kann es jedoch geschehen, dass die in den Haftstellen gespeicherten Elektronen ohne den Umweg über das Leitungsband strahlungslos mit Löchern rekombinieren. Da sie dann nicht mehr in die Leuchtzentren gelangen können, nimmt die Lichtsumme gegenüber dem Normalfall ab. Man vergleiche Versuch 4.

Einen experimentellen Beweis für unsere Annahme, dass bei der Phosphoreszenz eine Bewegung freier Elektronen mitwirkt, bekommen wir durch

□ **Versuch 7.** Wir bringen eine dünne Schicht des in den Versuchen 1 bis 5 benutzten ZnS-Ag-Leuchtstoffes zwischen zwei Elektroden, von denen die eine aus einem lichtdurchlässigen Drahtgitter besteht. Im unbeleuchteten Zustand fließt bei Anlegen einer Spannung kein Strom, der Leuchtstoff ist ein Isolator.

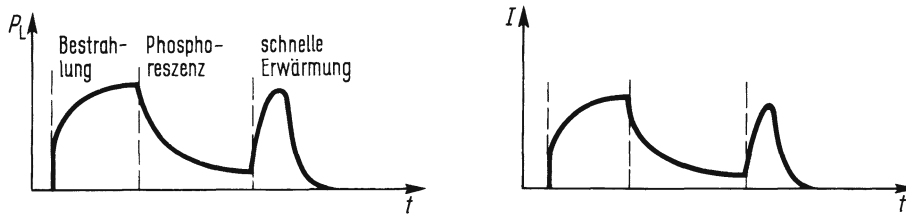


Bild 7.92 Lichtleistung P_L und Strom I als Funktion der Zeit t in Versuch 7

Bei Anregung mit UV-Licht und während des Nachleuchtens wird die Leuchtstoffschicht jedoch leitend. Misst man gleichzeitig den Strom I und die Leistung des Lumineszenzlichtes P_L , so erhält man die in Bild 7.92 aufgetragene Zeitabhängigkeit. Strom und Lichtleistung sind einander proportional. □

Elektrolumineszenz. Außer den oben beschriebenen Mechanismen der Freisetzung von Elektronen und Löchern, nämlich Absorption von Lichtenergie im Grundgitter und in den Leuchtzentren, können noch andere Vorgänge eine Rolle spielen. Dabei hat vor allem die Lumineszenzanregung durch elektrischen Strom eine große Bedeutung.

Alle Erscheinungen, bei denen elektrische Energie ohne Mitwirkung einer anderen Energieform direkt in Licht umgewandelt wird, heißen Elektrolumineszenz.

Lumineszenzdiode, PN-Schicht-Laser. In einer in Flussrichtung gepolten PN-Schicht ist die Dichte sowohl der freien Elektronen als auch der Löcher sehr hoch. Deshalb können hier auch besonders viele Rekombinationen stattfinden. Die dabei frei werdende Energie wird zu einem großen Teil in Form entsprechend energiereicher Photonen, der Rest strahlungslos als Wärme an das Gitter abgegeben.

Eine in Flussrichtung gepolte PN-Schicht kann Licht erzeugen. Sie heißt Lumineszenzdiode, LED¹⁾.

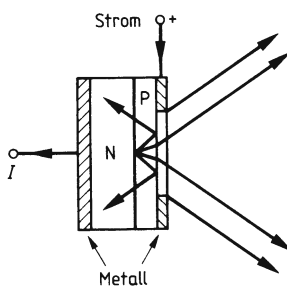


Bild 7.93 Schema einer Lumineszenzdiode

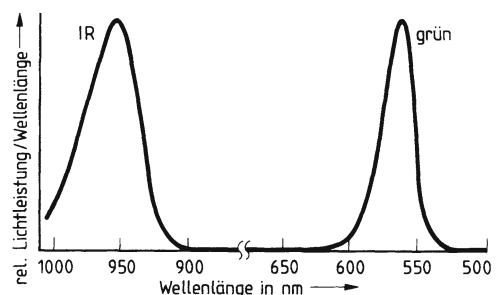


Bild 7.94 Spektren einer GaAs: Si-Lumineszenzdiode (IR) und einer GaP: N-Lumineszenzdiode (grün)

¹⁾ Von (Light emitting diode).

Um einen hohen Wirkungsgrad zu erzielen, dotiert man sowohl die P- als auch die N-Seite so stark, dass das Fermi-Niveau im P-Gebiet gerade unter der oberen Kante des Valenzbandes, im N-Gebiet etwas über der unteren Leitungsbandkante liegt (sog. Entartung). Damit erreicht man gleichzeitig, dass die Energie der bei der Rekombination entstehenden Photonen praktisch gleich der Breite der verbotenen Zone ist, also $hf = \Delta W_0$. Durch geeignete Wahl des Halbleitermaterials lässt sich also die Frequenz des emittierten Lichtes bestimmen.

Beispielsweise hat ein GaAs:Si-Mischkristall den Bandabstand $\Delta W_0 = 1,33$ eV. Die entsprechende PN-Schicht strahlt dann mit der mittleren Wellenlänge $\lambda = 930$ nm (IR). Bei GaP: N beträgt $\Delta W_0 = 2,18$ eV und $\lambda = 570$ nm (grün).

Bild 7.93 zeigt den schematischen Aufbau, Bild 7.94 die Spektren der oben genannten Lumineszenzdiode.

Bildet man die PN-Schicht als optischen Resonator aus, wie es in Bild 7.95 skizziert ist, so kann sie als Laser (vgl. Abschn. 6.1.3.1) wirken. Die hierfür erforderliche Besetzungsinversion ist erst ab einem bestimmten Schwellenstrom I_{thr} groß genug, sodass erst ab diesem Strom die Laserwirkung einsetzt (Bild 7.96). Da mit steigender Temperatur die Häufigkeit strahlungsloser Rekombinationen anwächst, nimmt der erforderliche Schwellenstrom exponentiell mit der Temperatur zu.

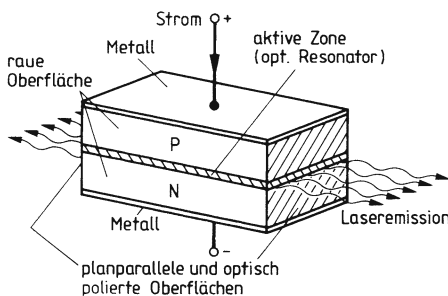


Bild 7.95 Schema eines PN-Schichtlasers

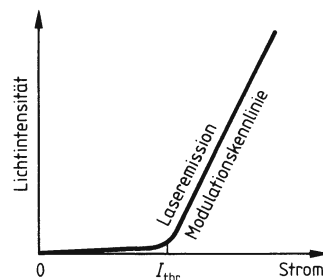


Bild 7.96 Lichtintensität in Abhängigkeit vom Flussstrom bei einem PN-Schichtlaser. I_{thr} (thr von threshold) ist der Schwellenstrom, ab welchem die Laserfunktion einsetzt.

PN-Schicht-Laser senden wie andere Laser relativ schmalbandiges, kohärentes Licht aus, das sich obendrein leicht durch die Stromstärke modulieren lässt. Sie eignen sich deshalb besonders gut zur optischen Informationsübertragung, z.B. über Glasfaserkabel (vgl. Abschn. 4.1.2.1). In großen Mengen werden IR-Halbleiter-Laser zur Abtastung von Compact Disks eingesetzt.

Organische Leuchtdioden, OLED-s

Aus vielen Gründen sind OLED-s von großer technischer Bedeutung: Mit ihnen lassen sich großflächige Lichtquellen herstellen, die außerdem auch noch sehr dünn ($< 0,5 \mu\text{m}$) und deshalb auch flexibel sein können. Sie eignen sich dadurch auch z.B. für die kostengünstige Massenproduktion großflächiger Bildschirme.

Den prinzipiellen Aufbau einer OLED zeigt Bild 7.97. Zwischen zwei Kontaktmaterialien, die als Kathode und Anode dienen und unterschiedliche Austrittsarbeiten haben müssen

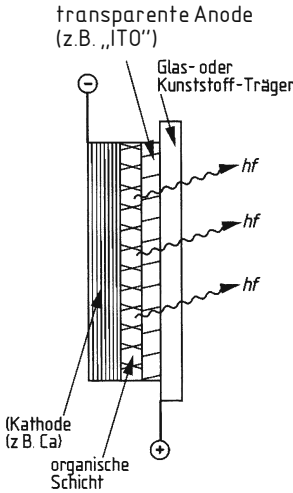


Bild 7.97 Schema einer organischen Leuchtdiode. Zwischen zwei Kontaktmaterialien mit unterschiedlichen Austrittsarbeiten, der Kathode und der Anode, befindet sich eine nur etwa 100 nm dicke organische Schicht aus einem in Bild 7.98 dargestellten Polymer. (Ca = Kalzium; ITO = Indium-Zinn-Oxid (Indium-Tin-Oxide))

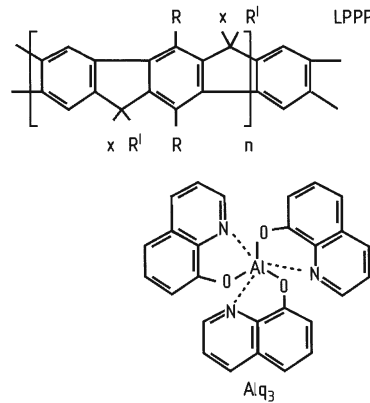


Bild 7.98 Chemische Strukturformeln einiger organischer Halbleiter. Das leiterartige Poly-p-Phenylene, LPPP, ist ein lösliches Polymer, das durch Aufschleudern aus der flüssigen Phase in einer nur ca. 100 nm dünnen Schicht auf dem mit einer sehr dünnen Anode (z.B. Indiumzinnoxid, ITO) bedeckten Träger (z.B. Glas oder Kunststoffolie) aufgebracht werden kann. Alq₃ (Tris-Hydroxy-8-Aluminium-Quinolin) kann z.B. im Hochvakuum aufgedampft und durch gleichzeitige Verdampfung eines Farbstoffes molekular dotiert werden.

– entsprechend verschieden hohen Fermi-Niveaus W_{FK} und W_{FA} –, befindet sich eine organische Polymer-Schicht, z.B. eine der in Bild 7.98 durch ihre Strukturformeln skizzierten Substanzen. Diese zeichnen sich dadurch aus, dass sie sehr schwach gebundene, ungepaarte Elektronen enthalten, die sich leicht – z.B. durch eine außen anliegende elektrische Spannung – befreien lassen, wobei dann auch die bekannten Löcher entstehen. Durch einen eleganten Trick erhält man das in Bild 7.99 dargestellte für Lumineszenz charakteristische

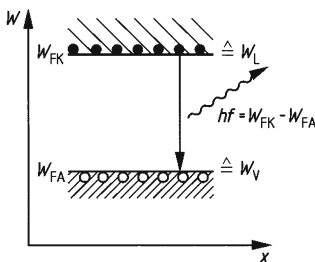


Bild 7.99 Energieschema einer OLED. Erläuterung im Text.

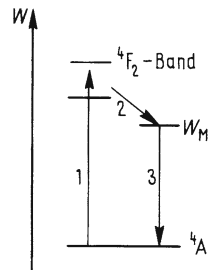


Bild 7.100 Energieschema des Rubinlasers
 1 Pumpen durch Einstrahlen von Licht mit $\lambda = 550 \text{ nm}$
 2 strahlungsloser Übergang in das metastabile Niveau W_M
 3 Laserstrahlung mit $\lambda = 690 \text{ nm}$

Energieschema. Bringt man nämlich auf einer Seite der sehr dünnen Polymerschicht eine Kathode mit dem Fermi-Niveau W_{FK} , auf der anderen Seite eine Anode mit dem niedrigeren Fermi-Niveau W_{FA} an, so entspricht das dem z.B. in Bild 7.91 gezeigten Energieschema für anorganische Leuchtstoffe, wobei W_{FK} dem unteren Rand des Leitungsbandes W_L und W_{FA} dem oberen Rand des Valenzbandes W_V entspricht. Bei Anlegen einer genügend großen Gleichspannung (ca. 2 V bis 4 V) rekombinieren die Elektronen vom Energie-Niveau W_L mit den Löchern auf dem Energie-Niveau W_V in bekannter Weise unter Aussendung von Lichtquanten. Man erzielt bei ca. 3V Betriebsspannung Leuchtdichten größer als 1000 Cd/m² und Lichtausbeuten größer als 2 Cd/A. Durch geeignete chemisch präparierte Polymer-Schichten und passende Wahl des Kathoden- und Anodenmaterials, d.h. der Differenz der Fermi-Energien $W_{FK} - W_{FA}$, lassen sich verschiedene Farben, durch Kombination von Rot, Grün und Blau sogar weißes Licht erzeugen. Versieht man die OLED-s mit entsprechenden optischen Resonatoren (s.o.), so lassen sich auch OLED-Laser realisieren.

Optisch gepumpte Festkörper-Laser. Es sei noch erwähnt, dass auch in Festkörpern metastabile Energieniveaus existieren können, die bei geeigneter Formgebung des Festkörpers als optischer Resonator für den in Abschn. 6.1.2.2 beschriebenen Lasereffekt ausgenutzt werden können.

Ein bekanntes Beispiel ist das metastabile Niveau W_M von Leuchtzentren, die in einem Rubinkristall (Al_2O_3) durch Einbau von Chrom-Ionen (Cr^{+++}) erzeugt werden (Bild 7.100). Der Rubinlaser wird mit Licht gepumpt.

7.5.3 Anwendungen

Die Festkörperlumineszenz besitzt eine große Zahl technischer Anwendungen. Diese unterscheiden sich vor allem durch die Art der Anregung.

Anregung durch elektromagnetische Strahlung. Zu den bekanntesten Anwendungen zählt die Leuchtstofflampe. Diese trägt auf der Innenseite des Glaskolbens eine Leuchtstoffschicht (meist Silikate, Wolframate sowie Halogenphosphate) welche das UV-Licht ($\lambda = 253,7$ nm), das in einer Quecksilber-Niederdruckentladung entsteht, in sichtbares Licht umwandelt. Die Lichtausbeute (Gesamtlichtstrom/elektrische Leistung) liegt bei 90 lm/W gegenüber ca. 10 lm/W bei einer Glühlampe. Durch langwelliges UV-Licht, das im Sonnenlicht vorhanden ist, werden Leuchtstoffe in Waschmitteln zu blauer Lumineszenz angeregt. Diese Leuchtstoffe nennt man „Aufheller“ oder „Blankophore“.

Zinkcadmiumsulfid dient auf Durchleuchtungsschirmen zur Sichtbarmachung von Röntgenstrahlen.

Anregung durch energiereiche Teilchen. Hier ist die bekannteste Anwendung der Bildschirm einer Braunschen Röhre (z.B. einer Fernsehbiröhre), welcher durch schnelle Elektronen angeregt wird. Als Leuchtstoffe verwendet man hierfür meist Zinkcadmiumsulfide und -oxide. In der Farbbildröhre ist der blaue Leuchtstoff Zinksulfid, mit Silber aktiviert, der grüne Zinkcadmiumsulfid, mit Kupfer aktiviert, und der rote Yttriumvanadat oder Yttriumoxid, mit Europium aktiviert (vgl. Bild 7.83). Alle drei Leuchtstoffe haben Nachleuchtdauern kleiner als 10^{-4} s.

Andere Leuchtstoffe eignen sich zum Nachweis von Kernstrahlung (z.B. γ -Quanten, α -Teilchen oder β -Teilchen). Geeignet sind unter anderem mit Thallium aktiviertes Natriumjodid ($NaJ(Tl)$), Anthracen oder Zinkcadmiumsulfid.

Als radioaktive Lichtquellen verwendet man ein Gemisch aus einem Leuchtstoff und einem α - oder β -Strahler.

Elektrolumineszenz. Bettet man z.B. mit Kupfer aktivierte Zinksulfidteilchen in ein Dielektrikum (z.B. Polystyrol) ein und bringt davon eine dünne Schicht zwischen zwei Elektroden, von denen die eine durchsichtig ist (z.B. leitendes Glas), so erhält man eine sog. Elektrolumineszenzlampe. Legt man an diese eine Wechselspannung von einigen hundert Volt, so sendet sie bei Stromdichten von etwa $5 \cdot 10^{-5} \text{ A/cm}^2$ Licht mit einer Lichtausbeute von etwa 10 lm/W aus.

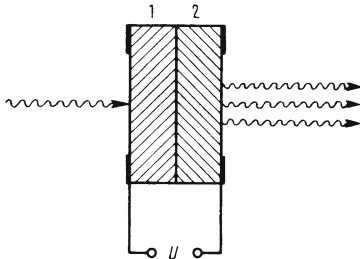


Bild 7.101 Lichtverstärker
 1 Fotoleitende Schicht
 2 Elektrolumineszenzschicht
 U Spannungsquelle

Eine besonders interessante Anwendung ist die Hintereinanderschaltung einer fotoleitenden Schicht 1 und einer Elektrolumineszenzlampe 2 (Bild 7.101). Eine solche Anordnung dient als Lichtverstärker. Wird die Fozelle nicht belichtet, so ist sie so hochohmig, dass kein Strom fließen und damit auch kein Licht entstehen kann. Beleuchtung der Fozelle ermöglicht einen Stromfluss und damit Anregung des Lumineszenzlichtes. Dieses kann etwa 50 bis 100mal intensiver als das einfallende Licht sein. Macht man einen solchen Lichtverstärker sehr großflächig, so erhält man einen sog. Bildverstärker, der z.B. in der Röntgentechnik sehr nützlich ist.

Als Elektrolumineszenz-Lichtquellen eignen sich außer der oben beschriebenen Lampe auch PN-Schichten in lumineszierenden Halbleitern, wie z.B. Galliumarsenid oder -phosphid, sog. Lumineszenz-Dioden oder PN-Schicht-Lasern. Besonders weit verbreitet sind IR-PN-Schicht-Laser durch ihren Einsatz in Compact Disk-Spielern. Hier verwendet man jedoch sehr viel größere Stromdichten von einigen Tausend A/cm^2 .

Lässt man das Licht einer Elektrolumineszenz-Lichtquelle auf eine Fozelle fallen, so kann man elektrische Signale völlig rückwirkungsfrei oder durch Glasfaserkabel über sehr große Entfernungen übertragen. Solche sog. opto-elektronische Anordnungen gewinnen immer mehr an Bedeutung.

8 Relativitätstheorie

Die Relativitätstheorie ist eines der interessantesten und meistdiskutierten Gebiete der Physik. Wie dieser Abschnitt zeigen wird, werden in ihr aus unserer Alltagserfahrung so selbstverständlich erscheinende Begriffe wie Raum, Zeit, Masse auf eine neue, umfassendere Weise erweitert, sodass wir Gelegenheit zum Staunen haben. Das Gute daran ist, dass all dieses zunächst Ungewohnte bestens experimentell gesichert ist, und dass es viele technische Anwendungen gibt: Zum Beispiel gäbe es die moderne Elektrotechnik nicht ohne die auf der sog. Lorentzkraft beruhenden Induktionserscheinungen (vgl. Abschn. 3). Wie in Abschn. 8.2.3 gezeigt wird, ist aber genau diese Lorentzkraft bemerkenswerterweise ein relativistischer Effekt, mit dem jeder bewusst oder unbewusst im Alltag zu tun hat. Jeder kennt auch die Energiegewinnung aus der Umwandlung von Materie in Energie, z.B. in Kernkraftwerken (vgl. Abschn. 6.2.4).

Auch diese ist nur mit Hilfe der Relativitätstheorie zu verstehen, in die wir jetzt behutsam einsteigen wollen.

Bei der Einführung in die Kinematik (Abschn. 1.1) stellten wir bereits fest, dass zur Beschreibung der Bewegung eines Körpers die Angabe eines „Bezugsortes“ erforderlich ist. Diese Angabe ist gleichbedeutend mit der Festlegung des Standpunktes des Beobachters, der die Bewegung beschreibt, oder des Koordinatensystems, auf das sie bezogen wird, des sog. Bezugssystems.

Bewegen sich zwei Beobachter relativ zueinander, so werden sie im Allgemeinen die Bewegung eines Körpers verschieden beschreiben. So sieht z.B. ein Reisender in einem geradlinig und gleichförmig fahrenden Zug einen Gegenstand senkrecht zu Boden fallen, während ein Beobachter auf dem Bahnsteig eine gekrümmte Bahn feststellt. Solche verschiedenen Beobachtungsergebnisse erhält man nicht nur bei Bewegungen, sondern auch bei anderen Naturvorgängen.

Die Relativitätstheorie untersucht, ob und wie sich die Gesetze für Naturvorgänge ändern, wenn diese von verschiedenen Beobachtern beschrieben werden, die sich relativ zueinander bewegen.

Im Zusammenhang damit steht die Frage, ob es vielleicht ein Koordinatensystem geben könnte, welches absolut ruht, in Bezug auf welches man also die „eigentliche“ oder „wahre“ Form der Naturgesetze angeben und durch welche Experimente man es entdecken könnte.

Im nächsten Abschnitt versuchen wir, diese Fragen auf der Grundlage der „klassischen“ oder Newtonschen Mechanik zu beantworten.

8.1 Relativität in der Newtonschen Mechanik

Wir untersuchen, wie mechanische Vorgänge von zwei gegeneinander bewegten Beobachtern beschrieben werden.

8.1.1 Zwei Beobachter bewegen sich relativ zueinander geradlinig und gleichförmig. Galileitransformation

Zur Veranschaulichung stellen wir uns vor, der eine Beobachter befindet sich im Nullpunkt 0 eines Bezugssystems S mit den Koordinaten (x, y, z) das auf der Erdoberfläche ruht (Bild 8.1). In Richtung der x -Achse denken wir uns einen langen geraden Bahndamm, auf dem mit konstanter Geschwindigkeit v in positiver x -Richtung ein Zug fährt. Am Ende des

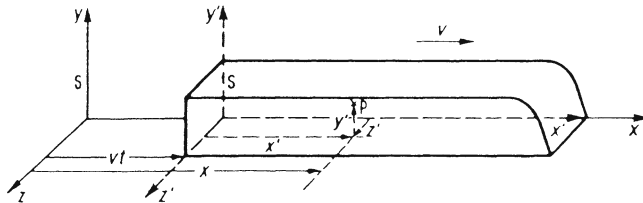


Bild 8.1 Galileitransformation

letzten Wagens sitzt der zweite Beobachter. Er beschreibt alle Vorgänge im Zug von einem Bezugssystem S' aus mit den Koordinaten (x', y', z') , das mit dem Zug mitbewegt wird. In beiden Bezugssystemen laufe die Zeit $t = t'$ in gleicher Weise ab. Der Zeitpunkt, in dem der Nullpunkt $0'$ des bewegten Systems S' gerade den Ursprung 0 des ruhenden Systems S passiert, sei $t = 0$. Dann hat $0'$ zur Zeit t in Bezug auf S die Koordinaten $x_0 = vt$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$. Ein Punkt P im Zug, der für den mitbewegten Beobachter die Koordinaten x' , y' , z' hat, erscheint dem ruhenden Beobachter zur Zeit t daher an der Stelle $x = x' + vt$. Es gilt die

Galileitransformation für räumliche Koordinaten

$$\begin{aligned} x &= x' + vt & y &= y' & z &= z' \\ x' &= x - vt \end{aligned} \quad (8.1)$$

Geht ein Reisender, der sich zur Zeit $t = 0$ am Ende des Zuges in $0'$ und damit auch in 0 befindet, mit der Geschwindigkeit u'_x bezogen auf den Zug, nach vorn, so hat er in diesem zur Zeit t die Strecke $x' = u'_x t$ zurückgelegt. Vom Bahndamm aus gemessen, befindet er sich also an der Stelle $x = x' + vt = u'_x t + vt$. In Bezug auf S bewegt er sich mit der Geschwindigkeit $u_x = x/t$. Entsprechende Überlegungen kann man für den Zusammenhang zwischen u_y und u'_y und zwischen u_z und u'_z anstellen. Es gilt also die

Galileitransformation für Geschwindigkeiten

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{x}{t} = \frac{x' + vt}{t} = u'_x + v; & u'_x &= \frac{x'}{t} = u_x - v \\ u_y &= u'_y, & u_z &= u'_z \end{aligned} \quad (8.2)$$

Ändert der Reisende seine Geschwindigkeit mit der Beschleunigung a'_x , so beobachtet der ruhende Beobachter, da $v = \text{const}$ ist, die Beschleunigung $a_x = du_x/dt = d(u'_x + v)/dt$. Es gilt die

Galileitransformation für Beschleunigungen

$$a_x = \frac{du_x}{dt} = \frac{du'_x}{dt} = a'_x; \quad a_y = a'_y; \quad a_z = a'_z \quad (8.3)$$

Interessant ist, welche Größen beiden Beobachtern unverändert erscheinen. Solche Größen nennt man Invarianten. Dazu gehört wegen $a = a'$ (Gl. (8.3)) die Beschleunigung. Das Gleiche gilt für die Länge. Denn man erhält für eine in S' gemessene Länge $l' = x'_2 - x'_1$ mit Gl. (8.1) die Beziehung

$$l' = x'_2 - x'_1 = (x_1 - vt) - (x_2 - vt) = x_1 - x_2 = l$$

Hingegen ist nach (Gl. (8.2)) die Geschwindigkeit nicht invariant.

Wir untersuchen jetzt, ob sich durch mechanische Experimente, die nur von einem Beobachter gemacht werden, der in dem zugehörigen Bezugssystem ruht, entscheiden lässt, ob sich dieses Bezugssystem geradlinig und gleichförmig bewegt oder nicht. Wir denken uns z.B. in unserem Zug alle Fenster licht- und schalldicht verschlossen. Dann kann der mitfahrende Beobachter aus der Tatsache, dass alle Gegenstände im Zug, auf die keine Kraft wirkt, relativ zu ihm in Ruhe sind, nicht schließen, dass dann auch er in Ruhe sein müsse. Denn auf Grund des ersten Newtonschen Axioms sind Ruhe und geradlinig gleichförmige Bewegung einander äquivalent. Da außerdem wegen Gl. (8.3) die Beschleunigungen nicht davon abhängen, ob sich das Bezugssystem geradlinig und gleichförmig bewegt oder ruht, bringen auch Beschleunigungsmessungen nicht die gewünschte Entscheidung. Es gilt daher:

Beim Übergang von einem Bezugssystem zu einem anderen relativ dazu geradlinig und gleichförmig bewegten Bezugssystem bleibt die Form der mechanischen Gesetze unverändert. Solche Bezugssysteme heißen auch Inertialsysteme.

Außerdem bedeuten die obigen Überlegungen:

Durch mechanische Versuche lässt sich kein absolut ruhendes Bezugssystem feststellen.

Ob das durch andere Experimente gelingt, werden wir im nächsten Abschnitt sehen.

8.2 Spezielle Relativitätstheorie

In der speziellen Relativitätstheorie, die im Jahre 1905 durch A. Einstein²⁾ begründet wurde, beschränken wir uns auf die Untersuchung von Bezugssystemen, die sich relativ zueinander geradlinig und gleichförmig bewegen, von sog. Inertialsystemen.

Da wir, wie oben gezeigt, mit mechanischen Experimenten kein absolut ruhendes Bezugssystem entdecken können, versuchen wir es mit der Untersuchung der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen. Diese erscheinen deshalb besonders geeignet, weil sie sich erfahrungsgemäß durch Zustandsänderungen des leeren Raumes ausbreiten, wo keine Wechselwirkung mit Materie stattfindet (vgl. Abschn. 5.2.5.4). Sollte vielleicht irgendwo im Weltraum ein Bezugssystem existieren, auf das man durch Messung der Ausbreitungsgeschwindigkeit von Licht- oder Radarwellen den Bewegungszustand eines beliebigen Inertialsystems beziehen könnte?

Lichtgeschwindigkeit. In Abschn. 4.3 werden Verfahren zur Messung der Lichtgeschwindigkeit beschrieben. Alle messen die Geschwindigkeit, mit der sich Lichtimpulse in Bezug auf ein durch eine bestimmte Messanordnung festgelegtes Inertialsystem bewegen. Man bestimmt mit ihnen also die Gruppengeschwindigkeit des Lichtes. Diese stimmt nur dann mit der Phasengeschwindigkeit des Lichtes überein, wenn keine Dispersion vorliegt. Letzteres ist im Vakuum der Fall und gilt mit einem relativen Fehler $\approx 10^{-8}$ in sehr guter Näherung auch für Luft. Mit modernen Messmethoden lässt sich heutzutage die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit in Bezug auf einen ruhenden Beobachter¹⁾ mit der relativen Messunsicherheit 10^{-10} bestimmen. Der ermittelte Wert stimmt sehr gut mit dem aus der Maxwellschen Theorie Folgenden überein (vgl. Abschn. 3.3.6 und 5.2.5.4).

Jetzt folgt eine wichtige Überlegung, die auf Albert Einstein zurückgeht.²⁾

Stellen wir uns vor, die Messung der Lichtgeschwindigkeit würde von einem in Bezug auf die Messanordnung ruhenden Beobachter auf irgendeinem Himmelskörper durchgeführt, auf dem so etwas möglich ist. – Wir nehmen einmal an, es gäbe solche Himmelskörper. Voraussetzung ist nur, dass die Messanordnung und der Beobachter keine Beschleunigung erfahren, sich also in einem Inertialsystem befinden. – Dann ist es nach all unserer Erfahrung nicht vorstellbar, dass dort eine „andere Physik“ als an der Stelle im Weltraum gelten sollte, an der sich zufällig unsere Erde mit ihren Laboratorien befindet. Insbesondere muss auch die Maxwellsche Theorie der Elektrodynamik gelten. Daraus folgt für die Lichtausbreitung:

In jedem Inertialsystem wird die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum in jeder Richtung gleich groß gemessen.

Das heißt aber, dass neben den mechanischen auch alle elektromagnetischen Vorgänge in jedem Inertialsystem in gleicher Weise erscheinen müssen. Wir verallgemeinern:

¹⁾ Dies ist im Allgemeinen ein Messgerät mit „nachgeschaltetem Physiker“.

²⁾ A. Einstein (1879 bis 1955), Zur Elektrodynamik bewegter Körper. Ann. d. Phys. 17 (1905).

Ein absolut ruhendes Bezugssystem ist durch keine Messung feststellbar. In allen relativ zueinander geradlinig und gleichförmig bewegten Bezugssystemen beobachtet man für alle Naturgesetze die gleiche Form.

Diese Ergebnisse sind von eminenter Bedeutung. Denn die Tatsache, dass die Lichtgeschwindigkeit in jedem Bezugssystem gleich groß gemessen wird, ist mit den Galilei-Transformationen, insbesondere mit Gl. (8.2), völlig unvereinbar. Das machen wir uns im nächsten Abschnitt an einem Beispiel klar.

Wie wir in den weiteren Abschnitten sehen, sind die aus diesen Überlegungen resultierenden Folgerungen glänzend experimentell bestätigt worden.

8.2.1 Lorentztransformation

Ein Zug, der das Bezugssystem S' trägt, fährt wie in Abschn. 8.1.1 mit konstanter Geschwindigkeit v , die gegen das mit dem Bahndamm verbundene Bezugssystem S gemessen wird (Bild 8.2). Zur Zeit $t = 0$ passiert der Nullpunkt von S' denjenigen von S (Bild 8.2a). Im selben Moment wird ein Lichtblitz erzeugt. Da in beiden Systemen die Lichtgeschwindigkeit gleich groß gemessen wird, breitet sich dasselbe Licht um beide Nullpunkte in Form je einer gleichartigen Kugelwelle aus (Bild 8.2b). Das ist ein ganz merkwürdiges Ergebnis, das unserer Anschauung widerspricht.

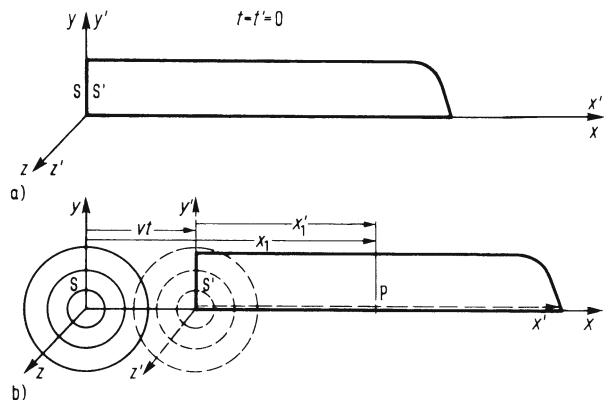


Bild 8.2 Lichtausbreitung in gegeneinander unbeschleunigt bewegten Bezugssystemen

Außerdem kann die Galilei-Transformation Gl. (8.2) nicht mehr gelten. Denn nehmen wir an, der Lichtblitz erreiche zur Zeit t den im Zug befindlichen Punkt P , so hat er in S' den Weg $x'_1 = c_0 t$, in S den Weg $x_1 = c_0 t$ zurückgelegt¹⁾. Nach Gl. (8.1) ist aber $x_1 = x'_1 + vt$. Daher müsste die Lichtgeschwindigkeit in S als

$$c_0 = x_1/t = (x'_1 + vt)/t = c_0 + v$$

gemessen werden, und die Wellenfront müsste zu gleicher Zeit an zwei verschiedenen Stellen sein. Das widerspricht aber der experimentellen Erfahrung.

¹⁾ c_0 bezeichnet die Vakuumgeschwindigkeit.

Fitzgerald, Lorentz¹⁾, Einstein und anderen gelang es, diesen Widerspruch zu lösen. Man geht aus von dem

Axiom: In allen geradlinig und gleichförmig gegeneinander bewegten Bezugssystemen ist die Vakuumlichtgeschwindigkeit gleich groß.

Dann macht man die Annahme, von S aus erschiene die Koordinate x' um einen Faktor $k < 1$ verkürzt, sodass x' durch kx' zu ersetzen sei. Man lässt außerdem die stillschweigend für selbstverständlich gehaltene Voraussetzung fallen, die Zeit laufe in gegeneinander bewegten Bezugssystemen in gleicher Weise ab. Vielmehr schreibt man jedem Bezugssystem einen eigenen Zeitablauf zu. Nehmen wir nämlich an, die Zeit t' , die der Lichtblitz in S' zum Erreichen des Punktes P benötigt, sei kleiner als die Zeit t , die er in S braucht, so ist auch mit dieser zweiten Annahme ein Ausweg aus dem oben geschilderten Widerspruch denkbar.

In der Tat ergeben beide Annahmen zusammen Transformationsformeln, welche mit der experimentellen Erfahrung in Einklang stehen. Wir machen daher den Ansatz

$$x = kx' + vt' \quad (8.4)$$

Für einen Beobachter im Zug bewegt sich das System S mit der Geschwindigkeit $-v$ nach links. Für ihn erscheinen alle Koordinaten x um den Faktor k verkürzt, also kx . Da beide Systeme gleichberechtigt sind, gilt für S' eine zu Gl. (8.4) analoge Formel, in der natürlich als Relativgeschwindigkeit $-v$ einzusetzen ist:

$$x' = kx - vt' \quad (8.5)$$

k und v müssen in Gl. (8.4) den gleichen Wert haben wie in Gl. (8.5). Sonst wären beide Systeme nicht gleichberechtigt. Aus Gl. (8.4) und (8.5) kann man jetzt den „Kontraktionsfaktor“ k und den Zusammenhang zwischen t' und t errechnen. Dabei gilt gemäß dem obigen Beispiel und dem Axiom über die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit für die Ausbreitung des Lichtblitzes in den beiden Koordinatensystemen S und S' : $x = c_0 t$ und $x' = c_0 t'$. Gl. (8.4) und (8.5) werden dann zu $c_0 t = kc_0 t' + vt'$ und $c_0 t' = kc_0 t - vt'$ oder $t(c_0 - v) = kc_0 t'$ und $t'(c_0 + v) = kc_0 t$. Durch Multiplizieren der beiden letzten Gleichungen erhält man

$$k = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}} \quad (8.6)$$

Dieser Faktor ist nur für $v \leq c_0$ reell. Daraus schließen wir, dass nur Geschwindigkeiten realisierbar sind, die kleiner oder höchstens gleich der Lichtgeschwindigkeit sind.

Durch Eliminieren von x aus Gl. (8.4) und von x' aus Gl. (8.5) erhält man jetzt für die Zeiten

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c_0^2} x'}{k} \quad \text{und} \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c_0^2} x}{k}$$

¹⁾ George F. Fitzgerald (1851 bis 1901), Hendrix A. Lorentz (1853 bis 1928).

Die Koordinaten y und z werden nicht geändert, weil wir von einer Relativbewegung in x -Richtung ausgegangen sind. Wir können daher zusammenfassen:

Ein Bezugssystem S' mit den Koordinaten x', y', z' , in dem die Zeit t' gemessen wird, bewegt sich geradlinig und gleichförmig mit der Geschwindigkeit v längs der x -Achse eines Bezugssystems S mit den Koordinaten x, y, z , in dem die Zeit t gemessen wird. Dann findet ein Ereignis, das ein in S' ruhender Beobachter am Ort x', y', z' zur Zeit t' misst, für einen in S ruhenden Beobachter an der Stelle x, y, z zur Zeit t statt. Es gilt die Lorentztransformation

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}} \quad y = y' \quad z = z' \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c_0^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}} \quad (8.7)$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}} \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c_0^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}} \quad (8.8)$$

t und t' sind die Zeitkoordinaten der Systeme S und S' .

Für den sehr häufig vorkommenden Fall, dass v sehr viel kleiner als c_0 ist, gehen die Formeln der Lorentztransformation (Gl. (8.7) und (8.8)) in die der Galileitransformation (Gl. (8.1)) über. Die Letzteren sind daher als der Grenzfall der allgemein gültigen Lorentz-Formeln für den Fall $v \ll c_0$ anzusehen.

Konsequenzen der Lorentztransformation

Begriff der Gleichzeitigkeit. Zeitdehnung. Aus den Transformationsformeln (8.7) und (8.8) ergibt sich, dass der Zeitablauf in gegeneinander bewegten Bezugssystemen verschieden ist. Einstein erkannte, dass dieser Teil der Lorentztransformation mehr als ein formaler mathematischer Kunstgriff ist, dass sich vielmehr hier ein grundsätzlicher Wesenszug des Zeitbegriffs eröffnet. Es gibt keine absolut gültige Zeitmessung! Das ist zweifellos ein erstaunliches Ergebnis, an das wir unsere Anschauung erst gewöhnen müssen.

Die Aussage „zwei Ereignisse finden gleichzeitig statt“, erscheint uns ohne weiteres verständlich und sinnvoll. Für den Physiker hat diese Aussage jedoch erst dann einen Sinn, wenn er für den Tatbestand der Gleichzeitigkeit eine eindeutige Messvorschrift angeben kann.

Damit ein Beobachter ein Ereignis wahrnehmen kann, muss er von ihm irgendein Signal (z.B. Knall, Lichtblitz, elektrischer Impuls) empfangen. Die schnellsten bekannten Signale sind Lichtblitze und Radarimpulse. Sie breiten sich mit Lichtgeschwindigkeit aus. Offenbar ist dann die folgende Definition der Gleichzeitigkeit sinnvoll:

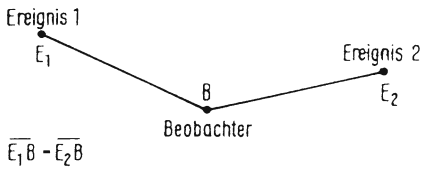


Bild 8.3 Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse

Definition: Zwei Ereignisse finden dann gleichzeitig statt, wenn zwei Lichtimpulse, die von ihnen ausgelöst werden, sich am Ort eines Beobachters, der von den Orten der Ereignisse gleich weit entfernt ist, treffen. Dabei ist vorausgesetzt, dass beide Lichtimpulse sich in dem gleichen homogenen Medium fortpflanzen (Bild 8.3).

Bei dieser Definition ist bewusst auf die Benutzung von Uhren verzichtet. Denn da man von zwei voneinander entfernten Uhren nicht ohne weiteres voraussetzen kann, dass sie stets die gleiche Zeit anzeigen, muss ein Beobachter sie mit Hilfe von Lichtsignalen einregulieren. Dazu benötigt er aber wieder die obige Definition. Wir wollen jetzt untersuchen, wie es mit der Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse in gegeneinander bewegten Bezugssystemen steht. Wir stellen uns wieder den schon oben benutzten Zug mit dem System S' vor, der mit konstanter Geschwindigkeit v in der x -Richtung des mit dem Bahndamm verbundenen Systems S fährt (Bild 8.4). Zur Zeit $t = t' = 0$ passiert der Beobachter B' , der in der Zugmitte sitzt, den Beobachter B am Bahndamm. An den Stellen P_1 und P_2 mit x_1 bzw. x'_1 und x_2 bzw. x'_2 , die von B' bzw. B gleich weit entfernt sind, schlagen zwei Blitze ein (Bild 8.4a). Wir nehmen jetzt an, die von den Blitzen erzeugten Lichtsignale treffen sich beim Beobachter B . Dann erfolgt für ihn gemäß der obigen Definition der Einschlag beider Blitze gleichzeitig. Da während der Laufzeit der Lichtsignale der Beobachter B' jedoch vorgerückt ist, passiert ihn der von x'_2 kommende Lichtblitz eher als der von x'_1 kommende. B' sieht demnach die beiden Einschläge nacheinander. Umgekehrt können die Blitze aber auch so eingeschlagen haben, dass sie von B' aus als gleichzeitig erscheinen. Dann empfängt der Beobachter B den von x_1 kommenden Lichtimpuls eher als den von x_2 (vgl. hierzu Bild 8.4b).

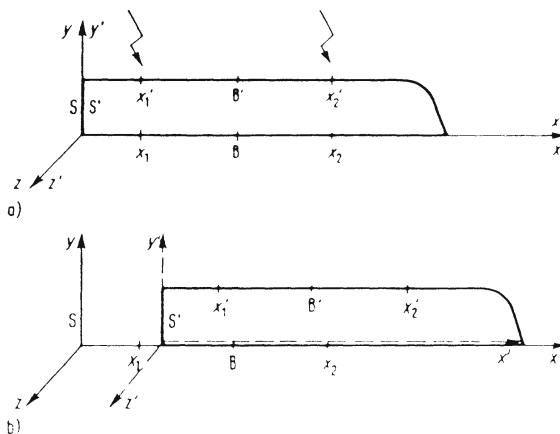


Bild 8.4 Gleichzeitigkeit in gegeneinander unbeschleunigt bewegten Bezugssystemen

Wir sehen also:

Zwei Ereignisse, die von einem Beobachter aus als gleichzeitig erscheinen, werden von einem gegen ihn bewegten Beobachter aus als nicht gleichzeitig gemessen.

Man mache sich klar, dass dieser Effekt deswegen möglich ist, weil die Lichtgeschwindigkeit in jedem Bezugssystem gleich groß gemessen wird.

Mit Hilfe der Lorentztransformation können wir dieses Ergebnis quantitativ erfassen. Im System S' (im Zug) möge ein Ereignis E_1 zur Zeit t'_1 an der Stelle x'_1 stattfinden sowie ein zweites E_2 zur Zeit t'_2 an der Stelle x'_2 . Dann verstreicht für den Beobachter B im System S zwischen den beiden Ereignissen nach Gl. (8.7) das Zeitintervall

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 + \frac{v}{c_0^2} x'_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}} - \frac{t'_1 + \frac{v}{c_0^2} x'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}} \quad (8.9)$$

Wir diskutieren einige Spezialfälle von Gl. (8.9):

1. B' sieht die Ereignisse gleichzeitig. Dann ist $t'_2 = t'_1$ und es wird

$$t_2 - t_1 = \frac{v}{c_0 \sqrt{c_0^2 - v^2}} (x'_2 - x'_1) \quad (8.10)$$

Nur wenn die Ereignisse in S' am gleichen Ort beobachtet werden ($x_2 = x_1$), sieht auch der Beobachter in S die Ereignisse gleichzeitig ($t_2 - t_1 = 0$). Sonst ist $t_2 - t_1 \neq 0$. Welches der beiden Ereignisse der Beobachter in S früher sieht, hängt nach Gl. (8.10) davon ab, ob $x'_1 > x'_2$ oder $x'_1 < x'_2$ ist.

2. Zwei Ereignisse ereignen sich im System S' am gleichen Ort ($x'_2 = x'_1$) zu verschiedenen Zeiten t'_2 und t'_1 . Dann misst der Beobachter im System S die Zeitdifferenz

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}} > (t'_2 - t'_1) \quad (8.11)$$

Umgekehrt ergibt sich durch die gleiche Rechnung mit Hilfe von Gl. (8.8):

Für zwei Ereignisse, die sich im System S am gleichen Ort ($x_2 = x_1$) zu verschiedenen Zeiten t_2 und t_1 ereignen, misst der Beobachter im System S' die Zeitdifferenz

$$t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}} > (t_2 - t_1) \quad (8.12)$$

Es gilt daher allgemein:

Nimmt man willkürlich an, eines von zwei relativ zueinander geradlinig und gleichförmig bewegten Bezugssystemen sei in Ruhe, so geht eine Uhr in dem bewegten System langsamer als die Uhren des ruhenden Systems. Welches System dabei als ruhend betrachtet wird, ist gleichgültig. In jedem Falle wird ein Zeitabschnitt $\Delta\tau$ des bewegten Systems vom ruhenden Beobachter aus als

$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}} > \Delta\tau$$

gemessen. Dieser Effekt heißt „Zeitdehnung“.

Die Zeitdehnung ist experimentell gesichert: Bei der Höhenstrahlung entstehen Myonen (s. Abschn. 6.2.3.2) in etwa 30 km Höhe. In Laboratoriumversuchen bestimmt man ihre Lebensdauer zu etwa $2 \cdot 10^{-6}$ s. Da sie sich höchstens mit der Lichtgeschwindigkeit $c_0 = 3 \cdot 10^8$ m/s bewegen können, sollten sie im Mittel nach einem Weg von höchstens 600 Metern zerfallen sein. In Wirklichkeit erreichen sie jedoch die Erdoberfläche, weil sie sich fast mit Lichtgeschwindigkeit bewegen und deshalb ihre Lebensdauer von der Erde aus stark gedehnt erscheint.

Etwas Ähnliches würden Raumfahrer erfahren, die sich fast mit Lichtgeschwindigkeit durch den Welt- raum bewegen. Nach ihrer Rückkehr auf die Erde müssten die Erdbewohner viel stärker gealtert sein als sie selbst. Dagegen kann man mit Recht einwenden, dass man auch die Rakete als ruhend, die Erde als bewegt ansehen kann. Dabei wird aber nicht berücksichtigt, dass beide Systeme nur gleichberechtigt sind, solange die Relativgeschwindigkeit konstant ist. Die Rakete wird jedoch im Gegensatz zur Erde bei Start, Umkehr und Landung unter Energieaufwand beschleunigt. Daher ist das mit der Rakete verbundene System kein Inertialsystem, sodass die Formeln der speziellen Relativitätstheorie nicht angewandt werden können. Eine Begründung der tatsächlich auch in diesem Fall vorhandenen Zeitdehnung gibt die sog. „allgemeine“ Relativitätstheorie. Diese geht jedoch über den Rahmen dieses Buches hinaus.

Längenkontraktion. Ein Beobachter am Bahndamm möchte mit einem dort ruhenden Maßstab die Länge eines Wagens des vorbeifahrenden Zuges messen. Dabei muss er unbedingt die Lagen der Vorder- und Hinterkante des Wagens auf seinem Maßstab gleichzeitig ablesen, wie ohne weiteres einleuchtet. – „Gleichzeitig“ bezieht sich dabei auf das System S des Beobachters. – Dann misst er nach Gl. (8.4) und (8.6) die Länge

$$\begin{aligned} l &= x_2 - x_1 = x'_2 \sqrt{1 - v^2/c_0^2} + vt - \left(x'_1 \sqrt{1 - v^2/c_0^2} + vt \right) \\ &= (x'_2 - x'_1) \sqrt{1 - v^2/c_0^2} \\ l &= l' \sqrt{1 - v^2/c_0^2} \end{aligned} \quad (8.13)$$

Dabei ist l' die sog. „Ruhelänge“, nämlich die Länge des Gegenstandes, die ein relativ zu ihm ruhender Beobachter in seinem System gleichzeitig misst.

Umgekehrt misst auch ein Beobachter im Zug eine Strecke $l = x_2 - x_1$ auf dem Bahndamm (z. B. zwischen zwei Oberleitungsmasten) nach Gl. (8.5) und (8.6) als

$$l' = x'_2 - x'_1 = \sqrt{1 - v^2/c_0^2} x_2 - vt' - \left(\sqrt{1 - v^2/c_0^2} x_1 - vt' \right) = l \sqrt{1 - v^2/c_0^2}$$

Hingegen werden wegen $y = y'$ und $z = z'$ Strecken senkrecht zur Bewegungsrichtung unverändert gemessen. Es gilt daher allgemein:

Die in der Bewegungsrichtung liegenden Abmessungen eines Körpers, der relativ zu einem Beobachter die Geschwindigkeit v hat, werden von diesem um den Faktor $\sqrt{1 - v^2/c_0^2}$ verkürzt gemessen. Strecken senkrecht zur Bewegungsrichtung erscheinen unverändert.

Relativistische Addition von Geschwindigkeiten. Im System S' im Zug startet zur Zeit $t' = t = 0$, wenn also der Nullpunkt O' gerade den Nullpunkt O des Systems S auf dem Bahndamm passiert, ein Reisender mit der Geschwindigkeit u'_x in Richtung der x' -Achse. Dann befindet er sich zur Zeit t' im Zug an der Stelle $x' = u'_x t'$. Bezüglich des Bahndammes ist er dann an der Stelle

$$x = \frac{u'_x + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}} = \frac{u'_x + v}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}} t'$$

(vgl. Gl. (8.8)). Dabei ist im System S die Zeit

$$t = \frac{t' + v u'_x t'/c_0^2}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}} = \frac{1 + v u'_x/c_0^2}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}} t'$$

verstrichen. In ihm hat der Reisende also die Geschwindigkeit

$$u_x = \frac{x}{t} = \frac{u'_x + v}{1 + u'_x v/c_0^2} \quad (8.14)$$

Die Geschwindigkeit u_x ist also nicht einfach gleich $u'_x + v$, sondern kleiner. Wenn ein Körper jedoch viel langsamer als das Licht ist, also $u'_x v \ll c_0^2$, geht Gl. (8.14) in die Galilei-Transformation Gl. (8.2) über.

Wir nehmen jetzt an, der Reisende bewege sich mit Lichtgeschwindigkeit, also $u'_x = c_0$.

Dann wird $u_x = \frac{c_0 + v}{1 + c_0 v/c_0^2} = c_0$, also auch nur Lichtgeschwindigkeit. Es gilt:

Ein Körper kann gegenüber einem Inertialsystem keine größere Geschwindigkeit als die Vakuumlichtgeschwindigkeit haben.¹⁾

Damit ist auch der eingangs auf S. 652 aufgetretene Widerspruch bei der Ausbreitung des Lichtblitzes in beiden Systemen beseitigt.

In gleicher Weise wie oben kommt man jetzt auch zu der Beziehung

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x v/c_0^2} \quad (8.15)$$

¹⁾ Dieses theoretische Ergebnis steht in bester Übereinstimmung mit der Tatsache, dass die Elementarteilchen in den großen Beschleunigern (s. Abschn. 6.2.3.3) zwar sehr nahe an die Vakuumlichtgeschwindigkeit herankommen, diese aber nicht erreichen. Ihre gewaltige Energiezunahme erfolgt praktisch nur noch durch Massenzuwachs (s. Abschn. 8.2.2).

Interessant ist, dass auch eine Geschwindigkeit senkrecht zur Relativgeschwindigkeit \vec{v} von beiden Systemen aus verschieden gemessen wird. Zwar ist $y = y'$ und $z = z'$: aber die Zeiten laufen in S und S' verschieden schnell ab. Daher ergibt sich mit $x'/t' = u'_x$; und $x/t = u_x$:

$$\begin{aligned} u_y &= u'_y \frac{1 - u_x v / c_0^2}{\sqrt{1 - v^2 / c_0^2}} = u'_y \frac{\sqrt{1 - v^2 / c_0^2}}{1 + u'_x v / c_0^2} \\ u_z &= u'_z \frac{1 - u_x v / c_0^2}{\sqrt{1 - v^2 / c_0^2}} = u'_z \frac{\sqrt{1 - v^2 / c_0^2}}{1 + u'_x v / c_0^2} \end{aligned} \quad (8.16)$$

Auch die Gl. (8.16) gehen für $u_x \ll c_0$ und $v \ll c_0$ in die einfachen Beziehungen $u_y = u'_y$; und $u_z = u'_z$; über.

Aufgaben zu Abschn. 8.2.1

1. Die Antenne eines mit halber Vakuumlichtgeschwindigkeit von der Erde wegfliegenden Raumschiffes sendet alle 0,1 Sekunden Radarimpulse aus.

Mit welcher Zeitdifferenz empfängt man diese auf der Erde?

2. Man zeige, dass ein Körper, der in Bezug auf S die Geschwindigkeit u_x hat, in Bezug auf S' die Geschwindigkeit $u'_x = (u_x - v) / (1 - u_x v / c_0^2)$ hat.

3. Welchen relativen Fehler macht man, wenn man die Geschwindigkeiten $u_x = 30$ km/s und $v = 300$ km/s nicht relativistisch addiert?

8.2.2 Relativistische Dynamik

Aus dem vorigen Abschnitt geht hervor, dass kein Körper schneller als das Licht werden kann. Dieses Ergebnis ist aber auf dem Boden der Newtonschen Mechanik nicht verständlich. Denn danach müsste man einen Körper nur genügend lange einer konstanten Kraft aussetzen, um ihm dauernd eine konstante Beschleunigung zu erteilen, die schließlich zu einer beliebig hohen Geschwindigkeit führen müsste.

So einfach ist die Sache aber nicht. Es stellt sich nämlich heraus, dass eine Beschleunigung, die ein Körper im System S' erfährt, vom System S aus gemessen nicht mehr den gleichen Betrag hat, dass dieser vielmehr selbst von der Geschwindigkeit abhängt. Im Gegensatz zur Galileitransformation gilt daher:

Beschleunigungen werden von gegeneinander geradlinig und gleichförmig bewegten Beobachtern verschieden gemessen. Sie sind gegen die Lorentztransformation nicht invariant.

Zur Erklärung betrachten wir den besonders übersichtlichen Fall, dass ein Körper, der zunächst im System S' ruht, in x-Richtung die Beschleunigung $a'_x = du'_x/dt'$ erfährt.

Dann gilt nach Gl. (8.14)

$$\frac{du_x}{du'_x} = \frac{1 - v^2 / c_0^2}{\left(1 + \frac{u'_x v}{c_0^2}\right)^2}$$

und mit Gl. (8.7)

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{1 + (dx'/dt')v/c_0^2}{\sqrt{1-v^2/c_0^2}} = \frac{1 + u'_x v/c_0^2}{\sqrt{1-v^2/c_0^2}}$$

Damit erhält man

$$a_x = \frac{du_x}{dt} = \frac{du'_x}{dt'} \frac{(1-v^2/c_0^2)^{3/2}}{(1+u'_x v/c_0^2)^3}$$

Nun ist für $t' = 0$ voraussetzungsgemäß $u'_x = 0$. Damit ergibt sich

$$a_x = a'_x (1-v^2/c_0^2)^{3/2} \quad (8.17)$$

wenn zur Zeit $t' = 0$ $u'_x = u'_y = u'_z = 0$ ist.

Genauso ergibt sich mit Gl. (8.16) und (8.8)

$$a_y = a'_y (1-v^2/c_0^2); \quad a_z = a'_z (1-v^2/c_0^2) \quad (8.18)$$

wenn zur Zeit $t' = 0$ $u'_x = u'_y = u'_z = 0$ ist.

Aus diesen Beziehungen ergibt sich zweierlei:

1. Da $a_x/a'_x \neq a_y/a'_y = a_z/a'_z$, hat die resultierende Beschleunigung \vec{a} nicht die gleiche Richtung wie \vec{a}' .
2. Die vom System S aus gemessenen Beschleunigungen hängen jeweils von der konstanten Geschwindigkeit v des Systems S' und damit des Körpers ab. (Dieser ruht ja zunächst in S'.) Sie werden bei gleichen Beschleunigungen a' umso kleiner gemessen, je größer jeweils die konstante Geschwindigkeit v des Systems S' ist, und unterscheiden sich um so weniger von Null, je dichter v an der Vakuumlichtgeschwindigkeit c_0 liegt. Dafür kann es zwei verschiedene Ursachen geben. Entweder ist bei einer größeren konstanten Geschwindigkeit die beschleunigende Kraft kleiner oder die träge Masse größer. Aus Gründen, die in Abschn. 8.2.3 erläutert werden, entscheiden wir uns für die zweite Ursache.

Impuls. Ein Körper, der im System S' ruht, habe dort die sog. „Ruhemasse“ $m' = m_0$. Dann machen wir in Analogie zur Transformation von Zeitabschnitten und Längen (s. Abschn. 8.2.1) den Ansatz:

Ein Körper, der sich mit der Geschwindigkeit v gegenüber einem Bezugssystem S bewegt, besitzt in Bezug auf dieses die träge Masse

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c_0^2}} \quad (8.19)$$

und den Impuls

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c_0^2}} \quad (8.20)$$

Dabei ist m_0 die sog. Ruhemasse.

Aus Gl. (8.20) können wir die vom System S aus gemessene Kraft ausrechnen. Dazu übernehmen wir aus Abschn. 1.3.4.4 die Beziehung $\vec{F} = d\vec{p}/dt$. Damit erhalten wir als Ausdruck für die

relativistische Kraft

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} \frac{(m_0 \vec{v})}{\sqrt{1-v^2/c_0^2}} \quad (8.21)$$

Wie man leicht durch Differenzieren zeigt, ergibt sich für die Kraft in x -Richtung, F_x , da hier $v = u_x$ ist,

$$F_x = \frac{m_0 a_x}{(1-v^2/c_0^2)^{3/2}} \quad (8.22)$$

Berücksichtigt man, dass eine Beschleunigungskomponente senkrecht zur Bewegungsrichtung den Betrag von \vec{v} praktisch nicht ändert, so bleibt auch $\sqrt{1-v^2/c_0^2}$ praktisch konstant, und es ist $dv = du_y$ bzw. $dv = du_z$. Man erhält dann

$$F_y = \frac{m_0 a_y}{\sqrt{1-v^2/c_0^2}}; \quad F_z = \frac{m_0 a_z}{\sqrt{1-v^2/c_0^2}} \quad (8.23)$$

Die in S resultierende Kraft hat also nicht die Richtung der in S resultierenden Beschleunigung. Vergleicht man Gl. (8.22) mit Gl. (8.17) und Gl. (8.23) mit Gl. (8.18), so fällt auf, dass $F_x/(m_0 a'_x) = 1$, aber $F_y/(m_0 a'_y) = F_z/(m_0 a'_z) = \sqrt{1-v^2/c_0^2}$ ist. Nennen wir die auf den Körper im System S' wirkende Kraft F'_x so gilt:

Die in der Bewegungsrichtung liegende Kraftkomponente bleibt erhalten.

$$F_x = F'_x$$

Wie wir bei der Behandlung der Elektrodynamik (Abschn. 8.2.3) sehen werden, ist dieses Ergebnis eine schöne Bestätigung des Ansatzes von Gl. (8.20).

Energie. Wir betrachten einen Körper, der im System S in x -Richtung aus der Ruhe ($u_x = 0$) auf die Geschwindigkeit $u_x = u$ beschleunigt wird. Längs des Weges dx erfährt er dabei den Energiezuwachs

$$dW = F_x dx = \frac{m_0}{(1-u_x^2/c_0^2)^{3/2}} \frac{du}{dt} dx = \frac{m_0}{(1-u_x^2/c_0^2)^{3/2}} u_x du_x$$

Beim Beschleunigen von $u_x = 0$ bis $u_x = u$ erhält er dabei die Energie

$$W = \int_0^u \frac{m_0 u_x}{(1-u_x^2/c_0^2)^{3/2}} du_x = \left[\frac{m_0 c_0^2}{\sqrt{1-u_x^2/c_0^2}} \right]_0^u$$

oder

$$W = \left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c_0^2}} - m_0 \right) c_0^2 = \Delta m c_0^2 \quad (8.24)$$

Δm ist dabei die Differenz zwischen der trägen Masse des Körpers, die er nach Gl. (8.19) hat, wenn er sich mit der Geschwindigkeit u bewegt, und derjenigen im Ruhezustand. Sie heißt „relativistische Massenzunahme“. Daher gilt:

Die an einem Körper verrichtete Beschleunigungsarbeit ist gleich dem Produkt aus seiner relativistischen Massenzunahme und dem Quadrat der Lichtgeschwindigkeit.

Jede Änderung der Bewegungsenergie eines Körpers ist also mit einer Massenänderung verbunden. Schreibt man Gl. (8.24) in der Form

$$W = m c_0^2 - m_0 c_0^2 \quad (8.25)$$

so kann man diese auf folgende Weise deuten: $m c_0^2$ ist die Energie des Körpers mit der Masse m , die er in der Bewegung hat, $m_0 c_0^2$ diejenige des ruhenden Körpers. Man kann daher auch diesem bereits einen Energiegehalt zuschreiben:

$m_0 c_0^2$ ist die Ruheenergie des Körpers mit der Masse m_0 .

Einstein verallgemeinerte die obigen Ergebnisse, die wir hier für die Bewegungsenergie gewonnen haben, auf alle Energieformen zu dem sog. Prinzip der

Äquivalenz von Masse und Energie: Jeder Körper mit der Masse m besitzt die Energie $W = m c_0^2$. Jeder Energie W kommt die träge Masse

$$m = W/c_0^2 \quad (8.26)$$

zu.

In der Kernphysik finden sich viele Beispiele für die Umwandlung von Energie in Masse und umgekehrt. Man denke z.B. an die Paarbildung und Zerstrahlung von Positronen und Elektronen (s. Abschn. 6.2.1.1) und die Energie-Massen-Bilanz bei Kernreaktionen (s. Abschn. 6.2.3.2).

Es sei noch angemerkt, dass Gl. (8.24) für kleine Geschwindigkeiten u in die aus der Newtonschen Dynamik vertraute Gleichung $W = (1/2) m_0 u^2$ übergeht. Entwickelt man nämlich die Wurzel in eine Reihe, so folgt

$$W = m_0 c_0^2 \left[1 + (1/2)(u^2/c_0^2) + (3/8)(u^4/c_0^4) + \dots \right] - m_0 c_0^2 \approx (1/2) m_0 u^2$$

für $u \ll c_0$.

Aufgaben zu Abschn. 8.2.2

1. Um wie viel Prozent wächst die Masse eines Satelliten, der aus der Ruhe auf die Geschwindigkeit 10 800 km/h beschleunigt wird?
2. Ein Körper mit der Ruhemasse 1 t wird von der Erdoberfläche a) in 10 km Höhe, b) unendlich weit weg gehoben.
Um wie viel nimmt dabei jeweils die Masse des Systems Erde–Körper zu?
3. Welche Massenzunahme erfährt ein Eisenkörper mit der Masse 1 t beim Erhitzen von 0 °C auf 1200 °C ($c_{\text{Fe}} = 460 \text{ J}/(\text{kg K})$)?
4. Man zeichne das Verhältnis der Masse eines bewegten Körpers zu seiner Ruhemasse als Funktion der Geschwindigkeit.
5. Wie viel Prozent der Lichtgeschwindigkeit erreichen a) Elektronen, b) Protonen, die die Spannung $U = 3 \cdot 10^6 \text{ V}$ durchlaufen haben?
6. Im System S' , das mit der konstanten Geschwindigkeit v gegenüber dem System S bewegt wird, erfährt ein Körper durch die Kraft \vec{F}' die Beschleunigung \vec{a}' . \vec{F}' und \vec{a}' haben dieselbe Richtung. Für die Komponenten gilt $a'_z = 0$ und $a'_x = a'_y$. Ein Beobachter im System S , gegen welches das System S' sich mit der Geschwindigkeit v in x -Richtung bewegt, stellt fest, dass die Kraft \vec{F} und die Beschleunigung \vec{a} nicht dieselbe Richtung haben. Welchen Winkel misst er zwischen \vec{F} und \vec{a} ?

8.2.3 Relativistische Effekte in der Elektrodynamik

Die Grundlage der speziellen Relativitätstheorie ist das Axiom, dass in geradlinig und gleichförmig gegeneinander bewegten Bezugssystemen die Lichtgeschwindigkeit c_0 immer den gleichen Betrag hat (vgl. Abschn. 8.2.1). Die Lichtgeschwindigkeit ist aber auch die Ausbreitungsgeschwindigkeit elektrischer und magnetischer Felder (vgl. Abschn. 5.2.5.4). Weiterhin gilt mit der Influenzkonstanten ϵ_0 und der Induktionskonstanten μ_0 der Zusammenhang $c_0 = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ (s. Abschn. 5.2.5.4). Deshalb ist auch das Produkt dieser beiden Konstanten vom Bezugssystem unabhängig. Ferner sind Versuche gemacht worden, um die Abhängigkeit elektrischer Erscheinungen von der Bewegung eines Bezugssystems zu entdecken. Dabei findet man z.B. die Kapazität eines Plattenkondensators bei einem relativen Messfehler $< 10^{-9}$ immer gleich groß, unabhängig von seiner Stellung in Bezug auf die Erdbahn. Daher ist auch ϵ_0 und damit auch μ_0 für sich unabhängig vom Bezugssystem.

Es gilt außerdem ein wichtiger Erhaltungssatz: Da nämlich die elektrische Ladung gequantelt ist, die Ladung eines Elektrons also von keinem Bezugssystem aus kleiner als von einem anderen gemessen werden kann (s. Abschn. 3.1.4.1 und 3.1.2.8), und da die Zahl der Ladungsträger sich bei der Bewegung nicht ändert, gilt

Der Betrag der elektrischen Ladung wird in geradlinig und gleichförmig gegeneinander bewegten Bezugssystemen gleich groß gemessen.

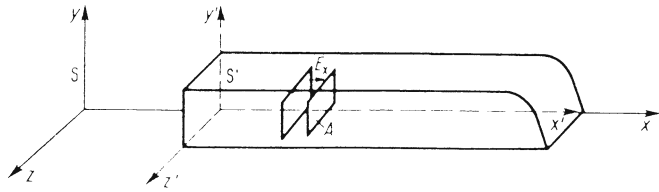
Eine von diesen Tatsachen ausgehende theoretische Untersuchung zeigt:

Relativ zueinander geradlinig und gleichförmig bewegten Beobachtern erscheinen die Gesetze der Elektrodynamik in gleicher Form.

Lorentztransformation für elektrische und magnetische Felder

Bekanntlich hängen die elektrische Feldstärke und die magnetische Erregung vom Ort und im nicht-stationären Fall auch von der Zeit ab (s. z.B. Abschn. 5.2.5.4). Da Ort und Zeit ihrerseits jedoch in verschiedenen Bezugssystemen verschieden gemessen werden, ist es

Bild 8.5 x -Komponente der elektrischen Feldstärke in gegenüber unbeschleunigt bewegten Bezugssystemen



plausibel, dass dies auch für die Felder gilt. Wir benötigen daher auch für sie geeignete Transformationsformeln.

Wir betrachten hier zunächst nur einen wichtigen Spezialfall. Im System S' ruht ein Plattenkondensator, dessen Platten parallel zur y - z -Ebene liegen. Das elektrische Feld E'_x zwischen den Platten hat also die Richtung der x' - bzw. der x -Achse (Bild 8.5).

Wir interessieren uns jetzt für den Zusammenhang zwischen E'_x und dem von S aus gemessenen Feld E_x . Er ergibt sich durch folgende Überlegung:

Die Ladung Q auf den Platten erscheint von S und S' aus gleich groß: $Q = Q'$ (s. oben) ebenso die Plattenflächen $A = A'$, denn Abmessungen in z - und y -Richtung werden ja nicht verändert. Also ist auch die von S aus gemessene Flächenladungsdichte

$$D_x = Q/A = Q'/A' = D'_x$$

Da die elektrische Feldstärke $E = D/\epsilon_0$ und ϵ_0 unabhängig vom Bezugssystem (s. oben) ist, gilt daher:

Die Komponente der elektrischen Feldstärke in Bewegungsrichtung wird in allen unbeschleunigten Bezugssystemen gleich groß gemessen.

$$E_x = E'_x \quad (8.27)$$

Damit ergibt sich aber auch die Kraft auf eine Ladung Q zu $F_x = QE_x = Q'E'_x = F'_x$. Es gilt also:

Man misst die Komponente der Kraft in Bewegungsrichtung in allen unbeschleunigten Bezugssystemen gleich groß.

$$F_x = F'_x \quad (8.28)$$

Das ist eine wichtige Bestätigung unseres Ansatzes zur Geschwindigkeitsabhängigkeit der Masse in Abschn. 8.8.2. Eine analoge Überlegung kann man auch für die magnetische Erregung H_x anstellen. Auch für sie ergibt sich

$$H_x = H'_x \quad (8.29)$$

Für die anderen Komponenten der Felder ergeben sich etwas kompliziertere Zusammenhänge, von denen wir nur einen besonders interessanten herleiten wollen:

Die Lorentzkraft

Für die gesamte Elektrotechnik spielt die magnetische Kraftwirkung auf bewegte Ladungen, wie sie durch die Lorentzkraft beschrieben wird, eine besonders wichtige Rolle. Man vergleiche z. B. Abschn. 3.3.3 und 3.3.4. Sehr interessant ist nun, dass diese Kraft sich als

relativistischer Effekt herausgestellt hat, der allein auf der Tatsache beruht, dass die miteinander wechselwirkenden Ladungsträger nicht in Ruhe sind, sondern sich bewegen. Dies wollen wir uns im Folgenden klarmachen.

Als Beispiel betrachten wir die Kräfte, die zwei gleiche Elektronenstrahlen, die sich im Vakuum im Abstand r nebeneinander her bewegen (z.B. in einer Zweistrahl-Oszilloskop-röhre), pro Länge l auf einander ausüben (Bild 8.6).

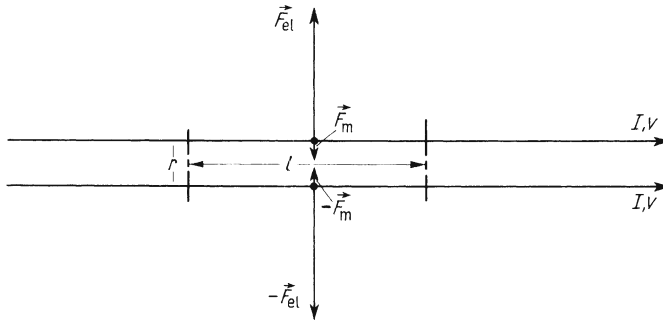


Bild 8.6 Kräfte auf zwei gleiche parallele Elektronenstrahlen

Wir berechnen sie zum späteren Vergleich zunächst „klassisch“, d.h. ohne Zuhilfenahme der Relativitätstheorie, mit den aus Abschn. 3.1.2 und 3.3.3 bekannten Formeln.

Zum einen bildet jeder Elektronenstrahl eine „Linienladung“ mit der Linienladungsdichte Q/l . Nach Gl. (3.21) ist die elektrische Feldstärke im Abstand r von einer solchen Linienladung $E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r l}$; also ist die elektrostatische Abstoßungskraft auf ein gleich langes Stück des zweiten Elektronenstrahls mit der gleichen Ladung Q

$$F_{\text{el}} = -QE = -\frac{Q^2}{2\pi\epsilon_0 r l}$$

Zum anderen führt jeder Elektronenstrahl den elektrischen Strom $I = Qv/l$. Also wirkt zwischen beiden Strahlen gemäß Gl. (3.78) die magnetische Anziehungskraft

$$F_{\text{m}} = \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi r} = I l B = QvB$$

Damit ist die

Gesamtkraft

$$F = F_{\text{el}} + F_{\text{m}} = -\frac{Q^2}{2\pi\epsilon_0 r l} + \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi r} \quad (\text{Bild 8.7})$$

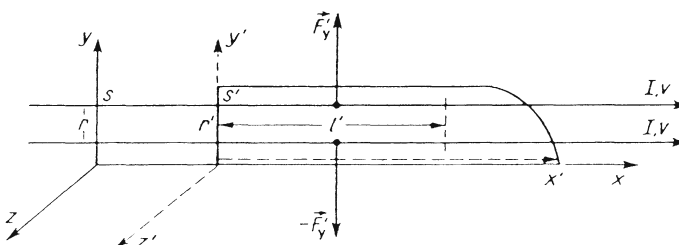


Bild 8.7 Kräfte auf zwei gleiche parallele Elektronenstrahlen, bezogen auf ein mitbewegtes Bezugssystem S' und ein ruhendes Bezugssystem S

Dieses Ergebnis erhält man auch direkt mit Hilfe der Relativitätstheorie: Wir denken uns ein Bezugssystem S' – in Bild 8.7 wieder dargestellt durch einen Zug, den man sich in einer Elektronenröhre aber natürlich nun wirklich nur symbolisch vorstellen darf –, das sich mit den Elektronen mitbewegt. Das Bezugssystem S ist wie die Bildröhre in Ruhe. In Bezug auf S' ruhen die Elektronen. In ihm wirkt daher auf zwei Ladungen $Q^{(1)}$, die auf je der Länge l' verteilt sind, nur die elektrostatische Abstoßungskraft in y' -Richtung

$$F'_y = -\frac{Q^2}{2\pi \varepsilon_0 r l'}$$

Auf Seite 664 wurde gezeigt, dass sich die im System S messbare Kraft F_y ergibt als

$$F = F_y = F'_y = \sqrt{1 - v^2/c_0^2} = \frac{Q^2}{2\pi \varepsilon_0 r l'} \sqrt{1 - v^2/c_0^2}$$

Vom System S aus erscheinen außerdem, wie auf S. 660 gezeigt wurde, Längen in Bewegungsrichtung verkürzt; es gilt $l = l' \sqrt{1 - v^2/c_0^2}$.

Damit wird die von S aus wirksame

Gesamtkraft

$$F = -\frac{Q^2}{2\pi \varepsilon_0 r l} \left(1 - v^2/c_0^2\right)$$

Dieser Ausdruck lässt sich in zwei Summanden aufspalten:

$$F = -\frac{Q^2}{2\pi \varepsilon_0 r l} + \frac{Q^2 v^2}{2\pi \varepsilon_0 c_0^2 r l}$$

und mit $c_0^2 = 1/\varepsilon_0 \mu_0$ (s. Abschn. 5.2.5.4)

$$F = -\frac{Q^2}{2\pi \varepsilon_0 r l} + \frac{\mu_0 Q^2 v^2}{2\pi r l}$$

und schließlich wegen $Qv = Il$ (s.o.)

$$F = -\frac{Q^2}{2\pi \varepsilon_0 r l} + \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi r}$$

Das ist genau das gleiche Ergebnis wie nach der „klassischen Rechnung“, die ja die magnetische Kraft nur aus experimentellen Ergebnissen gewonnen hatte.

In der Form

$$F = -\frac{Q^2}{2\pi \varepsilon_0 r l} \left(1 - v^2/c_0^2\right) = F_{\text{el}} \left(1 - v^2/c_0^2\right)$$

ist unser Ergebnis besonders interessant: Wie man sieht, überwiegt bei den beiden Elektronenstrahlen bei den üblichen Geschwindigkeiten (z.B. $v \approx 0,25 c_0$) bei weitem die elektro-

¹⁾ Erinnern wir uns daran, dass elektrische Ladungen in zwei geradlinig und gleichförmig gegeneinander bewegten Bezugssystemen gleich groß gemessen werden (s. S. 666).

statische Abstoßungskraft. Erst wenn die Elektronen sich fast mit Vakuumlichtgeschwindigkeit bewegen, wird die Gesamtkraft fast gleich Null¹⁾.

Fließt andererseits jeweils der Strom I in zwei parallelen Drähten, so kann die elektrostatische Abstoßungskraft nicht wirksam werden, weil jede negative Ladung durch je eine feststehende positive Ladung der Leiter kompensiert wird. Es wirkt also nur noch die magnetische Anziehungskraft der bewegten Elektronen, die man ja auch experimentell sehr schön zeigen kann.

Das Ergebnis des obigen Beispiels lässt sich in ähnlicher Weise für andere Fälle gewinnen und schließlich verallgemeinern. Stets zeigt sich:

Elektrostatische und magnetische Kraft zwischen bewegten Ladungen sind nur Teile einer einzigen Kraft, die man deswegen oft auch elektromagnetische Kraft nennt (s. Abschn. 6.2.3.2).

Dopplereffekt bei elektromagnetischen Wellen

Beim Dopplereffekt für Schallwellen (s. Abschn. 5.2.6.5) muss man zwischen den Fällen unterscheiden, bei denen sich entweder die Schallquelle oder der Beobachter bewegen. In beiden Fällen ergibt sich eine verschiedene Frequenzänderung. Das liegt daran, dass die Bewegungen auf das Medium bezogen werden, in dem sich der Schall ausbreitet, nämlich auf die ruhende Luft.

Elektromagnetische Wellen pflanzen sich jedoch nicht in einem absolut ruhenden Medium fort, auf das alle Bewegungen bezogen werden könnten. – Darauf beruht ja die ganze spezielle Relativitätstheorie. – Wir können daher auch nicht mehr sinnvoll von einer ruhenden Quelle oder einem ruhenden Beobachter sprechen. Vielmehr kommt es, wie in den obigen Abschnitten, nur auf die Relativgeschwindigkeit zwischen Quelle und Beobachter an. Zur Berechnung der Frequenz, die der Beobachter wahrnimmt, betrachten wir folgenden Fall.

Longitudinaler Dopplereffekt. Am Ende unseres schon vielfach benutzten Zuges mit dem System S' befinde sich eine Lichtquelle, die eine elektromagnetische Welle in x' -Richtung bzw. in $-x'$ -Richtung aussendet. Für diese gilt nach Abschn. 5.2.5.4, S. 442, die Gleichung

$$E' = \hat{E}' \sin [2\pi(t'/T' \mp x'/y')] = \hat{E}' \sin [2\pi f'(t' \mp x'/c_0)]$$

Zur Zeit $t' = t = 0$ sei wieder $x' = x = 0$.

Wir transformieren t' und x' mit Hilfe von Gl. (8.8) und erhalten für die eckige Klammer

$$\left[2\pi f' \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c_0^2}} (t(1 \pm v/c_0 \mp x/c_0(1 \pm v/c_0))) \right] = \left[2\pi f' \frac{1 \pm v/c_0}{\sqrt{1-v^2/c_0^2}} (t \mp x/c_0) \right]$$

Damit wird die Gleichung der Welle, die im System S längs der x -Achse läuft,

$$E = \hat{E} \sin [2\pi f(t \mp x/c_0)]$$

¹⁾ Dieses Ergebnis ist natürlich sehr nützlich für den Betrieb der großen Elektronenbeschleuniger wie z.B. DESY in Hamburg (s. Teilchenbeschleuniger in Abschn. 6.2.3.3). Die nahezu mit Vakuumlichtgeschwindigkeit fliegenden Elektronen beeinflussen sich praktisch nicht.

mit der neuen Frequenz

$$f = f' \frac{1 \pm v/c_0}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}} \quad (8.30)$$

Für relativ kleine Geschwindigkeiten $v/c_0 \ll 1$ erhält man für Gl. (8.30)

$$f \approx f'(1 \pm v/c_0 + v^2/2c_0^2).$$

Dieser Wert liegt zwischen den beiden beim Schall gültigen Formeln

$$f = f_0(1 \pm v/c) \quad \text{und} \quad f = f_0 \frac{1}{1 \mp v/c} \approx f_0(1 \pm v/c + v^2/c^2) \quad (\text{s. Abschn. 5.2.6.5})$$

Anwendungen der speziellen Relativitätstheorie. Die wichtigste Anwendung ist die Umwandlung von Masse in Energie bei Kernreaktionen. Sie ermöglicht den Bau von Kernreaktoren und Atombomben (s. Abschn. 6.2.4). In Teilchenbeschleunigern der Atomphysik muss man die relativistische Zunahme der Masse mit der Geschwindigkeit berücksichtigen. In großen ringförmigen Anlagen treten die Teilchen bereits nahezu mit Lichtgeschwindigkeit in die Bahn ein. Ihre Bewegungsenergie nimmt dann praktisch nur noch durch die größer werdende Masse zu (vgl. Abschn. 8.2.2).

Der relativistische Dopplereffekt für elektromagnetische Wellen spielt z.B. beim „Doppler-Radar“ eine Rolle. Außerdem gestattet er die Bestimmung der „Fluchtgeschwindigkeit“ von Fixsternen aus der Rotverschiebung der Spektren ihres Lichtes.

Ohne die nur relativistisch zu verstehende Lorentzkraft gäbe es keine Elektrotechnik.

Aufgaben zu Abschn. 8.2.3

1. Welche relativen Fehler macht man, wenn man den longitudinalen Dopplereffekt elektromagnetischer Wellen a) bei $v = 72 \text{ km/h}$ und b) bei $v = 30 \text{ km/s}$ nicht relativistisch rechnet?
2. In einer Zweistrahl-Oszilloskopröhre laufen zwei parallele Elektronenstrahlen mit jeweils $I = 5 \text{ mA}$ im Abstand 1 cm . Da sie durch die Spannung 3 kV beschleunigt wurden, haben die Elektronen die Geschwindigkeit $v = 3,25 \cdot 10^7 \text{ m/s}$.
 - a) Wie groß sind die elektrostatische und die magnetische Kraft/Länge?
 - b) Man bestimme das Verhältnis dieser Kräfte.
3. Warum können magnetische Kräfte zwischen stromdurchflossenen Leitern so groß sein, obwohl die Driftgeschwindigkeit der freien Ladungsträger so klein ist?

Anhang

Anleitung zum Lösen physikalischer Aufgaben

Das Lösen von Aufgaben ist keine Glücksache, sondern beruht auf dem richtigen Vorgehen. Man verlasse sich daher auch nicht auf Raten und systemloses Herumprobieren, sondern gehe nach dem folgenden Schema vor:

1. Klarmachen, worum es sich bei der Aufgabe eigentlich handelt. Dazu empfiehlt sich in den meisten Fällen die Anfertigung einer Skizze.
2. Fragen: was ist gesucht und was ist bekannt! Dazu führt man sowohl für die gesuchten wie für die bekannten Größen geeignete Buchstaben ein. Diese Wahl der Buchstaben ist die halbe Lösung! Dann Ordnen in zwei Spalten: – gesuchte, – bekannte Größen.
3. Abzählen der unbekanntenen Größen und Aufstellen der Gleichungen. Nur Buchstaben benutzen! Noch keine Zahlenwerte einsetzen! Dabei müssen immer so viele Gleichungen aufgestellt werden, wie Unbekannte vorhanden sind. Die Gleichungen sind physikalische oder geometrisch-mathematische Gesetzmäßigkeiten (z.B. Fallgesetze, Ohmsches Gesetz, Strahlensatz, Satz des Pythagoras usw.).
4. Anwendung der mathematischen Regeln zur Lösung von Gleichungssystemen.
5. Diskussion des Ergebnisses. Das heißt: man macht sich die physikalische Bedeutung des Ergebnisses klar und prüft, ob die Endformeln auch für leicht übersehbare Spezialfälle gelten.
6. Einsetzen der Zahlenwerte. Dabei sind Gleichungen grundsätzlich als Größengleichungen zu schreiben (s. u.).
7. Sehr gute Übung: Wiedergabe des Ergebnisses in Worten!

Schreibweise physikalischer Gleichungen. Physikalische Gleichungen sind Gleichungen mit physikalischen Größen. Der Betrag einer physikalischen Größe, der Größenwert, wird stets durch ein Produkt aus Zahlenwert (Maßzahl) und Einheit angegeben. Die Einheiten werden dabei wie algebraische Zahlen behandelt, können also gekürzt, potenziert, radiziert und dgl. werden.

Beispiele

1. In welcher Zeit erreicht ein Körper mit der Masse $m = 2 \text{ kg}$ unter der Einwirkung einer Kraft $F = 8 \text{ N}$ aus der Ruhe heraus die Geschwindigkeit $v = 10 \text{ m/s}$?

Die Beschleunigung ist $a = F/m$, die Geschwindigkeit $v = at$. Daraus wird

$$t = \frac{v}{a} = \frac{vm}{F} = \frac{10 \text{ m} \cdot 2 \text{ kg s}^2}{\text{s} \cdot 8 \text{ kg m}} = 2,5 \text{ s}$$

Dabei wurde die Einheitengleichung $1 \text{ N} = 1 \text{ kg m/s}^2$ benutzt.

2. Welche Leistung hat ein Motor, der einen Körper mit der Masse $m = 2 \text{ t} = 2 \cdot 10^3 \text{ kg}$ in $t = 1,5 \text{ min}$ in die Höhe $h = 30 \text{ m}$ hebt? Die Leistung ist Arbeit durch Zeit:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{mgh}{t} = \frac{2 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 30 \text{ m}}{90 \text{ s}} = 6,54 \text{ kW}$$

mit $1 \text{ kg m}^2/\text{s}^3 = 1 \text{ N m/s} = 1 \text{ W}$ und $10^3 \text{ W} = 1 \text{ kW}$.

Lösungen der Aufgaben

Abschnitt 1.1.1.2

$$1. \text{ Taube: } v_T = \frac{300 \text{ km}}{(3/4) \cdot 24 \text{ h}} = 16,66 \text{ km/h}$$

$$\text{Kraftfahrzeug: } v_A = \frac{0,8 \text{ km}}{0,5 \text{ min}} = \frac{0,8 \text{ km}}{(1/120)\text{h}} = 0,8 \cdot 120 \text{ km/h} = 96 \text{ km/h}; \quad v_A = 5,75 v_T$$

$$2. t = \frac{s}{v} = \frac{700 \text{ m}}{60 \text{ km/h}} = \frac{700 \text{ m h}}{60 \text{ km}} = \frac{7 \cdot 10^2 \text{ h}}{6 \cdot 10^4} = (7/6) \cdot 10^{-2} \text{ h} = (7/6) \cdot 10^{-2} \cdot 3,6 \cdot 10^3 \text{ s} = 42 \text{ s}$$

Abschnitt 1.1.2

$$1. t = 4,92 \text{ s} \quad 2. t = s/(v_1 - v_2) = 144 \text{ s} = 2 \text{ min} + 24 \text{ s} \quad s = 3,2 \text{ km} \quad 3. 3,75 \text{ m}$$

$$4. t_1 = (s_0 - v_2 t_0)/(v_1 - v_2); \quad s_1 = v_1 t_1; \quad s_2 = 30 \text{ km mit } v_2 = 60 \text{ km/h}$$

$$s_1 = 20 \text{ km mit } v_1 = 80 \text{ km/h}$$

Abschnitt 1.1.3

$$1. a = 2s/t^2 = 40 \text{ cm/s}^2 \quad 2. t = \sqrt{2s/g} = 2,55 \text{ s} \quad v = 25,1 \text{ m/s}$$

$$3. \bar{v} = 8,93 \text{ m/s} \quad \hat{v} = (s + s_1)/t_2 = 10,54 \text{ m/s} \quad \hat{v} = 1,18 \bar{v} \quad a = \hat{v}^2/2s_1 = 3,08 \text{ m/s}^2$$

$$4. s_1 = v_1 \Delta t/2 = 25 \text{ m} \quad v_1 = 2\Delta s/3\Delta t = 25 \text{ m/s} \quad v_2 = 50 \text{ m/s}$$

$$5. s_1 = v_1^2/2g = 5,5 \text{ m} \quad v_1 = \Delta s/\Delta t - \Delta v/2 = 10,39 \text{ m/s} \quad v_2 = 16,28 \text{ m/s}$$

Abschnitt 1.1.4.1

$$1. 78,5^\circ \text{ gegen das Ufer geneigt; } t = 55,1 \text{ s}$$

$$3. v_{\text{Zug}} = v_{\text{Tr}} \tan \varphi = 17,2 \text{ m/s}$$

$$4. a = v^2/2s = 18,1 \text{ m/s}^2 \quad t = 1,15 \text{ s}$$

$$5. \text{ Mit } s_g = 100 \text{ m, } s_1 = 10 \text{ m und } t_g = 150 \text{ s entnimmt man aus dem } v\text{-}t\text{-Diagramm } v t_g = s_g + 2s_1, \text{ also}$$

$$v = (s_g + 2s_1)/t_g. \text{ Damit wird } a = v^2/2s_1; \quad v = 0,8 \text{ m/s} \quad a = 0,032 \text{ m/s}^2$$

$$6. a = v^2/2s = 3,86 \text{ m/s}^2$$

$$7. s = v_0 t_1 + (1/2) a t_1^2 \quad t_1 = 0,1 \text{ s} \quad t_2 = \text{Bremszeit}$$

Man macht einen mit v immer kleiner werdenden Fehler, der bei 50 km/h z.B. weniger als 6% beträgt.

8. Die Strömungsgeschwindigkeit v nimmt zu, da das Wasser beschleunigt fällt. Dadurch muss der Querschnitt A abnehmen, denn der Wasserstrom (Volumen pro Zeit) ist gleich dem Produkt aus v und A .

$$9. v_0 \cos \varphi = -v_0 \sin \varphi + gt; \quad t = v_0 (\cos \varphi + \sin \varphi)/g; \quad x = v_0 t \cos \varphi;$$

$$y = gt^2/2 - v_0 t \sin \varphi; \quad 0,1 \text{ m höher und } 0,483 \text{ m seitlich muss die Rohrmündung sitzen.}$$

$$10. 2\sqrt{h_{\text{max}} h} = 10,44 \text{ m}$$

$$11. v_0^2 = gx^2/(x \tan \varphi - y) (2 \cos^2 \varphi) \quad v_0 = 5,80 \text{ m/s}$$

$$12. a = v_0^2 s_3 / \left(s_1 s_2 + \frac{1}{2} s_1^2 \right); \quad a = 5,5 \cdot 10^{16} \text{ m/s}^2$$

13. Weil sich die Umfangsgeschwindigkeit der Erdoberfläche zu der horizontalen Raketengeschwindigkeit addiert.

Abschnitt 1.2.1

1. $n = v/2\pi r = 39,8/s = 2\,390/\text{min}$ 2. $n = (v_2 - v_1)/2\pi\Delta r = 6,37/s$ 3. 2 Umdrehungen
 4. $n = \sqrt{a/r}/2\pi = 2,91 \cdot 10^3/s = 174\,600/\text{min}$ 5. $v = \sqrt{gr} = 50 \text{ m/s} = 180 \text{ km/h}$
 6. $\omega_E = 2\pi/d$ $\omega_{EB} = 2\pi/a$ $\omega_M = 2\pi/28 \text{ d}$
 7. $\omega = 1,18 \cdot 10^{-3}/s$ $v = 28\,000 \text{ km/h}$ $a_r = v\omega = 9,19 \text{ m/s}^2$

Abschnitte 1.2.2 und 1.2.3

1. $\alpha = 10\pi/s^2$ $N = 250$ 2. $\alpha = \pi \cdot 20/s^2$ $N = 255$
 3. $t = s/\pi nr = 0,255 \text{ s}$ 4. $a_{\text{Gesamt}} = 1,78 \text{ m/s}^2$ $a_{\text{Gesamt}} = \sqrt{a_t^2 + a_r^2}$
 5. $a = 0,25/s^2$ $a_r = 0,075 \text{ m/s}^2$ 6. $\alpha_1 = \alpha_2 = 6,15/s^2$ 8. $n = 375/s$

Abschnitt 1.2.4

1. a) $v_x = 50 \text{ m/s}$; $v_y = 20 \text{ m/s}$; $g = 9,81 \text{ m/s}^2$; $t = \sqrt{2h/g}$

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} v_x t \\ v_y t \\ -\frac{1}{2} g t^2 \end{pmatrix}; \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ -g t \end{pmatrix}$$

- b) $v_1 = 61,4 \text{ m/s}$;

- c) $a_{t_1} = \frac{v_{z_1}}{v_1} g = \frac{gt_1}{v_1} g = 4,70 \text{ m/s}^2$; $a_{n_1} = \sqrt{g^2 - a_{t_1}^2} = 8,61 \text{ m/s}^2 = 0,88 g$

- d) $\rho_1 = 438 \text{ m}$

Abschnitte 1.3.1 und 1.3.2

1. $F = 40 \text{ N}$
 2. $F_G = 490 \text{ N}$
 3. $a = 1,85 \text{ m/s}^2$; $F = 1,48 \cdot 10^3 \text{ N}$
 4. $a = 0,025 g = 0,245 \text{ m/s}^2$

Abschnitt 1.3.3.1

1. $D = \frac{F}{s} = \frac{10 \text{ N}}{5 \text{ cm}} = 2 \frac{\text{N}}{\text{cm}} = 200 \frac{\text{N}}{\text{m}}$
 2. $D = \frac{F_1}{s_1} = \frac{6 \text{ N}}{4 \text{ cm}} = \frac{3 \text{ N}}{2 \text{ cm}}$ $F_2 = Ds_2 = \frac{3 \text{ N}}{2 \text{ cm}} \cdot 6 \text{ cm} = 9 \text{ N}$
 3. $D = \frac{F}{s} = \frac{F_1 + F_2}{s} = \frac{F_1}{s} + \frac{F_2}{s} = D_1 + D_2$
 4. $D = \frac{F}{s}$; $\frac{1}{D} = \frac{s}{F}$; $s = s_1 + s_2 = \frac{F}{D_1} + \frac{F}{D_2}$
 $\frac{1}{D} = \frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}$; $D = \frac{D_1 D_2}{D_1 + D_2}$

Abschnitt 1.3.3.2

1. $\mu = 0,08$ 2. $F = 264 \text{ N}$ $F \cos \varphi = \mu(F_G - F \sin \varphi)$ 3. $\mu' = 0,9$

4. Man neigt die Ebene so, dass der Körper gleichförmig abwärts gleitet. Dann ist $\tan \varphi = \mu$.
5. $a = \mu'g = 4,9 \text{ m/s}^2$
6. a ist unabhängig von der Wagenmasse und ist nur durch die maximale Haftreibungskraft $F'_{R\max}$ bedingt. Die Antriebskraft kann nicht größer als $F'_{R\max}$ werden. Bei durchdrehenden Rädern kann sie sogar nur gleich F_R , also nur kleiner werden.
7. Vorn, damit dort die Normalkraft und dadurch die größtmögliche Antriebskraft größer wird.
8. a) $r = 1,67 \cdot 10^{-1} \text{ m}$ b) $\mu_R = 10^{-3}$

Abschnitt 1.3.3

1. $F = F_R = mg(1 + h/s) = 2,70 \cdot 10^4 \text{ N}$ 2. $F = 7,5 \cdot 10^4 \text{ N}$
3. a) $F = 8,31 \cdot 10^3 \text{ N}$ b) $F = 1,13 \cdot 10^4 \text{ N}$ 4. $v^2 = 2gs(\mu \cos \varphi - \sin \varphi)$; $v = 1,10 \text{ m/s}$
5. $a = g[\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 - \mu(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2)]/2$ $F = m(g \sin \varphi_2 - a - \mu g \cos \varphi_2)$
 a) $a = 1,48 \text{ m/s}^2$ $F = 145 \text{ N}$ b) $a = 0,64 \text{ m/s}^2$ $F = 147 \text{ N}$

Abschnitt 1.3.4.1

1. $F = m(2s/t^2 + g) = 2700 \text{ N}$ $W = 5400 \text{ N m}$ 2. $W = mv^2/2 + F_R s = 6 \cdot 10^7 \text{ J}$
3. $F_2 = 2\Delta W/\Delta s - F_1 = 3,5 \text{ N}$
4. Fall b) ist günstiger $W_a = 4,41 \cdot 10^4 \text{ Nm}$ $W_b = 2,21 \cdot 10^4 \text{ Nm}$

Abschnitt 1.3.4.2

2. Alle diese Vorrichtungen – man nennt sie auch „einfache Maschinen“ – verrichten Arbeit bei kleinem Kraft- und großem Wegaufwand.
3. $s_x = [s_1(\sin \varphi - \mu \cos \varphi) - \mu s_2]/(\sin \varphi + \mu \cos \varphi)$ $s_x = 76,7 \text{ m}$
4. $h = Ds^2/2mg = 2,87 \text{ m}$ 5. $v^2 = 2gl/(1 - \cos \varphi)$; $v = 2,56 \text{ m/s}$

Abschnitt 1.3.4.3

1. $F = Pt/2s = 6,25 \cdot 10^4 \text{ N}$ 2. $V/t = 1,51 \cdot 10^2 \text{ m}^3/\text{s}$
3. $\bar{P} (mgh + mv^2/2) \eta t = 9,84 \cdot 10^3 \text{ kW}$
4. $P = 56 \text{ kW}$ 5. $\hat{P} = mg(1 + h_2/h_1) \sqrt{2gh_2}$ $\hat{P} = 6,31 \text{ kW}$

Abschnitte 1.3.4.4 und 1.3.4.5

1. $v = (m + m_k) \sqrt{2gh/m_k} = 1,982 \cdot 10^3 \text{ m/s}$ 2. $u = m_1 v_1 / (m_1 + m_2) = 0,72 \text{ m/s}$
3. a) $W = mv^2$ b) $W = mv^2$ c) $W = 2mv^2$ 4. $u = 3 \text{ km/h}$
5. Wäre es anders, wäre zwar der Impuls-, aber nicht der Energiesatz erfüllt. Man bestätige dies durch Rechnung.
6. $u_N = 1100 \text{ m/s}$ $u_{He} = 600 \text{ m/s}$
7. $dm_{Tr}/dt = m(a + g)/v_{Tr} = 1,481 \cdot 10^3 \text{ kg/s}$
8. Beim Geschoss. Der ganze Impuls muss in sehr kurzer Zeit aufgebracht werden.
9. $F = v dm/dt = 40 \text{ N}$

Abschnitt 1.4

1. $0,9 \cdot 60 \cdot R_E = 345000 \text{ km}$ 2. $2,76 \cdot 10^{-3} \text{ N}$; $3,37 \cdot 10^{-5} \text{ N}$
4. $a = \gamma m_S / r^2$; $t = \sqrt{2s/a} = 31,4 \text{ min}$ 5. $\sqrt{2gR_E} = 11,12 \text{ km/s}$

Abschnitt 1.5.1

1. a) 0,35% b) $m(g + \omega^2 R_E \cos^2 \varphi) = 9,829 \text{ N}$ 2. $\sqrt{rg/\mu'} = 15,7 \text{ m/s}$
 3. $\cos(\varphi/2) = g/4\pi^2 n^2 l$; $\varphi = 112,5^\circ$ 4. $\varphi = \arctan(v^2/rg) = 5,6^\circ$ 5. $n = \sqrt{g/r'}/2\pi = 1/\text{s}$

Abschnitt 1.5.2.1

1. $m = 2W/r^2 \omega^2 = 20,3 \text{ kg}$ 2. 3,13 m/s 3. die Kugel 4. $n = \sqrt{\mu m g s / m_s / r \pi} = 50/\text{s}$

Abschnitte 1.5.2.2 und 1.5.2.3

1. Die momentane Drehachse ist die Berührungslinie der Rolle mit der Unterlage. Der Radiusvektor zeigt von ihr zum Angriffspunkt der Fadenkraft. Durch geeignete flache Fadenhaltung kann man die richtige Richtung des Drehmomentes erreichen.

2. $M = 2,5 \cdot 10^{-1} \text{ N m}$ $P = 78,5 \text{ Watt}$ 3. $J = P_E t / 4\pi^2 n_E^2 = 0,1267 \text{ kg m}^2$

4. $F = m a / 2 = 10^3 \text{ N}$

5. $F = ma + \frac{M_R}{r} = ma + \frac{J_R \alpha}{r} = ma + \frac{J_R}{r} \frac{a}{r} \left(m + \frac{J_R}{r^2} \right) a$

Reduzierte Masse bei einem Rad $m_{\text{red}} = J_R / r^2$

Abschnitte 1.5.3.4 bis 1.5.3.6

1. $n_2 = 10/\text{s}$ $\Delta W = J \omega_1^2 / 4 = 7,9 \cdot 10^3 \text{ J}$ 2. $P = 2J_1 \omega_1^2 / t = 3,79 \text{ kW}$

3. Um zu verhindern, dass sich der Rumpf entgegengesetzt zu der Tragschraube dreht. Durch zwei gegenläufige Tragschrauben oder Antrieb durch Düsen an den Tragflügelenden.

4. Es handelt sich um die Corioliskraft.

Diese ist $F_C = m 2v \omega \sin(\angle \vec{v}, \vec{\omega})$. So ergibt sich $F_C = 3780 \text{ N}$.

5. $M = L \omega_p = 31,4 \text{ N m}$ 6. $\varphi = \arctan(\omega_p / \omega_E) = 1,23^\circ$

Abschnitt 1.5.4

1. $T = 2\pi r \sqrt{r/g/R_E} = 95 \text{ min}$ 2. $r = r_1 (T/T_1)^{2/3} = 385 \text{ 000 km}$

3. $W = W_{\text{pot}} + W_{\text{kin oben}} - W_{\text{kin unten}} = 3,476 \cdot 10^9 \text{ Nm}$

4. Weil Mensch und Satellit die gleiche Radialbeschleunigung a_r erfahren. In Bezug auf den Satelliten ist der Mensch also schwerelos, in Bezug auf die Erde jedoch nicht.

Abschnitte 1.6.1.1 bis 1.6.1.4

1. Gleichmäßige Druckausbreitung und kleine Kompressibilität.

2. Weil sich die Lunge nicht gegen einen höheren Schweredruck des Wassers ausdehnen kann.

3. Silber

4. Er bleibt liegen, weil auf ihn von oben die Bodendruckkraft, von unten wegen fehlenden Wassers keine Kraft wirkt.

5. $d = 3r h \rho_B / [4(2h + 2r) \rho_M] = 0,503 \text{ mm}$

6. $F_s = A_s h_s \rho g = 600 \text{ cm}^2 \cdot 30 \text{ cm} \cdot 1 \text{ g/cm}^3 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 = 176,5 \text{ N}$
 $h_D = 31,1 \text{ cm}$, also ist $h_D > h_s$

Abschnitt 1.6.1.5

1. $\sigma = \rho g r h / 2 = 2,21 \cdot 10^{-2} \text{ N/m}$

2. a) $p = 2\sigma/r = 5 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 = 5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ b) $p = 4\sigma/r = 4 \text{ N/m}^2$; 2 Oberflächen!

Abschnitt 1.6.2

1. $pV = p_1 V_1 + p_2 V_2$; $5,25 \cdot 10^5$ Pa und $3,75 \cdot 10^5$ Pa
2. $p_2 = p_1 - p_a V_a / V_1 = 25 \cdot 10^5$ Pa
3. $\Delta p = (\rho_a - \rho_i) gh = 1,324$ hPa
4. 943 h Pa und 696 h Pa
5. a) Da der Gasdruck im Inneren stets gleich dem äußeren Luftdruck ist, sind Gasdichte und Luftdichte einander proportional. Das Ballon-Volumen nimmt deshalb umgekehrt proportional zur Luftdichte zu. Also bleibt die Tragkraft konstant. Es gilt $F = m_{H_2} g (\rho_L / \rho_{H_2} - 1)$.
 b) Mit dem Endvolumen V_E und ρ_{0H_2} sowie ρ_{0L} als Dichten in der Höhe Null wird

$$F = V_E \rho_L g - m_{H_2} g \text{ und } \rho_L = F_T [1 + \rho_{0H_2} / (\rho_{0L} - \rho_{0H_2})] / (V_E g)$$
 Es ergibt sich $\rho_L = 6,4 \cdot 10^{-2} \text{ kg/m}^3$.
 Mit der barometrischen Höhenformel errechnet sich daraus $h_{\max} = 24$ km.

Abschnitt 1.6.3.1

1. $v_1^2 = 2p_L / \rho + v_2^2$; $A_1 v_1 = A_2 v_2$; $v = 14,28$ m/s $A = 0,105$ cm²
2. $\Delta p + \rho gh_1 = (1/2) \rho v_2^2$; $v_2 = 6,30$ m/s
3. $p_1 = p_2 + \rho v_2^2 / 2$; $\Delta p = 98,3$ hPa $v = 14,02$ m/s
4. $P = \Delta p A_1 v_1$; $\Delta p = \frac{1}{2} \rho v_1^2 - \frac{1}{2} \rho v_2^2$; $v_2 = v_1 A_1 / A_2$

$$v_1^3 = \frac{2P}{A_1 \rho [1 - (A_1 / A_2)^2]}$$
; $v = 30$ m/s
5. $\Delta p = \rho v_2^2 [(A_1 / A_2)^2 - 1] / 2$; $A_1 / A_2 = 3,92:1$

Abschnitte 1.6.3.2 und 1.6.3.3

1. $\eta = (mg - g4\pi r^3 \rho_{Fl} / 3) / (6\pi r v)$ $\eta = 0,76$ Ns/m²
 Hinweis: Der Staudruck ist hierbei vernachlässigbar klein gegenüber dem Druckabfall im Rohr.
2. a) $Q = \pi \rho gh R^4 / 8 \eta l = 9,54$ cm³/s b) $\Delta p = 1150 \cdot 8 \eta^2 l / R^3 \rho$; $h = 9,52$ m
3. $c_W = 2\Delta p / \rho v^2 = 0,69$
4. $v^2 = 2mg / c_W A \rho$; a) 4,25 m/s b) 6,0 m/s
5. 15,5 kW und 124 kW
6. Kapillare: $Re = 5 \cdot 10^{-3}$; Aorta: $Re = 750$
 Auch die Blutströmung in der Aorta ist also noch laminar.
7. $c_A = \frac{2mg}{\rho v^2 A_T}$; bei der Reisegeschwindigkeit ergibt sich $c_A = 0,48$. beim Abheben 2,29. Der letztere Wert braucht in Wirklichkeit nicht ganz so hoch zu sein, da durch die Neigung des Flugzeuges die senkrechte Schubkomponente der Triebwerke mitträgt. Die Triebwerke erzeugen insgesamt die Schubkraft $8 \cdot 10^5$ N, also etwa ein Viertel der Gewichtskraft.
8. $v \approx 22$ m/s = 1,1 $v_{\text{krit}} = 1,1 Re_{\text{krit}} v / d$.

Abschnitt 2.2

- $l = 1,2745 \text{ m}$ $\Delta l = l \alpha \Delta T = +0,49 \text{ mm}$ $(\Delta l/l) \cdot 1000 = 0,38 \text{ ‰}$
- $\Delta l = (2l_1 \alpha_1 - l_2 \alpha_2) \Delta T = 0$ $l_2 = 0,785 \cdot l_1$
- $h g \varrho_0 \frac{1}{(1 + \gamma_0 \vartheta)} \approx h g \varrho_0 (1 - \gamma_0 \vartheta)$ $h_0 = h(1 - \gamma_0 \vartheta) = 696,2 \text{ mm HgS}$ $p = 925,9 \text{ hPa}$
- $R_s = \frac{vR}{m} = 4121 \text{ J/kg}$ $R_s = 260 \text{ J/kg K}$ $R_s = 189 \text{ J/kgK}$
- $V_0 = \frac{pV T_0}{p_0 T}$; $V = 52,96 \text{ m}^3$ $V = \frac{vRT}{p} = 0,166 \text{ m}^3$

Abschnitt 2.3.1

- $N = \frac{pV}{kT} = 6,71 \cdot 10^{11}$
- a) $f = 3$; $\sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{3kT}{m_M}} = 111 \text{ m/s}$ b) $\sqrt{v^2} = 4,96 \cdot 10^5 \text{ m/s}$
- $l = \frac{1}{\pi \sqrt{2} \cdot nd^2} = 2,12 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$
- $W_{\text{pot}} = -\gamma m_E m \frac{1}{R_E} = -3,33 \cdot 10^{-18} \text{ J}$ $W_{\text{kin}} = \frac{3}{2} kT = 6,07 \cdot 10^{-21} \text{ J}$

Die Atmosphäre kann also auf Grund ihrer thermischen Energie die Erde nicht verlassen.

Abschnitt 2.3.2

- a) $\Delta U = m c_V \Delta T = 2,02 \cdot 10^5 \text{ J}$ b) $8,36 \cdot 10^4 \text{ J}$ c) $1,8 \cdot 10^4 \text{ J}$
- H_2O bei 4 °C , da hier $\gamma = 0$ (Volumenausdehnung = 0)
- $H = m c_p \Delta T$. Wärmehalt = $-4,93 \cdot 10^5 \text{ J}$
- Wenn man von Zimmertemperatur ausgeht, kann man mit Glycerin etwa die 2,5-fache Wärme speichern.
- Da man weit höhere Temperaturen erreichen kann, bevor sie schmelzen oder sich zersetzen.

Abschnitt 2.4.2

- $\Delta H = \Delta U + p \Delta V$ $p \Delta V = -3 \cdot 10^{-3} \text{ kmol}$ $RT = -7,36 \cdot 10^3 \text{ J}$ $\Delta H = -5,72 \cdot 10^5 \text{ J}$
- $\Delta T = 0,1 \cdot 0,5 (v_1^2 - v_2^2)/c = 1330 \text{ K}$

Abschnitt 2.4.3

- $dW_A = p dV$ $W_A = rRT \int_{V_1}^{V_2} dV/V = rRT \ln(V_2/V_1) = 4,32 \cdot 10^6 \text{ Nm}$
 $Q = W_A = 4,32 \cdot 10^6 \text{ J}$ $\Delta H = 0$ $\Delta U = 0$
- a) $p/T = \text{const}$; $\Delta p = 23,3 \text{ hPa}$; $p = 977 \text{ hPa}$ b) $m = \frac{pV}{R_s T}$; $-Q = -m c_v \Delta T = 8,16 \cdot 10^2 \text{ J}$
- c) $M = \Delta p h \int_0^{0,6 \text{ m}} b db = 3,36 \cdot 10^2 \text{ Nm}$ $F = M/b = 5,6 \cdot 10^2 \text{ N}$ d) $\Delta U = -8,16 \cdot 10^2 \text{ J}$ $\Delta H = \Delta U$
- a) $TV^{\alpha-1} = \text{const}$; $T = 955 \text{ K}$ $\vartheta = 682 \text{ °C}$ b) $T = 899 \text{ K}$ $\vartheta = 626 \text{ °C}$
c) $\Delta U = m c_V \Delta T = \varrho V c_V \Delta T$; $\Delta U_a = 2,92 \cdot 10^2 \text{ J}$ $\Delta U_b = 2,68 \cdot 10^2 \text{ J}$
- $T^\alpha p^{1-\alpha} = \text{const}$; $\Delta T = 24,43 \text{ K}$

Abschnitt 2.4.4

1. Die Isotherme hat in K einen Wendepunkt mit horizontaler Tangente.

$$p_K = 2,25 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 \quad T_K = 5,2 \text{ K}$$

2. Die thermische Energie kT der Moleküle ist so groß, dass man sie durch Druck einander nicht so nähern kann, dass die Bindungskräfte wirksam werden.

3. $dV/dp = \infty$, also ist die Kompressibilität $\chi = \infty$

Abschnitt 2.4.5

$$1. h = \frac{\rho_S h_S [q_S + c_S (T_S - T_0)]}{\rho_W c_W (T_W - T_0)} = 27,3 \text{ mm} \quad 2. 54 \text{ K}$$

3. $W/h = \Delta h - p\Delta V_S = 20,91 \cdot 10^5 \text{ Nm/kg}$, d.h. mehr als 92% der gesamten Energie!

$$4. H/m = h = c(T_S - T_0) + q_D + c_p (T - T_S) = 2,70 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$$

$$5. a) \approx 76 \text{ }^\circ\text{C} \quad b) 135 \text{ }^\circ\text{C} \quad c) m_D = \frac{m_W c_W (T_W - T_0)}{q_D} = 0,26 \text{ kg}$$

Abschnitt 2.5

1. $0,85 \cdot 2,62 \text{ hPa} = 2,227 \text{ hPa}$; dies sind bei $20 \text{ }^\circ\text{C}$ 9,6%

2. p_S bei $20 \text{ }^\circ\text{C} = 23,2 \text{ hPa}$; dies sind bei $30 \text{ }^\circ\text{C}$ 55%

Abschnitt 2.6

$$1. P = \frac{T_S - T_G}{R_W} = 2 \text{ W}$$

$$2. \frac{dQ}{A dt} = \lambda \frac{dT}{dl} = 53 \text{ W/m}^2. \text{ Der Bedarf steigt um } 71 \text{ W/m}^2 \text{ auf } 124 \text{ W/m}^2.$$

$$3. \text{ Mit } \frac{Q}{Vt} = 4,19 \cdot 10^2 \frac{\text{J}}{\text{cm}^3} \text{ wird } \vartheta = \frac{Q r^2}{Vt \cdot 4\lambda} + T_1 = 860 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$4. T^4 = \frac{P}{\sigma \cdot 0,7A}; \quad \vartheta = 853 \text{ }^\circ\text{C}$$

Abschnitt 2.7

1. Die spezifische Entropieänderung für Schmelzen ist $\Delta s_1 = \frac{\Delta Q_S}{mT_S} = 1,215 \cdot 10^3 \text{ J/(kg K)}$,

für Erwärmen $\Delta s_2 = \int_{T_S}^{T_2} dQ/(mT) = \int_{T_S}^{T_2} c dT/T = c \ln T_2/T_S = 9,64 \cdot 10^2 \text{ J/(kg K)}$. Das Schmelzen

ist also der wahrscheinlichere Vorgang.

$$2. \Delta S = m c_V \ln T_2/T_1 + m R_S \ln V_2/V_1 = (c_V + R_S) m \ln 2 = 8,35 \cdot 10^3 \text{ J/K}$$

3. Der Wirkungsgrad einer beliebigen periodisch arbeitenden Maschine ist kleiner als der Carnot-Wirkungsgrad.

$$4. a) \eta_{\text{ideal}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 0,616 = 61\%$$

5. a) $\epsilon_{\text{ideal}} = \frac{T_1}{T_1 - T_2} = 18,3 = 1832\%$ b) $P = 1,58 \text{ kW}$

c) 13,6% der erforderlichen Heizleistung

Abschnitt 3.1.1

1. a) $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} = 8,98 \cdot 10^{-5} \text{ N}$ b) $N = 6,2 \cdot 10^{10}$ Elektronen

2. $F = 8,98 \cdot 10^3 \text{ N}$

Abschnitte 3.1.2.1 bis 3.1.2.5

1. a) $-Q = E \cdot 4\pi\epsilon_0 r^2 = 4,51 \cdot 10^5 \text{ C}$ b) $\sigma = 8,9 \cdot 10^{-10} \text{ C/m}^2$

2. $W = \int_{r_1}^{r_2} E Q dr$ mit $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$; $W = 8,08 \text{ J}$

Abschnitte 3.1.2.6 bis 3.1.2.7

1. a) $D = Q/A = \epsilon_0 E = 4,43 \cdot 10^{-7} \text{ C/m}^2$ b) $Q = DA = 8,86 \cdot 10^{-11} \text{ C}$

c) $U = Q/C = 50,0 \text{ V}$ mit $C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$

2. $C_1 = 3,33 \text{ nF}$ $C_2 = 6,6 \text{ nF}$ $C_3 = 15 \text{ nF}$ $C_4 = 30 \text{ nF}$

3. Für jeden Leiter allein errechnet sich wie in Beisp. 4 $U(r) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{r}{r_0}$. Die Kapazität beider

Leiter zusammen ist dann

$$C = \frac{Q}{2U} = \frac{\pi\epsilon_0 l}{\ln r/r_0} \quad C/l = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln r/r_0}$$

Man mache sich klar, dass in irgendeinem Punkt zwischen den Leitern beide Feldstärken gleiche Richtungen haben. Deshalb verdoppelt sich die Spannung.

Abschnitt 3.1.2.8

1. $C = 8,85 \text{ pF}$ $W = (1/2)Q^2/C$

Im homogenen Feld ist $E = U/d$; mit $Q = CU$ wird $W = (1/2)CU^2$

$$W = 17,7 \cdot 10^{-6} \text{ J} \quad F = 17,7 \cdot 10^{-4} \text{ N}$$

2. $W = \frac{1}{2}CU^2 = 90,75 \text{ J}$

Abschnitt 3.1.3

1. a) $E = 1,67 \cdot 10^6 \text{ V/m} < 3 \cdot 10^6 \text{ V/m}$

b) $Q = U_{12} C_{12} = U_{23} C_{23}$; $U_{12}/U_{23} = C_{23}/C_{12} = \epsilon_{r23}/\epsilon_{r12} = 9/1$
 $U_{12} = 45 \text{ kV}$ $U_{23} = 5 \text{ kV}$

Die Feldstärke in Luft ist $E_{12} = 3 \cdot 10^6 \text{ V/m}$. Der Kondensator ist also nicht nur nicht spannungsfester, sondern sogar unbrauchbar geworden.

2. Die Ladung auf beiden Kugeln ist gleich. Die Feldstärke zwischen den Kugeln ohne

Dielektrikum ist $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, und überall ist $D = \frac{Q}{4\pi r^2}$. Die Feldstärke in den Dielektrika sind

$$E_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}r^2}, \quad E_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_{r2}r^2}. \quad \text{Die Potenzialdifferenz ist}$$

$$U_1 - U_3 = \int_1^3 E \, dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_{r2}} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right) \quad \text{und mit}$$

$$C = \frac{Q}{U_1 - U_3} \quad \text{wird} \quad \frac{1}{C} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\epsilon_{r1}r_1} - \frac{1}{\epsilon_{r2}r_3} + \frac{1}{r_2} \left(\frac{1}{\epsilon_{r2}} - \frac{1}{\epsilon_{r1}} \right) \right]$$

Abschnitt 3.2.2.1

1. $R = U/I = 5 \, \Omega$ $\rho = \frac{RA}{l} = 5 \cdot 10^{-5} \, \Omega \text{ cm}$ Das Material kann Konstantan sein.

2. a) $dU = \frac{dQ}{C} = -\frac{U \, dt}{RC}$ und nach Integration $\ln \frac{U}{U_0} = -\frac{t}{RC}$

$$U = U_0 e^{-t/(RC)} \quad I = \frac{U_0}{R} e^{-t/(RC)}$$

(siehe auch [1] Abschn. Exponentialfunktionen und Aufgaben)

b) $I = 3,7 \cdot 10^{-3} \text{ A}$

Abschnitt 3.2.2.2

1. $R_0 = \frac{R}{(1 + \alpha \Delta T)}$; $R_{T1} = 100 \, \Omega$ $R_{T1} = 146 \, \Omega$

Abschnitte 3.2.2.5 und 3.2.2.6

1. $R = 58 \, \Omega$ $R_i = \frac{U}{I} - R = 3,04 \, \Omega$ 2. $\Delta U = 2 \text{ V}$

3. a) $U_V = \frac{R'}{R_1 + R'} U$ $\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_V}$ b) $R' = 9,9 \, \Omega$; $U_V = 0,992 \text{ V}$

Abschnitt 3.2.2.7

1. $t = \frac{mc \Delta T}{0,7P} = 2,40 \cdot 10^2 \text{ s}$ $0,016 \, \text{€}$ 2. $U = 1,44 \text{ V}$; $P_V = 17,3 \text{ W}$

Abschnitt 3.2.3

1. $t = \frac{AdQzF}{IM_R} = 3 \text{ min} + 37 \text{ s}$

Abschnitt 3.2.4

1. a) $U_q = 1,1 \text{ V}$

b) Es gibt 2 Lösungen: $U_{k1} = 0,87 \text{ V}$ mit $R_{L1} = 7,56 \, \Omega$ und $U_{k2} = 0,23 \text{ V}$ mit $R_{L2} = 0,528 \, \Omega$

2. $26,4 \text{ Stunden}$; 6500 Ws

Abschnitt 3.2.6.1

$$1. I = AA_R T^2 e^{-\frac{W_A}{kT}} = 3 \text{ mA}$$

$$2. \text{ a) } v_x = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}} = 1,88 \cdot 10^7 \text{ m/s} \quad \text{ b) } U = \frac{2dU_0 2b}{\left(\frac{1}{2} + r\right)l} = 160 \text{ V} \quad \text{ c) } U/b = 23 \text{ V/cm}$$

$$3. \frac{b}{U} = \frac{l \left(\frac{l}{2} + r\right)}{2dU_0}; \quad b_1/U = 0,34 \text{ mm/V} \quad b_2/U = 0,46 \text{ mm/V}$$

Abschnitt 3.2.6.2

$$1. \text{ ca. } 18 \text{ kV}$$

$$2. \text{ a) Gradient} = 1,14 \text{ V/cm} \quad R_V = 302 \Omega \quad \text{ b) Gradient} = 32 \text{ V/cm} \quad R_V = 112 \Omega$$

Abschnitt 3.3.2

$$1. I = \frac{H l}{N} = 15 \text{ mA}$$

$$2. H = \frac{l}{2r} = 8 \cdot 10^6 \text{ A/m}; \quad B = \mu_0 H = 12,57 \text{ T}$$

$$3. \text{ a) } H = \frac{N I}{l} = 1,2 \cdot 10^4 \text{ A/m}; \quad \text{ b) } B = \mu_0 H = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ Vs/m}^2$$

$$\text{ c) } \Phi = BA = 1,18 \cdot 10^{-4} \text{ Vs} \quad \text{ d) } j_A = \frac{\Phi l}{\mu_0} = 47 \text{ A m}^2; \quad j_C = \Phi l = 5,9 \cdot 10^{-5} \text{ V sm}$$

Abschnitt 3.3.3

1. Auf die beiden Seiten senkrecht zum Feld wird jeweils eine entgegengesetzt gleiche Kraft ausgeübt. Diese ist am größten, wenn die anderen beiden Seiten in Richtung des Feldes liegen.

$$M = 2NIBs/2 = NIBA = 7,54 \cdot 10^{-6} \text{ N m}$$

2. a) $F_L = 0$; die Bahn ist eine Gerade

b) Die x -Komponente der Geschwindigkeit ist konstant, die y Komponente ändert dauernd ihre Richtung. Sie läuft wie ein Uhrzeiger mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um. Das Elektron beschreibt eine Schraubenbahn.

$$3. \text{ a) } \omega = \frac{2e_0 B}{m} = 4,83 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1} \quad f = 7,69 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1} \quad \text{ b) } v = \omega r = 2,41 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

$$\text{ c) } W_{\text{kin}} = \frac{m}{2} v^2 = 1,93 \cdot 10^{-12} \text{ Js} = 12 \text{ MeV} \quad \text{ d) } U = \frac{W_{\text{kin}}}{2e_0} v^2 = 6 \text{ MV}$$

$$4. mv^2/r = e_0 vB; \quad v = \sqrt{2W/m}; \quad r = 2,85 \text{ cm}; \quad v = 2,5 \cdot 10^7 \text{ m/s}; \quad \varphi = 55^\circ$$

Abschnitt 3.3.4

$$1. \text{ Mit Gl. (3.84) wird } L = \left(\frac{1}{4}\right) \mu_0 (r_2 - r_1)^2 N^2 / (r_1 + r_2); \quad L = 4,19 \cdot 10^{-5} \text{ H}$$

$$2. \text{ a) Aus } L di/dt + IR_2 = 0 \text{ wird nach Integration } i = I_0 e^{-\frac{R_2 t}{L}}$$

$$\text{ Ist der Spulenstrom vor dem Ausschalten } I_0 = 6 \text{ A, folgt } i = 6A e^{-\frac{500}{s} t}$$

Abschnitt 5.1.3

1. a) Die Uhr geht vor, weil g zunimmt b) z. B. elastische Drehpendel, weil unabhängig von g
2. $1/(4\pi^2 f_0^2 C) = 20,3 \mu\text{H}$
3. a) Wenn $F_e = -Ds$ und $F_t = -ma$; b) wenn $u_C = q/C$ und $u_L = L di/dt$
4. Pendelschwingungen sind – im Gegensatz zu Flüssigkeitsschwingungen – nur bei kleinen Ausschlägen (näherungsweise) sinusförmig.
5. Betrag $a = 7,5 \text{ m/s}^2$. Richtung zum Erdmittelpunkt

Abschnitte 5.1.4 bis 5.1.6

1. Aus $\hat{\epsilon}_0/\hat{\epsilon}_3 = e^{-\delta t_0/\epsilon}^{-\delta t_3}$ folgt a) $\Lambda = (1/3) \ln(\hat{\epsilon}_0/\hat{\epsilon}) = 1/3$
 b) $\hat{\epsilon}_1 = \hat{\epsilon}_0/e^\Lambda = 1,13$
 c) aus $\delta T_d = \Lambda$ und $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ mit ω_0 von Aufg. 3 Abschn. 5.1.2 folgt $\delta = 0,66 \text{ s}^{-1}$
 d) $(1/2)D^*(\hat{\epsilon}_0^2 - \hat{\epsilon}_1^2) = 1,87 \cdot 10^{-6} \text{ J}$ e) 51,4%
2. $2\sqrt{L/C} = 318 \Omega$
3. Aus Gl. (5.31): Vorn jeweils $1,9 \cdot 10^3 \text{ N s/m}$, hinten jeweils $2,4 \cdot 10^3 \text{ N s/m}$: gedämpfte Schwingungen.
4. Bei Phasenresonanz ist $\Delta\varphi = \pi/2$: (mit $\varphi_{0S} = 0$) also $s = \hat{s}_S \sin \omega t$;
 $F_E = \hat{F}_E \sin(\omega t + \pi/2) = \hat{F}_E \cos \omega t$ und $v = \omega \hat{s}_S \cos \omega t$. Also wird $P = F_E v = \omega \hat{s}_S \hat{F}_E \cos^2 \omega t$,
 d.h. immer ≥ 0 .

Abschnitt 5.1.7 bis 5.1.9

1. $t_1 = 0,5 \text{ s}$ 2 Maxima 3 Maxima 2. $\frac{1}{0,7 \text{ s} + 0,1 \text{ s}} = 1,25 \text{ Hz}$
3. $\frac{2 \text{ Hz}}{50 \text{ Hz}} \cdot 100 = 4\%$ 4. 500 kHz

Abschnitt 5.2.2

1. $t = 50 \text{ m} \sqrt{\varrho A/F_0} = 0,2 \text{ s}$ 2. $\sqrt{E/\varrho} = 4835 \text{ m/s}$
3. $\varrho c = 1,93 \cdot 10^6 \text{ kg/(s m}^2)$ bzw. $3,72 \cdot 10^7 \text{ kg/(s m}^2)$ 4. $c^2 \varrho = 1,7 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2$
5. Aus $\Delta V/V = \chi_w \Delta p_w$ folgt mit $c = \sqrt{1/\chi \varrho}$: $\Delta p_w = 2 \cdot 100 \text{ N/cm}^2$;
 entsprechend (mit $\chi_L = 1/\kappa p$): $\Delta p_L = 0,143 \text{ N/cm}^2$
6. $\sqrt{\frac{1}{(C/I)(L/I)}} = 10^7 \text{ m/s}$ 7. $F_0/4 \pi^2 \hat{s}^2/(2 \lambda^2) = 35,5 \text{ J}$
8. $\hat{u} \sqrt{2 PZ} = 100 \text{ V}$ $\hat{i} = \sqrt{2 PZ} = 0,1 \text{ A}$ $Z = 1000 \text{ W}$

Abschnitte 5.2.3 bis 5.2.5

1. Die Welle passiert die Verbindungsstelle ungestört.
2. Aus $l = \lambda/2$ und $c = \lambda f$ folgt $l = 38,6 \text{ cm}$; aus $l = \lambda'/4$ folgt $f' = 220 \text{ Hz}$
3. $Z = \varrho c = 4,13 \cdot 10^2 \text{ kg/(s m}^2)$ bzw. $1,41 \cdot 10^6 \text{ kg/(s m}^2)$
4. $\lambda = c/f = 8,6 \text{ cm}$ $\hat{v} = \hat{p}/(\varrho c) = 2,2 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$ $p_R = 2S/c = 5,8 \cdot 10^{-7} \text{ hPa}$
 $\hat{s} = \hat{v}/\omega = 8,7 \cdot 10^{-9} \text{ m}$ $S = \hat{p}^2/(2\varrho c) = 10^{-5} \text{ W/m}^2$
 $L = 10 \lg(S/S_0) = 70 \text{ dB}$ $L_S = 80 \text{ phon}$
5. Aus $\hat{p}/\hat{v} = \varrho c$ folgt $\hat{p}_W/\hat{p}_L = (\varrho c)_W/(\varrho c)_L = 3417$
 aus $S = \hat{p}^2/(\varrho c)$ folgt $S_W/S_L = (\varrho c)_W/(\varrho c)_L = 3417$
6. $\hat{a} = \omega \hat{v} = \omega \sqrt{2S/(\varrho c)} = 2,3 \cdot 10^4 \text{ m/s}$ 7. $f_W = f_L c_W/c_L = 0,33 \cdot 10^8 \text{ Hz}$

8. Aus $S_{\text{Luft}} = \hat{E}^2(1/2)\sqrt{\epsilon_0/\mu_0}$ und Bild 5.61 folgt $\hat{E} = 129 \text{ V/m}$

9. $T_F = \alpha/\lambda_{\text{max}} = 7240 \text{ K}$

Abschnitte 5.2.6 bis 5.2.8

1. $\Delta t_1 = 2\Delta s/c_1 = 66 \text{ ns}$ $\Delta t_2 = 13,8 \text{ ms}$ 2. $n_W/n_L = c_L/c_W =$ a) 0,234 b) 9

3. a) Bei $11,5^\circ$; 37° und 90° gegen die Symmetrieebene zwischen den Dipolen treten Minima auf.

b) Das Minimum bei $11,5^\circ$ wird weniger ausgeprägt, das bei 37° entfällt fast, das bei 90° ganz.

4. $\lambda = d \sin \alpha = 423 \text{ nm}$

5. Aus Gl. (5.108) und (5.109) wird $\Delta f = f_S \left(1 - \frac{c-v}{c+v} \right)$; für 50 km/h ist $\Delta f = 871 \text{ Hz}$,

für 60 km/h ist $\Delta f = 1045 \text{ Hz}$, der Unterschied also 174 Hz.

6. $\alpha = \beta/2 = -1/(2x) \cdot \ln(S_2/S_1)$ $\alpha_{e1} = 11,5 \text{ m}^{-1}$ $\alpha_{\text{Sch}} = 23 \text{ m}^{-1}$

7. $\sin \epsilon_1/\sin \epsilon_2 = c_1/c_2$

Abschnitt 5.3

1. a) $(hc_0/\lambda - W_a) 1/e_0 = 1,5 \text{ V}$ $W_a/h = 3,86 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$

2. Weil die „Wellenlänge“ nur etwa 10^{-38} m ist!

3. $(h/m \Delta x) \leq 6,6 \cdot 10^{-22} \text{ m/s}$

Abschnitt 6.1

1. a) 20 m b) $\frac{\pi \epsilon_0^6 m_e^2}{4 \epsilon_0^3 h^4} = 9 \cdot 10^{-8} \text{ N}$ c) $\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} = 4 \cdot 10^{-47} \text{ N}$

2. $\frac{\epsilon_0 h^2}{\pi 2 m_e e^2} = 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ m}$

3. Wegen $\hat{u} > u_{\text{eff}}$ ist λ_{min} nach links verschoben; mehr Intensität bei kürzeren Wellen.

4. $hc_0/(e_0 U) = 671 \text{ nm}$

5. $W = n^2 \frac{h^2}{8 ml^2}$ ist für $n = 1$: $W = 6,02 \cdot 10^{-18} \text{ J} = 37,6 \text{ eV}$

6. Die Grundfrequenz beträgt $f_0 = \frac{c_0}{2L} = 5 \cdot 10^8 \text{ Hz}$. Die Laserfrequenz $f = \frac{c_0}{\lambda} = 5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$

Daraus folgt $q = 10^6$. Der Modenabstand Δf ist gleich f_0 , d.h. $\Delta f = 5 \cdot 10^8 \text{ Hz}$. Daraus folgt, dass in der Resonatorbandbreite $\Delta f_B = 1,5 \cdot 10^9 \text{ Hz}$ drei Moden anschwingen.

Abschnitt 6.2



3. Mit $N = \frac{6,022 \cdot 10^{23}}{226}$ erhält man aus Gl. (6.25) $3,7 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}$

4. Umgekehrt wie in Aufgabe 3 erhält man 0,224 mg

5. Im „Dreisatz“ aus Aufgabe 4: $6 \cdot 10^{-18} \text{ kg}$, das sind 17 000 000 Atome

6. a) $h/\Delta W \leq 8 \cdot 10^{-7} \text{ s}$ b) $\Delta W/W = 3,6 \cdot 10^{-13}$

7. Die Dichte hängt nicht von A_r ab.

8. $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 28,3 \cdot 10^{26} \text{ MeV} / 4 = 3,8 \cdot 10^{14} \text{ J}$

Abschnitt 7.2

$$1. D = EA/l \quad 2. \Delta l = lF/AE = 6,25 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Abschnitt 7.4.3.1

$$1. TK_R = d\varrho/(dT\varrho) = -\Delta W_0/2kT^2$$

$$= -0,045/\text{K} \text{ bei Ge}$$

$$= -0,07/\text{K} \text{ bei Si}$$

$$= -0,47 \text{ K} \text{ bei C}$$

$$2. \lambda_{\max} = c_0 h/\Delta W_0 = 1,129 \text{ } \mu\text{m} \text{ bei Si} \quad (c_0 = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s})$$

Abschnitt 7.4.3.2

$$1. \text{ Ein Phosphor-Atom auf } 1,2 \cdot 10^9 \text{ Silizium-Atome. } n_D \approx n_- = (\varrho e_0 b_-)^{-1}$$

Abschnitt 7.4.3.3

$$1. U_D = (kT/e_0) \ln(n_A n_D/n_i^2) = 480 \text{ mV. Das Material spielt dabei keine Rolle.}$$

$$2. dT/dU = (I + I_F) e_0/(kT) \quad r = kT/[e_0(I + I_F)]$$

Da im Allgemeinen $I_F \gg I$ ist, gilt in guter Näherung $r = kT/(e_0 I)$. also $r \sim 1/I$.

$$3. I_{sp2} = I_{sp1} e^{\frac{\Delta W_0}{k} \frac{\Delta T}{T_1 T_2}}; \quad \text{bei } 30^\circ\text{C} \quad I_{sp} = 3,8 \text{ } \mu\text{A}, \quad \text{bei } 100^\circ\text{C} \quad I_{sp} = 13 \text{ mA}$$

$$4. \text{ Nach Kirchhoff und Ohm ergibt sich } U_0 = U[1 + R_V/R_L + R_V/r_z] - U_z R_V/r_z. \text{ Über die Auflösung nach } U$$

$$\text{erhält man schließlich } (U_2 - U_1)/U_1 = (U_{02} - U_{01})/(U_{01} + U_z R_V/r_z).$$

Einsetzen ergibt $(U_2 - U_1)/U_1 = 0,88\%$

$$5. \text{ Höchstens gleich } U_D = 480 \text{ mV}$$

$$6. \text{ a) Basisschaltung: } V_U = 80 \quad V_I = 0,98 \quad V_P = 78,4$$

$$\text{ b) Emitterschaltung: } V_U = 80 \quad V_I = 50 \quad V_P = 4000$$

$$7. I_{\text{eff}} = \hat{I}/\sqrt{8} = 0,354 \text{ A}$$

Abschnitt 7.4.5

$$1. \Delta B = 5,175 \cdot 10^{-14} \text{ T}$$

Abschnitt 8.2.1

$$1. \Delta t = 0,1155 \text{ s} \quad 3. 10^{-7} = 10^{-5} \%$$

Abschnitt 8.2.2

$$1. 5 \cdot 10^{-11} = 5 \cdot 10^{-9} \%$$

$$2. \text{ a) } \Delta m = mgR_E h/[c_0^2(R_E + h)] = 1,1 \cdot 10^{-9} \text{ kg} \quad \text{ b) } \Delta m = mgR_E/c_0^2 = 7 \cdot 10^{-7} \text{ kg}$$

$$3. \Delta m = cm\Delta T/c_0^2 = 6,1 \cdot 10^{-9} \text{ kg} \quad 5. \text{ a) } 0,989c_0 \quad \text{ b) } 0,08c_0$$

$$6. \tan \gamma = v^2 / \left(2c_0^2 \sqrt{1 - v^2/c_0^2} \right)$$

Abschnitt 8.2.3

$$1. \text{ a) } (v/c_0)^2/2 = 2,22 \cdot 10^{-15} \quad \text{ b) } 5 \cdot 10^{-9}$$

$$2. \text{ a) } F_{\text{el}}/l = 4,26 \cdot 10^{-8} \text{ N/m; } F_{\text{m}}/l = 5 \cdot 10^{-10} \text{ N/m} \quad \text{ b) } F_{\text{el}}/F_{\text{m}} \approx 85$$

3. Weil bei technisch üblichen Strömen sehr, sehr große elektrische Ladungen bewegt werden.

Einheiten und Einheitensysteme

Das Messen einer physikalischen Größe bedeutet stets deren Vergleich mit einer willkürlich vereinbarten Einheitsgröße, kurz einer „Einheit“. Grundsätzlich könnte man hierbei für jede Größe eine Einheit festlegen, die durch eine Eigenschaft eines bestimmten Körpers oder einen charakteristischen Naturvorgang gegeben ist. So könnte man z. B. die Ladung des Elektrons als Einheit der elektrischen Ladung, die Beschleunigung des freien Falles an einem bestimmten Ort als Einheit der Beschleunigung oder die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit als Einheit der Geschwindigkeit definieren. Nun liegen jedoch die Definitionsgleichungen, welche die einzelnen Größen miteinander verknüpfen, fest. Daher ergäbe sich in der Praxis der große Nachteil, dass in allen diesen Gleichungen unbequeme und schlecht zu behaltende Zahlenfaktoren auftreten würden.

Um dies zu vermeiden hat man sog. Einheitensysteme oder Maßsysteme entwickelt, in denen sämtliche Einheiten so aufeinander abgestimmt sind, dass alle Verknüpfungsfaktoren gleich „eins“ werden. Solche Einheitensysteme heißen „kohärent“¹⁾.

Zur Erzielung dieser „Kohärenz“ definiert man alle physikalischen Größen als Potenzprodukte weniger „Grund“- oder „Basisgrößen“, sodass nur noch deren Einheiten als „Basiseinheiten“ willkürlich vereinbart zu werden brauchen. Die Einheiten aller übrigen „abgeleiteten Größen“ ergeben sich dann als Potenzprodukte dieser Basiseinheiten.

Das eine physikalische Größe bestimmende Potenzprodukt aus den Grundgrößen heißt Dimension. Diese ist unabhängig vom Maßsystem.

Die Dimension der Geschwindigkeit z.B. ist gleich Länge \times Zeit⁻¹.

Eine Einheit ist ein bestimmtes Potenzprodukt aus den Basiseinheiten.

Die Einheit der Geschwindigkeit ist z.B. gleich Meter \times Sekunde⁻¹.

Internationales Einheitensystem (Systeme International d'Unités, SI)

In diesem Buch wird das internationale Einheitensystem, SI, benutzt. Seine Grundgrößen sind Länge L, Masse M, Zeit Z, elektrischer Strom I, Temperatur T, Lichtstärke S und Stoffmenge N mit den Basiseinheiten Meter m, Kilogramm kg, Sekunde s, Ampere A, Kelvin K, Candela cd und Mol mol. Die Definition der Basiseinheiten ist in den entsprechenden Abschnitten dieses Buches beschrieben. Alle übrigen Definitionen enthält Tafel A 3.

Technisches Einheitensystem der Mechanik

In der Technik, vor allem im Maschinenbau, verwendete man früher noch das sogenannte Technische Einheitensystem der Mechanik²⁾. Da dieses keine kohärenten elektrischen Einheiten besitzt, ist es unzweckmäßiger als das Internationale Einheitensystem. Tafel A4 zeigt die wichtigsten Größen und Einheiten.

Zentimeter-Gramm-Sekunde-System, cgs-System

Gelegentlich, besonders in der theoretischen Physik, findet man noch Angaben in sogenannten cgs-Einheiten. Die Grundgrößen sind hier Länge, Masse und Zeit mit den Einheiten Zentimeter cm, Gramm g und Sekunde s. Die abgeleitete Einheit der Kraft $g\text{ cm s}^{-2}$ heißt dyn.

$$1\text{ dyn} = 1\text{ g cm s}^{-2}$$

Die abgeleitete Einheit der Arbeit dyn cm heißt erg.

$$1\text{ erg} = 1\text{ dyn cm}$$

¹⁾ Lat. cohaere = zusammenhängen.

²⁾ In der Bundesrepublik Deutschland ist es seit dem 1.1.1978 nicht mehr zulässig.

Mit

$$1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$$

und

$$1 \text{ g} = 10^{-3} \text{ kg}$$

lässt sich leicht die Beziehung zum SI herstellen. Zum Beispiel ist

$$1 \text{ Newton} = 10^3 \text{ g} \cdot 10^2 \text{ cm s}^{-2} = 10^5 \text{ dyn}$$

und

$$1 \text{ Joule} = 10^5 \text{ dyn} \cdot 10^2 \text{ cm} = 10^7 \text{ erg}$$

Systemfreie Einheiten

Aus historischen Gründen sind für viele Größen noch Einheiten gebräuchlich, die weder mit denjenigen der obengenannten Maßsysteme noch untereinander kohärent sind. Sie sind daher untereinander mit Umrechnungsfaktoren verknüpft, die verschieden von „eins“ sind. Die Tafeln A4 bis A6 enthalten die wichtigsten systemfreien Einheiten. Ihre Definitionen entnehme man den einschlägigen Abschnitten dieses Buches.

Tafeln

Tafel A3 Internationales Einheitensystem

Größe	Formelzeichen	Definitionsgleichung	Dimension	Einheit
Länge	s	Grundgröße	L	m Meter
Masse	m	Grundgröße	M	kg Kilogramm
Zeit	t	Grundgröße	Z	s Sekunde
el. Strom	I	Grundgröße	I	A Ampere
Temperatur	T	Grundgröße	T	K Kelvin
Lichtstärke	I	Grundgröße	S	cd Candela
Stoffmenge	ν	Grundgröße	N	mol Mol
Fläche	A	$A = s^2$	L^2	m^2
Volumen	V	$V = s^3$	L^3	m^3
Geschwindigkeit	v	$v = \Delta s / \Delta t$	LZ^{-1}	m/s
Beschleunigung	a	$a = \Delta v / \Delta t$	LZ^{-2}	m/s^2
Kraft	F	$F = ma$	MLZ^{-2}	$kgm/s^2 = N$ Newton
Impuls	p	$p = mv$	MLZ^{-1}	kg m/s
Arbeit, Energie	W	$W = Fs$	ML^2Z^{-2}	N m = J Joule
Leistung	P	$P = \Delta W / \Delta t$	ML^2Z^{-3}	N m/s = W Watt
Frequenz	f	$f = \text{Zahl}/\text{Zeit}$	Z^{-1}	1/s = Hz Hertz
Brechkraft	D	$D = 1/\text{Brennweite}$	L^{-1}	1/m = dpt Dioptrie
Winkel	φ	$\varphi = \text{Bogenlänge}/\text{Radius}$	$L/L = 1$	1 = rad Radiant
Winkelgeschwindigkeit	ω	$\omega = \Delta\varphi / \Delta t$	1/Z	1/s = rad/s (hier nicht gleich Hz!)
el. Ladung	Q	$Q = It$	IZ	As = C Coulomb
el. Spannung	U	$U = W/Q$	$ML^2Z^{-3}I^{-1}$	J/C = V Volt
el. Feldstärke	E	$E = F/Q$	$MLZ^{-3}I^{-1}$	N/C = V/m
el. Widerstand	R	$R = U/I$	$ML^2Z^{-3}I^{-2}$	V/A = Ω Ohm
el. Kapazität	C	$C = Q/U$	$M^{-1}L^{-2}Z^4I^2$	C/V = F Farad
magn. Fluss	Φ	$\Phi = Ut$	$ML^2Z^{-2}I^{-1}$	Vs = Wb Weber
magn. Induktion	B	$B = E/v$	$MZ^{-2}I^{-1}$	Wb/m ² = T Tesla
magn. Erregung	H	$H = NI/l$	$L^{-1}I$	A/m
Induktivität	L	$L = N\Phi/I$	$ML^2Z^{-2}I^{-2}$	Vs/A Henry
Wärme	Q	$Q = \text{Energie}$	ML^2Z^{-2}	J Joule
Wärmekapazität	C	$C = \Delta Q / \Delta T$	$ML^2Z^{-2}T^{-1}$	J/K
Entropie	S	$S = Q/T$	$ML^2Z^{-2}T^{-1}$	J/K
Aktivität	A	$A = \text{Zahl}/\text{Zeit}$	Z^{-1}	1/s = Bq Becquerel
Energiedosis	D	$D = W/m$	L^2Z^{-2}	J/kg = Gy Gray
Ionendosis	J	$J = \Delta Q / \Delta m$	IZM^{-1}	C/kg
Äquivalentdosis	D_q	$D_q = qD$	L^2Z^{-2}	J/kg = Sv Sievert

Tafel A4 Technisches Einheitensystem der Mechanik

Größe	Formelzeichen	Definitionsgleichung	Dimension	Einheit	
Länge	s	Grundgröße	L	m	Meter
Kraft	F	Grundgröße	K	kp	Kilopond
Zeit	t	Grundgröße	Z	s	Sekunde
Fläche	A	$A = s^2$	L^2	m^2	
Volumen	V	$V = s^3$	L^3	m^3	
Geschwindigkeit	v	$v = \Delta s / \Delta t$	LZ^{-1}	m/s	
Beschleunigung	a	$a = \Delta v / \Delta t$	LZ^{-2}	m/s^2	
Masse	m	$m = F/a$	$KL^{-1}Z^2$	$kp s^2/m = TME^1)$	
Impuls	p	$p = mv$	KZ	kp s	
Arbeit (Energie)	W	$W = Fs$	KL	kp m	
Leistung	P	$P = \Delta W / \Delta t$	KLZ^{-1}	kp m/s	75 kpm/s = 1 PS

¹⁾ TME = Technische Massen-Einheit

Zur Umrechnung der SI-Einheiten in die des Technischen Einheitensystems genügt die Gleichung

$$1 \text{ kp} = 9,80665 \text{ N, angenähert } 1 \text{ kp} = 9,81 \text{ N}$$

Daraus ergibt sich z.B. 1 TME = 9,81 kg usw.

Tafel A 5 Druckeinheiten

1 at = 1 kp/cm² (1 techn. Atmosphäre); 1 atm = 760 Torr (1 physik. Atmosphäre)

1 Torr = 1 mm HgS bei 0 °C

	N/m ² = Pa	mbar = h Pa	at	mm WS	atm	Torr
1 N/m ² = 1 Pa	1	10 ⁻²	1,02 · 10 ⁻⁵	1,02 · 10 ⁻¹	9,87 · 10 ⁻⁶	7,5 · 10 ⁻³
1 mbar = 1 h Pa	10 ²	1	1,02 · 10 ⁻³	1,02 · 10	9,87 · 10 ⁻⁴	7,5 · 10 ⁻¹
1 at	9,81 · 10 ⁴	9,81 · 10 ²	1	10 ⁴	9,68 · 10 ⁻¹	7,36 · 10 ²
1 mm WS	9,81	9,81 · 10 ⁻²	10 ⁻⁴	1	9,68 · 10 ⁻⁵	7,36 · 10 ⁻²
1 atm	1,01 · 10 ⁵	1,013 · 10 ³	1,033	1,033 · 10 ⁴	1	7,60 · 10 ²
1 Torr	1,33 · 10 ²	1,33	1,36 · 10 ⁻³	1,36 · 10	1,32 · 10 ⁻³	1

Tafel A 6 Arbeits-(Energie-)Einheiten

	J	kWh	kp m	kcal	eV
1 J = 1 N m = 1 Ws	1	2,78 · 10 ⁻⁷	1,102 · 10 ⁻¹	2,39 · 10 ⁻⁴	6,24 · 10 ¹⁸
1 kWh	3,6 · 10 ⁶	1	3,67 · 10 ⁵	8,60 · 10 ²	2,25 · 10 ²⁵
1 kpm	9,81	2,72 · 10 ⁻⁶	1	2,34 · 10 ⁻³	6,12 · 10 ¹⁹
1 kcal	4,19 · 10 ³	1,16 · 10 ⁻³	4,27 · 10 ²	1	2,61 · 10 ²²
1 eV	1,6 · 10 ⁻¹⁹	4,45 · 10 ⁻²⁶	1,63 · 10 ⁻²⁰	3,83 · 10 ⁻²³	1

Tafel A7 Leistungseinheiten = Energiestromeinheiten

	Watt	kp m/s	PS	cal/s	kcal/h
1 W = 1 J/s = 1 VA	1	$1,02 \cdot 10^{-1}$	$1,36 \cdot 10^{-3}$	$2,39 \cdot 10^{-1}$	$8,60 \cdot 10^{-1}$
1 kpm/s	9,81	1	$1,33 \cdot 10^{-2}$	2,34	8,43
1 PS	$7,355 \cdot 10^2$	$7,5 \cdot 10$	1	$1,76 \cdot 10^2$	$6,32 \cdot 10^2$
1 cal/s	4,19	$4,27 \cdot 10^{-2}$	$5,69 \cdot 10^{-3}$	1	3,60
1 kcal/h	1,16	$1,19 \cdot 10^{-1}$	$1,58 \cdot 10^{-3}$	$2,78 \cdot 10^{-1}$	1

Tafel A8 Einheiten der dynamischen und kinematischen Zähigkeit

1 Ns/m ²	=	10 P	P = Poise
1 m ² /s	=	10 ⁴ St	St = Stokes

Tafel A9 Einheiten des magnetischen Feldes

Größe	Formelzeichen	Einheit	
magnetische Erregung	H	$(10^3/4\pi) \text{ A/m} = 1 \text{ Oe}$	Oersted
magnetischer Fluss	Φ	$10^{-8} \text{ Vs} = 10^{-8} \text{ Wb} = 1 \text{ Mx}$	Maxwell
magnetische Induktion	B	$10^{-4} \text{ Vs/m}^2 = 10^{-4} \text{ Wb/m}^2 = 10^{-4} \text{ T} = 1 \text{ G}$	Gauß
magnetische Spannung	U_{magn}	$(10/4\pi) \text{ A} = 1 \text{ Gb}$	Gilbert

Physikalische Konstanten

Zahlenwerte nach V. Kose und W. Wöger (PTB): Neue empfohlene Werte von Fundamentalkonstanten Physikalische Blätter **56** (2000) Heft 3 und neuere Veröffentlichungen der PTB¹⁾.

Vakuum-Lichtgeschwindigkeit, definiert:	c_0	$= 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$ (exakt)
Gravitationskonstante	γ	$= 6,6742(10) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
absoluter Nullpunkt der Temperatur	0 K	$= -273,15 \text{ }^\circ\text{C}$ (nach DIN 1304)
Avogadro-Konstante	N_A	$= 6,0221415(10) \cdot 10^{26} \text{ kmol}^{-1}$
Boltzmannkonstante	k	$= 1,3806505(24) \cdot 10^{-23} \text{ N m K}^{-1}$
Normvolumen idealer Gase	V_0/ν	$= 22,413996(39) \text{ m}^3 \text{ kmol}^{-1}$
allgemeine Gaskonstante	R	$= 8,314472(15) \cdot 10^3 \text{ Nm kmol}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Stefan-Boltzmann-Konstante	σ	$= 5,670400(40) \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$
elektrische Feldkonstante	ϵ_0	$= 8,854187817 \cdot 10^{-12} \text{ A s V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
elektrische Elementarladung	e_0	$= 1,60217653(14) \cdot 10^{-19} \text{ As}$
Ruhemasse des Elektrons	m_{e0}	$= 9,109383826(16) \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Faraday-Konstante	F	$= 9,64853415(39) \cdot 10^7 \text{ A s kmol}^{-1}$
magnetische Feldkonstante	μ_0	$= 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ s A}^{-1} \text{ m}^{-1}$
spezifische Elektronenladung	e_0/m_{e0}	$= 1,758820174(71) \cdot 10^{11} \text{ A s kg}^{-1}$
Planck-Konstante (Wirkungsquantum)	h	$= 6,6260693(11) \cdot 10^{-34} \text{ J s}$
Ruhemasse des Protons	m_P	$= 1,67262171(29) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
atomare Masseneinheit	u	$= 1,66053886(28) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
relative Atommasse des Protons	m_P/u	$= 1,007276410(13)$
Massenverhältnis Proton–Elektron	m_P/m_{e0}	$= 1,83615267261(85) \cdot 10^3$
Ruhemasse des Neutrons	m_N	$= 1,67492716(13) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
relative Atommasse des Kohlenstoffisotopes ^{12}C	$A_{r^{12}\text{C}}$	$= 12$ (nach Definition)
Bohrscher Radius	r_1	$= 5,291772083(19) \cdot 10^{-11} \text{ m}$
Rydberg-Frequenz	$R_{\infty e}$	$= 3,289841960368(2) \cdot 10^{15} \text{ Hz}$
Bohrsches Magneton	μ_B	$= 9,27400899(37) \cdot 10^{-24} \text{ A m}^2$
Compton-Wellenlänge des Elektrons	λ_{Ce}	$= 2,426310215(18) \cdot 10^{-12} \text{ m}$
Quanten-Hallwiderstand:		
von Klitzing-Konstante, definiert	R_{K-90}	$= 2,5812807 \cdot 10^4 \text{ } \Omega$ (fehlerfrei)
Josephson-Konstante, definiert	K_{J-90}	$= 483597,9 \text{ GHz/V}$ (fehlerfrei)
Sommerfeld-Feinstrukturkonstante	α	$= 7,29735268(24) \cdot 10^{-3}$

¹⁾ PTB Physikalisch-Technische Bundesanstalt. Die eingeklammerten Zahlen geben die Messunsicherheit an.

Verzeichnis weiterführender Literatur

- [1] Brauch, W.; Dreyer, H. J.; Haacke, W.: Mathematik für Ingenieure. 10. Aufl. Wiesbaden 2003
- [2] Kohlrausch, F.: Praktische Physik (3 Bde.). 24. Aufl. Stuttgart 1996
- [3] Walcher, W.: Praktikum der Physik. 7. Aufl. Stuttgart 1994
- [4] Joos, G.: Lehrbuch der theoretischen Physik. 15. Aufl. Frankfurt 1989
- [5] Sommerfeld, A.: Vorlesungen über theoretische Physik (6 Bde.). Frankfurt–Zürich 1977/78
- [6] Döring, W.: Einführung in die theoretische Physik (3 Bde., Sammlg. Göschen). Berlin
- [7] Holzmann, G.; Meyer, H.; Schumpich, G.: Technische Mechanik (3 Bde.). 7. u. 8. Aufl. Stuttgart 1990/91
- [8] Doering, E.; Schedwill, H.: Grundlagen der Technischen Thermodynamik. 4. Aufl. Stuttgart 1994
- [9] Baehr, H. D.: Thermodynamik. 8. Aufl. Berlin 1992
- [10] Becker, R.: Theorie der Wärme. 3. Aufl. Berlin 1985
- [11] Czeslik, C.; Seemann, H.; Winter, R.: Basiswissen Physikalische Chemie. Stuttgart 2001
- [12] Frohne, H.; Löcherer, K. H.; Müller, H.: Grundlagen der Elektrotechnik. 19. Aufl. Wiesbaden 2002
- [13] Schröder, H.: Mehrdimensionale Signalverarbeitung (3 Bde.) Stuttgart 1998, 2000
- [14] Hugel, J.: Elektrotechnik. Stuttgart 1998
- [15] Küpfmüller, K.: Theoretische Elektrotechnik und Elektronik. 14. Aufl. Berlin 1993
- [16] Becker, R.; Sauter, F.: Theorie der Elektrizität (3 Bde.). Stuttgart 1970/73
- [17] Becker, R.; Döring, W.: Ferromagnetismus. 1959
- [18] Kiemle/Rößl: Einführung in die Technik der Holographie. Wiesbaden 1969
- [19] Bystron, K.; Borgmeyer, J.: Grundlagen der Technischen Elektronik. 2. Aufl. München–Wien 1990
- [20] Mayer-Kuckuk, T.: Atomphysik. 5. Aufl. Stuttgart 1997
- [21] Döring, W.: Einführung in die Quantenmechanik. 3. Aufl. Göttingen 1963
- [22] Dobrinski, P.: Schneller als das Licht. Praxis der Naturwissenschaften – Physik. Köln 2/51 Jhg. 2002
- [23] Rohe, K. H.: Elektronik für Physiker. 3. Aufl. Stuttgart 1987
- [24] Hellwege, K. H.: Einführung in die Festkörperphysik. 3. Aufl. Berlin–Heidelberg–New York 1988
- [25] Riehl, N., Hrsg.: Einführung in die Lumineszenz. München 1970
- [26] Tietze, U.; Schenk, Ch.: Halbleiter-Schaltungstechnik. 10. Aufl. Berlin u. a. 1993
- [27] Born, M.: Die Relativitätstheorie Einsteins. 5. Aufl. Berlin–Heidelberg–New York 1969
- [28] Münch, W. v.: Werkstoffe der Elektrotechnik. 9. Aufl. Wiesbaden 2000
- [29] Berber, J.: Bauphysik. 3. Aufl. Hamburg 1986
- [30] Ebert, H.: Physikalisches Taschenbuch. 5. Aufl. Braunschweig 1976
- [31] Kneubühl, F.: Repetitorium der Physik. 5. Aufl. Stuttgart 1994
- [32] Unger, H. G.: Elektromagnetische Wellen auf Leitungen. 3. Aufl. Heidelberg 1991
- [33] Kamke, D.; Walcher, W.: Physik für Mediziner. 2. Aufl. Stuttgart 1994
- [34] Buckel, W.: Supraleitung. 5. Aufl. Weinheim 1993
- [35] Kamke, D.; Krämer, K.: Physikalische Grundlagen der Maßeinheiten. Stuttgart 1977
- [36] Timmermann, C. C.: Lichtwellenleiter. Braunschweig–Wiesbaden 1981
- [37] Strahlenschutzverordnung (StrlSchV); im Bundesgesetzblatt Nr. 38 vom 26. 07. 2001
- [38] Reiner, M.: Rheologie in elementarer Darstellung. 2. Aufl. München 1970
- [39] Best, S. W.: Nachrichtenübertragung mit Lichtwellenleitern. Heidelberg 1983
- [40] Scharmann, A.: 60 Jahre Hanleeffekt. Bericht d. DPG-Frühjahrstagung. Gießen 1983
- [41] Magnus, K.; Popp, K.: Schwingungen. 6. Aufl. Wiesbaden 2002
- [42] Pupp, W.; Hartmann, H. K.: Vakuumtechnik – Grundlagen und Anwendungen. München 1991
- [43] Berber, J.; Kacher, H.; Langer, R.: Physik in Formeln und Tabellen. 9. Aufl. Wiesbaden 2003
- [44] Fricke, H.; Vaske, P.: Elektrische Netzwerke. 17. Aufl. Stuttgart 1982
- [45] Kneubühl, F. K.; Sigrist, M. W.: Laser. 4. Aufl. Stuttgart 1995
- [46] PTP-Bericht E-35. Braunschweig 1985
- [47] Aharonov, Y.; Bohm, D.: Phys. Rev. 115 (1959) 485
- [48] Heinloth, K.; Diekmann, B.: Energie. 2. Aufl. Stuttgart 1997

Sachverzeichnis

- α -Strahlung, -- Zerfall 547
3-Niveau-Systeme 539
4-Niveau-Systeme 540
Abbildung 354, 358ff., 365, 368f., 373
Abbildungsfehler 365, 367ff.
Abbildungsgleichungen 364, 368
Abbildungsmaßstab 355, 364
Abklingkonstante 390f.
Ablösearbeit 206, 281
Absorption, Absorptionsgrad 215
Absorptionsspektren 506
Abstrahlung 215
Achsen, freie 114
actio = reactio 56
Adaption 368
Adhäsion 130
adiabatische Zustandsänderung 194
Aggregatzustände 200ff.
Akkommodieren 368
Aktivität 519, 548, 567, 57f.
Akzeptoren 596, 643
D'Alembert 63
D'Alembertsches Prinzip 63
Allgemeine Bewegung eines Massenpunktes 45
Alkalispektren 520
Amorphe Stoffe 574
Ampere 262
Analysator 488
Anhangskräfte 130
Anlaufstrom 284, 495
Anschwingbedingung 394
Antiferromagnetismus 331
Aperiodische Dämpfung 391, 393
Äquipotentialfläche 241
Äquivalent, elektrochemisches 277
Äquivalentdosis, -- leistung 572f.
Äquivalenz von Masse und Energie 665
Arbeit 65
– bei Drehbewegungen 101
– elektrische 274
Arbeitsdiagramm 68
Archimedes, Gesetz des 129
Astigmatismus 365ff.
Aston 554
Asynchronmotor 340, 349
Atomare Masseneinheit 173
Atombindung 581
Atomhülle 323
Atomhülle, -kern 502
Atommasse, relative 174f.
Atomuhr 19
Aufenthaltswahrscheinlichkeit 534
Aufdruckkraft 128
Auflösungsgrenze 482f., 484
Auftriebsbeiwert 155
Auftriebskraft 129
– dynamische 155
Augenempfindlichkeit 457
Augenlinse 367ff.
Auger, – Effekt 523
Ausleuchten 640
Auslösebereich 552
Äußere Reibung 59
Äußerer Photoeffekt 495
außerordentlicher Strahl 488
Austauschkraft 582
Austritt von Elektronen 243
Austrittsarbeit 205, 207, 281, 283
Auswahlregel 517, 521
Avogadro, Gesetz von 175
Avogadro-Konstante 175
Bahnbeschleunigung 41
Bahngeschwindigkeit 36
Balkenwaage 53
Balmerserie 503
Bandenspektren 639
Bandfilter 414
Bandgenerator 247
Bar 124
Barkhausen-Effekt 330
Barn 564
Barometrische Höhenformel 137
Basis 606
Beleuchtungsstärke 455
Bernoullische Gleichung 141
Berührungsspannung 281
Beschleunigung 24
Beschleunigungsarbeit 67
Besetzungsdichte 536
Besetzungs-Inversion 539
Betatron 309
Beugungsfigur 482
Beweglichkeit 218
Beweglichkeit von Ladungsträgern 267
Bewegung 18
–, gleichförmige 23
–, gleichmäßig beschleunigte 24
–, ungleichförmige 24
–, ungleichmäßig beschleunigte 28
Bewegungsenergie der Moleküle 179
Bildverstärker 650
Bindung, metallische 581
Binnendruck 197
Biologische Wirkung 570
Biot-Savartsches Gesetz 302, 336
Blasenammer 551
Blendenzahl 369
Blindleistung 346
Blindwiderstand 346
Bodendruck 126
Bodendruckkraft 128
Bogenentladung 293
Bohrscher Radius 511
Bohrsches Atommodell 508
Boltzmannfaktor 206, 284
Boltzmannkonstante 172, 451
Bose 517
Boson 517ff., 537
Boyle-Mariottesches Gesetz 135
Brackettserie 503
Bragg 476
Braunsche Röhre 288, 649
brechende Kante 360
brechender Winkel 462
Brekraft 361, 365, 368
Brechungsdispersion 465, 468
Brechzahl 356ff., 364f., 368

- Bremsgitter 288
 Bremspektrum 522
 Bremsweg 28
 Brennelemente, -stäbe 568
 Brennpunkt 354, 360ff., 370ff.
 Brennstoffzelle 279
 Brewsterscher Winkel 490
 Brinell 686
 Brownsche Bewegung 176f.
 Brutreaktor 569
- Candela** 454
 Carnotscher Kreisprozess 221
 Celsiusskala 164f.
 Čerenkov-Strahlung 486
 Chadwick 553
 Charakteristisches Spektrum 522
 Chladni-Figuren 431
 Cholesterische Phase 578
 Compton, -effekt 498, 547
 Core 568
 Coriolis 107
 Corioliskraft 106
 Cooper-Paare 617
 Coulombsches Gesetz 235f.
 Curie 549
 Curie-Temperatur 260, 330f.
- Daltonsches Gesetz** 206
 Dampf 197
 Dampf, trocken gesättigter, – überhitzter 199
 Dampfdruck 202f.
 Dämpfungskonstante 389
 Dauermagnete, supraleitende 619
 Davisson 498
 De Broglie 497, 523
 Debye 476
 Debye-Scherrer-Verfahren 478
 Defekt 576
 Depolarisator 279
 Diamagnetismus 322f.
 Diaskop 373
 Dichroismus 490
 Dichte 54
 Dielektrikum 253ff.
 Dielektrizitätskonstante 257
 Dielektrizitätskonstante, relative 256
 Dielektrizitätszahl 256ff.
 Diesel-Motor 224
- Diffusion 218f.
 Diffusionskoeffizient 218
 Diffusionsspannung, -strom 598
 Dipol, elektrischer 254
 Dipolmoment, elektrisches 254
 Dirac 534
 Dispersion 463ff., 467f., 494
 Dissoziation, elektrolytische 275
 Divergenz 354f., 362, 371
 Donatoren 595
 Doppelbasisdiode 611
 doppelbrechend 488f., 492
 Dopplereffekt 458, 486f., 670
 Doppler-Radar 671
 Dopplerverbreiterung 487
 Dosimeter 572
 Dosiskonstante 572
 Drehbewegungen, Dynamik der 91
 Dreheiseninstrument 264
 Drehimpuls 104f., 634
 Drehkristallverfahren 478
 Drehmoment 98
 Drehsinn 43
 Drehspulinstrument 264
 Drehstrom 349
 Drehzahl 27
 Driftgeschwindigkeit 218, 266
 Druck 124
 –, kritischer 198
 –, statischer 140
 Druckaufnehmer 260
 Druckausbreitung 125
 Druckmesser 127
 Druckwasserreaktor 568
 Druckwiderstandskraft 157
 Dualismus von Wellen und Teilchen 494ff.
 Durchflutungsgesetz 301, 335
 Durchschnittsgeschwindigkeit 21
 durchtunneln 529, 555, 557
 Dynamik der Drehbewegungen 91
 – – geradlinigen Bewegung 49
 –, relativistische 684
 dynamische Auftriebskraft 155
 – Querkraft 155
 – Streuung 578
 – Zähigkeit 147
- ebenes Strichgitter** 472
 Effektive Zustandsdichte 593
- Effektivwert 348
 Eigenfunktion 526f., 53ff.
 Eigenleitung 591
 Eigenleitungsdichte 593
 Eigenwert 526, 532ff.
 Einheiten 689
 Einschwingzeit 396, 396f.
 Einspritzverhältnis 224
 Einstein 654
 Eisenkern 342
 Elastische Verformung 56
 Elastizitätsmodul 417, 422, 425, 584
 elektrische Energiedichte 251
 – Energieeinheit 286
 – Erregung 244
 – Feldkonstante 236
 – Feldstärke 237ff.
 – Influenz 246
 – Ladung 233, 336
 – Leitfähigkeit 265
 – Leitung 588f.
 – Orientierungspolarisation 255f.
 elektrische Spannung 239
 elektrische Suszeptibilität 257
 elektrische Verschiebungspolarisation 254
 elektrischer Dipol 254
 – Erregungsfluss 245
 – Strom 261ff.
 – Widerstand 265
 elektrisches Feld 336f.
 – Potential 239f.
 – Wirbelfeld 333
 elektrochemisches Äquivalent 277
 Elektrode 275
 Elektrolumineszenz 646, 650
 Elektrolyse 275
 Elektrolyt 275
 elektrolytische Polarisation 279
 elektromagnetische Induktion 310ff., 337ff.
 – Kraft 693
 Elektromotoren 340f.
 Elektronen 236
 Elektronengeschwindigkeit 268
 Elektronenlinse 309
 Elektronenneutrino 560
 Elektronenröhre 287
 Elektronenspin 516
 Elektronenstrahl 287

- Elektronenstrahlröhre 288
 Elektronenvervielfacherkanal 286
 Elektronvolt 286
 Elektroskop 235
 Elektrostriktion 259
 Elementarladung 236, 251
 Elementarzelle 575
 Elemente, galvanische 278
 Elongation 379
 Emissionsgrad 215
 Emitter 606
 Empfindlichkeit des Gehörs 439
 Energie 69
 – des elektrischen Feldes 250f.
 Energiebändermodell 586
 Energie des Magnetfeldes 317
 –, kinetische 71
 –, potentielle, der Lage 70
 Energiedichte 423
 –, elektrische 251
 –, magnetische 318
 Energiedosis, – –leistung 571
 Energieeinheit, elektrische 286
 Energiesatz der Mechanik 71
 Energiestrom 63, 424
 Energiestromdichte 433f., 438, 448, 454
 Engler 151
 Entdämpfung 391, 393
 Enthalpie 186
 –, spezifische 187
 Entladung, selbständige 291
 –, unselbständige 290f.
 Entladungsformen 292
 Entropie 220ff., 225
 Entstehung der Jahreszeiten 122
 Ernst Abbe 482
 Erregung, elektrische 244
 –, magnetische 300f.
 Erregungsfluss, elektrischer 245
 Erstarrungswärme 201
 erster Hauptsatz der Wärmelehre 189ff.
 Excitonen 645
 Extinktionskoeffizient 493

Fabry-Perot-Resonator 541
 Fadenstrahlrohr 307
 Fallbeschleunigung 26
 Farad 248
 Faradaykonstante 277
 Faradaysches Gesetz 276
 Farben dünner Plättchen 474
 Farbtemperatur 452
 Federkonstante 56
 Federkraft 56
 Federwaage 58
 Feinstruktur 513, 515
 Feld, elektrisches 237ff.
 Feldemission 285
 Feldkonstante, elektrische 236
 –, magnetische 303
 Feldlinien, magnetische 296f.
 Feldlinse 371f.
 Feldstärke, elektrische 237f.
 Feldstrom 598
 Fermatsches Prinzip 462
 Fermi 517, 527f.
 Fermi-Dirac-Energieverteilung 587
 Fermi-Energie 587
 Fermion 517ff.
 Fernbereich 446ff.
 Fernrohr 371f.
 Ferrimagnetismus 331
 Ferrit 331
 Ferroelektrizität 260
 Ferromagnetismus 324ff., 329
 FET 609
 Ficksches Gesetz 218
 Fission 561
 Fitzgerald 656
 Fixpunkte 163f.
 Flächenladungsdichte 243
 Flächensatz 106
 Fliehkraftregler 93
 Fluidische Bauelemente 160
 Fluidität 147
 Fluoreszenz 453, 507, 641, 644
 Fluss, magnetischer 304
 Flussquant, magnetisches 618
 Flussschlauch 618
 Flusstransformator 630
 Flüssige Kristalle 576
 Fotodiode 603
 Fotoeffekt 495
 –, innerer 594
 Fotoelement 604
 Fotoemission 285
 Fotoferroelektrische Kristalle 260
 Fotokathode 286
 Fotometrie 453
 Fotowiderstand 594
 Fourier 403f.
 Franck-Hertz-Anregung 504
 Fraunhofersche Linien 506ff.
 Freie Achsen 114
 Freier Fall 24
 Freihändigfahren 118
 Freiheitsgrad der Energie-speicherung 182
 Frenkel 576
 Frenkel-Defekt 576
 Frequenzgang 397, 399f., 412
 Fundamentalschwingung 412
 Funkenentladung 293
 Funkenkammern 551
 Fusion 536, 561, 570

Galileitransformation 652
 Galvanische Elemente 278
 Galvanisieren 276
 Gas, ideales 135, 177f.
 Gasentladung 289ff.
 Gaskonstante, allgemeine 175
 –, spezifische 171
 Gastheorie, kinetische 177
 Gaußscher Satz 245, 240
 Gegeninduktion 318
 Gegeninduktivität 318, 393ff., 395
 Gehrke 473
 Geiger-Müller-Zählrohr 551
 Geräusch 436
 Germer 498
 Gesamtdrehimpuls 516
 Gesamtdruck 142
 Gesamtlichtstrom 457
 Geschwindigkeitsquadrat, mittleres 178
 Geschwindigkeit 19
 –, kritische 152
 –, mittlere 21
 Geschwindigkeiten, relativistische Addition von 661
 Geschwindigkeitsunabhängige Dämpfung 391
 Geschwindigkeitsverteilung 180
 Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm 21
 Gesetz des Archimedes 129
 – von Hagen Poiseuille 150
 Getriebe 103
 Gewichtskraft 53
 Gitterfehler 575
 Gitterkonstante 473
 Glanzwinkel 477

- Glasfaserverstärker 540
 Glaskörper 367
 gleichförmige Bewegung 23
 – Kreisbewegung 36
 Gleichgewicht, thermisches 165
 gleichmäßig beschleunigte
 Bewegung 24
 – – Kreisbewegung 42
 Gleichstrom-Generator 338f.
 Gleichzeitigkeit 657
 Gleitreibung 60
 Gleitreibungszahl 61
 Glimmentladung 292
 Glühemission 283f.
 Glühkathode 284
 Gradientenfasern 358
 Grauer Körper 216
 Gravimetrie 91
 Gravitation 84
 Gravitationsfeld 87, 336f.
 Gravitationsfeldstärke 84
 Gravitationsgesetz, -konstante
 84f., 86
 Gravitationskraft 53, 84
 Gravitationspotential 90
 Gravitationswechselwirkung 559
 Grenzflächenspannung 133
 Grenzfrequenz 495f., 500
 Grenzkontinuum 512
 Grenzschicht 148
 Größe, physikalische 20
 Größengleichung 20
 Grundgleichung des elektrischen
 Feldes 244
 Gruppengeschwindigkeit 463,
 466ff., 498
 Gunn-Effekt 612
 Gütefaktor 399

Haarhygrometer 210
 Hadronen 558, 560
 Haftreibung 59
 Haftreibungszahl 61
 Haftstellen 637
 Hagen 150
 Hahn 564
 Halbleiter 266
 –, organische 647
 Hall-Effekt, – – sonde 299
 Hall-Koeffizient, – – spannung
 300
 Hall-Widerstand 632, 636
 Harte Supraleiter 619
 hartmagnetische Stoffe 328
 Hauptebene 363, 365
 Hauptquantenzahl 509, 514ff., 533
 Hauptsatz, erster 189ff.
 –, zweiter 229ff.
 Hauptspannungsdifferenz 492
 Hauptstrahl 352, 366f.
 Hauptträgheitsachse 96
 Hauptträgheitsmoment 96
 Hautwirkung 344
 Härte 586
 Heisenbergsche Unbestimmtheit-
 relation 499f., 523, 527, 535,
 537
 Heißleiter 269
 Heißluftmotor 223
 Hellemptfindlichkeitsgrad 454
 Hertz 379f., 445, 504ff., 545
 Hitzdrahtinstrument 263
 Hochfeldsupraleiter 619
 Höhenformel, barometrische 139
 Höhenstrahlung 562
 Hologramm 475
 Hooke 57
 Hookesches Gesetz 57
 Hornhaut 367f.
 Hubarbeit 66
 Hüllenfluss 245
 Hydrodynamisches Paradoxon
 144
 Hydrostatisches Paradoxon 127
 Hygrometer 209 f.
 Hyperschall 441
 Hysterese, magnetische 327
 Hysteresschleife 326f.

Ideale Strömung 139
 ideales Gas 128, 177f.
 Immersion 483f.
 Impuls 76
 –, relativistischer 663
 – des Photons 496
 Induktion, elektromagnetische
 310ff., 337ff.
 Induktionsgesetz 314
 Induktionskonstante 303
 Induktionsspannung 312
 Induktionsspannungsstoß 312
 Induktionsspule 312
 Induktionsstrom 311
 induktiver Messwertwandler 339
 Induktivität 314, 344
 Inertialsystem 653
 Influenz 246
 Influenzkonstante 236
 Information und Entropie 227
 Informationsgehalt 227
 Infrarotstrahlung 450
 Infrerschall 435
 innere Energie 181f., 190
 – Reibung 146
 innerer Fotoeffekt 271, 594
 Integrierte Schaltungen 614
 Interferenzmuster 468, 471ff.,
 492, 498
 Interferometer 474
 Intrinsic-Dichte 593
 Inversionstemperatur 200
 Ion 253, 275
 Ionenbindung 581
 Ionendosis 571
 Ionendosisleistung 572
 Ionenquelle 293
 Ionisationskammer 551
 Ionisierungsarbeit 289
 Ionisierungsenergie 511
 Iris 367f.
 irreversible Vorgänge 220
 isobare Zustandsänderung 193
 isochore Zustandsänderung 193
 Isolatoren 590
 isotherme Zustandsänderung
 192
 Isotop 554

Jahreszeiten, Entstehung der
 122
 Josephson-Effekte 620f.
 Josephson-Kontakte 624
 Josephson-Wechselstrom-
 Effekte 623f.
 Joule 66
 Joulesche Wärme 274
 Joule-Thomson-Effekt 199

Kalorimeter 187
 Kältemischung 203
 Kamera 369
 Kanalstrahlen 292
 Kapazität 247ff., 345
 Kapazitätsdiode 603
 Kapillarität 134
 Kathode 275
 Kelvinskala 164
 Keplersche Gesetze 120f.
 Kernbindungsenergie 555

- Kernbrennstoff 566
 Kernexplosion 565
 Kernfusion 350
 Kernreaktor 566
 Kernspurplatten 551
 Kernstrahlung 546, 550, 552, 565
 Kerreffekt 489
 Kettenreaktion 565f., 569f.
 Kilogramm 52
 Kinematik 17
 – der Drehbewegung 36
 Kinematische Zähigkeit 147
 Kinetische Energie 71
 Kippschwingung 377, 404f.
 Kirchhoffsche Gesetze 272
 Kirchhoffsches Strahlungsgesetz 215
 Klangfarbe 436
 Klärpunkt 577
 Klemmenspannung 271
 Klitzing, von 630
 Knall 436
 Koaxialkabel 249
 Koerzitivverregung 327
 Kohärenz 274
 Kohärenzbedingung 470
 Kohärenzlänge 470
 Kohäsion 130
 Kollektor 339, 606
 Kollektormotor 340
 Kombination von Linsen 364
 Kompressibilität 126f., 136
 Kondensationswärme 205
 Kondensator 373
 Konkavspiegel 353ff., 365, 375
 Konvektion 211
 Konversionsrate 567
 Konvexspiegel 355f.
 Kopplung 395, 410ff.
 Kovolumen 197
 Kraft 50
 – elektromagnetische 667
 Kraftaufnehmer 260
 Kraftgesetz, lineares 57
 Kraftmesser 58
 Kraftstoß 79
 Kraftwirkung elektrischer Felder 251
 Kraftwirkung magnetischer Felder 307ff.
 Kräfte zwischen geladenen Platten 251
 Kräftepaar 99
 Kreisbewegung, gleichförmige 36
 –, gleichmäßig beschleunigte 42
 –, ungleichförmige 40
 Kreiselkompass 118
 Kreisprozesse 221ff.
 Kriechfall 391, 393
 Kristalldiode 270
 Kristalle 575f.
 –, flüssige 576
 Kristallmikrofon 260
 kritische Kopplung 413
 – Temperatur 198
 kritischer Druck, kritische Temperatur 198
 – Punkt 198
 Krümmungskreis 45
 Kühlmittel 567
 Kurzschlussstrom 272
 Kurzsichtigkeit 368

 Ladenburg 151
 Ladung, elektrische 233ff.
 Ladungstrennung 246
 Ladungsverteilung 242
 Ladungswolke 254
 Lambda-Sonde 614
 Landau 635
 Landau-Niveaus 635
 Länge 18
 Längenausdehnung 166
 Längswellen 417
 Laser 530, 536f., 541ff., 570
 Lasermaterie 536ff, 541
 Laserniveau 536, 539
 Laufzeitdispersion 466, 468, 498
 Lautheit 441
 Lautsprecher 342
 Lautstärkepegel 439
 Lecherleitung 418, 430, 446
 Leichtwasserreaktor 568
 Leistung 73
 – bei Drehbewegungen 101
 –, effektive 347f.
 Leistungsfaktor 348
 Leistungsverstärker 607
 Leistungszahl 232
 Leiter 237
 Leitfähigkeit, elektrische 265
 Leitungsband 589
 Leitwert 347
 –, elektrischer 265
 –, spezifischer 265
 Lenzsche Regel 311
 Leptonen 558, 560
 Leuchtdichte 456
 Leuchtelektron 515, 520
 Leuchtstofflampe 293
 Leuchtzentren 643
 Lichtausbeute 642
 Lichtleitfasern 359
 Lichtquant 496
 Lichtstärke 454
 Lichtstrom 455
 Lichtsumme 642
 Linde-Verfahren 199
 Linearbeschleuniger 562f.
 Linearer elektro-optischer Effekt 489
 Linearer Hertzscher Oszillator 445
 Lineares Kraftgesetz 57, 380ff., 403
 Linienspektren 502, 511, 522
 Linienspektrum 452, 465
 Lissajous-Figuren 409f.
 Logarithmisches Dekrement 390
 longitudinale Welle 417
 Lorentz 656
 Lorentzkraft 298, 308
 Lorentztransformation 655
 – für elektrische und magnetische Felder 666
 Löcherleitung 591
 LSA-Betrieb 613
 Luftdruck 136
 Luftfeuchtigkeit 208f.
 Lumen 455
 Lumineszenz 639f.
 Lumineszenzdiode 646
 Lummer 450, 473
 Lupe 369ff., 375
 Lux 455
 Lymanserie 503

 Magnetfeld 294ff.
 – der Erde 296
 magnetische Erregung 300f.
 – Feldkonstante 303
 – Feldstärke 298
 – Induktion 298f.
 – Polarisation 319f.
 – Spannung 304
 – Suszeptibilität 321
 magnetischer Dipol 306, 323f., 329

- magnetischer Fluss 304
 Magnetisches Bahnmoment 515
 – Feld 336f.
 – Felds, Größen des 297ff.
 – Flussquant 618
 – Moment 306f., 323f., 329ff., 337
 – Wirbelfeld 334
 Magnetisierung 319
 –, spontane, technische 329
 Magnetisierungskurve 325
 Magneto hydrodynamik 349
 Magneto resistiver Effekt 271
 Magneto striktion 330
 Magnetpole 296
 Magnus 156
 Magnus-Effekt 156
 Majoritäten 598
 Manometer 128
 Maschenregel 272
 Masse, schwere 84
 –, träge 50
 Massenanziehung 84
 Massendefekt 554f., 560
 Massenmittelpunkt 55
 Massenpunkt 55
 Massenspektrometer 554
 Massenträgheitsmoment 94
 Materie im elektrischen Feld 252
 mathematisches Pendel 385
 Maxwell-Boltzmann-Verteilung 180f.
 Maxwellsche Gleichungen 332ff.
 Mechanik 17
 Meißner 617
 Mendelejeff 518
 Mesophase 576
 Meson 555, 558
 Metallische Bindung 583
 metastabil 521, 539, 542
 Meter 18
 Meyer 518
 MHD-Generator 350
 Mikrofon 339
 Mikroskop 370ff.
 Millikan-Versuch 251
 Minoritäten 598
 Mischungstemperatur 189f.
 Mittenfrequenz 408
 Mittlere Geschwindigkeit 23
 Moderator 566
 Mohs 586
 Molekülkräfte 130
 Molekülmasse, relative 174f.
 Momentanbeschleunigung 26
 Momentangeschwindigkeit 21
 Momentanleistung 348
 Momentanverteilung 419f.
 MOS-FET 610
 Mößbauer, -effekt 557
 Mößbauereffekt 487
 Multiplikationsfaktor 565ff.
 Myon, – –neutrino 560

 Nahbereich 446
 Nassdampf 199
 Natriumdampflampen 293
 Nebelkammer 210, 550
 Nebenquantenzahl 513ff., 518ff., 534
 Néel-Temperatur 331
 Negentropie 229
 Nematische Phase 578
 Netzebenen 476
 Netzhaut 367ff.
 Netzwerk 272
 Neutrino 558
 Neutron 553
 Neutroneneinfangquerschnitt 564
 Newton 53
 Newtonsche Axiome 49
 – Ringe 474
 Nichtleiter 237
 Nichtlineares Kraftgesetz 403
 N-Leitung 595
 Nordpol 296
 Normalbeschleunigung 47
 Normalkraft 59
 Normal-Wasserstoff-Elektrode 278
 Normdichte 136, 174
 Normvergrößerung 370
 NTC-Widerstand 594
 Nukleon, Nuklid 554
 Nullpunktsenergie 527, 556
 numerische Apertur 358
 Nutation 113
 Nutationskegel 114
 Nuttall 557

Oberflächenenergiedichte 131
 Oberflächenspannung 131
 Obertöne 436
 Objektiv 369ff.
 Ochsenfeld 617
 Ohmsches Gesetz 265ff.
 Oktett 519
 Okular 370ff.
 OLED 647
 optisch aktiv 491
 – anisotrop 488
 – dichter, – dünner 357
 optische Achse 354, 362, 364, 489
 Optoelektronik 650
 ordentlicher Strahl 488
 Organische Halbleiter 647
 Organische Leuchtdiode 647
 Orientierungspolarisation, elektrische 255f.
 Orientierungsquantenzahl 516, 535
 Ortsvektor 45
 osmotischer Druck 219
 Oszilloskop 288
 Otto-Motor 224
 Oxidkathode 284

Paarbildung 547, 557, 592
 Paradoxon, hydrodynamisches 144
 –, hydrostatisches 127
 Parallelschaltung 347
 – von Kondensatoren 249
 – von Widerständen 272
 Paramagnetismus 323
 Parametrisch angeregte Schwingungen 401
 Partialdruck 206
 Pascal 124
 Paschen-Gesetz 294
 Paschenserie 503
 Pauli 518, 558
 Pauli-Prinzip 324
 Peltier-Effekt 282
 Permeabilitätszahl 320, 327
 Permittivität 257
 Permittivitätszahl 257
 Pérot 541
 perpetuum mobile erster Art 191
 – – zweiter Art 229
 Phase, cholesterische 578
 –, nematische 578
 –, smektische 578
 Phasen 200
 Phasengeschwindigkeit 416, 422
 Phasenwinkel 344

- Phosphoreszenz 641, 645
 Photodiode 603
 Photoeffekt 547
 –, innerer 594
 Photoelement 604
 Photoemission 285
 Photoferroelektrische Kristalle 260
 Photokathode 286
 Photometrie 453
 Photon 496, 505
 Photowiderstand 594
 Physisches Pendel 384
 Piezoelektrischer Effekt 259
 Piezoelektrizität 259
 Pinch-Effekt 350
 pinning-Zentren 619
 Plancksche Konstante 451, 496, 500
 – Strahlungsformel 451
 Plancksches Wirkungsquantum 496
 Planetenbewegung 120
 Plasma 292, 350
 Plattenkondensator 248
 P-N-Grenzschicht 597
 Pockelseffekt 489
 Poiseuille 150
 Poisson 585
 Poissonsche Zahl 585
 Polardiagramm 157
 Polarisierung 257
 Polarisierung, elektrolytische 279
 –, magnetische 319f.
 Polarisationsfilter 487ff.
 Polarisationsrichtung 417, 463, 487, 490f.
 Polarisator 488
 Polykristalle 576
 polytrope Zustandsänderung 195
 positive Säule 292
 Positron 547, 558, 562
 Potential, elektrisches 239f.
 Potentialdifferenz 240
 Potentialtrichter 90
 Potentielle Energie 70, 88
 Poyntingerscher Vektor 434, 448
 Prandtl 143
 Prandtl'sches Staurohr 143
 Präzession 117
 Pringsheim 450
 Projektor 373
 Proportionalbereich, -kammer 552
 Proton 553, 556, 557, 558, 559, 560, 561
 Prozessgröße 183
 Pseudoskopisch 476
 Psychrometer 209
 Pumpen 521, 539, 543
 Pumpfrequenz 401f.
 Punktladung 238
 Pupille 367, 372
 Pyroelektrizität 259

Q-switch 491
 quadratischer elektro-optischer Effekt 489
 Quantenausbeute 642
 Quanten-Halleffekt 266
 Quark 560
 Quecksilberhochdrucklampe 293
 Quellenspannung 271
 Querwellen 417

Radialbeschleunigung 36
 Raketenantrieb 350
 Raketengleichung 78
 Randstrahlen 352, 366, 373
 Rasterkraftmikroskop 545
 Rastertunnelmikroskop 544
 Raumaufdehnung 167f.
 Raumladung 575
 Raumladung 284
 Raumladungsdichte 242
 räumliches Punktgitter 476
 Reale laminare Strömung 148
 – Strömung 146
 Rechtsschraubenregel 43
 reelles Bild 355, 361f., 373, 375
 Reflexionsgrad 216
 Regelstäbe 567
 Reibung, äußere 59
 – der Bewegung 60
 – – Ruhe 59
 –, innere 146
 Reibungsarbeit 67
 reibungsfreie stationäre Strömung 139
 Reihenschaltung 346
 Reihenschluss 340
 reine Schwebung 406, 408
 Reinheit von Halbleitermaterialien 597
 Rekombination 291
 Relativistische Dynamik 661
 Remanenz 326
 Resonanzfluoreszenz 506f., 557
 Resonanzkatastrophe, – –kurve 397
 Resonanzüberhöhung 399
 reversible Vorgänge 220ff.
 Reynoldssche Zahl 158
 Richardson-Gleichung 284
 Richtgröße 382f., 386, 390
 Richtung von Bewegungen 29
 Richtungsquantelung 533
 Richtungsquantenzahl 515, 534
 Riesenmagnetowiderstand 331
 Ritz 503
 Röntgenspektren 522
 Rollreibung 61
 Rollreibungslänge 61
 Rollreibungszahl 61
 Rotationsenergie 94
 Rotor 339
 Rotverschiebung 486, 671
 Rowlandgitter 472
 Rubinlaser 649
 Rückkopplung 394
 Rückstellkräfte 379
 Rückstoß 78
 Ruheenergie 665
 Ruhemasse 663
 Rutherford 501, 508, 561
 Rydberg 503

 Sättigungsdampfdruck 204
 Satellitenparadoxon 123
 Satz von Kutta-Jukowsky 156
 Schalenmodell des Atoms 330
 Schalldämmung 441
 Schalldruckamplitude 437ff.
 Schallintensität, – –messung 438
 Schallpegel 438ff., 454
 Schallstrahlungsdruck 437
 Schaltungen, integrierte 614
 Schärfentiefe 369
 Scheinleistung 348
 Scheinkräfte 63
 Scheinwiderstand 346
 Scheitelspannung 338
 Scheitelwert 387
 Scherrer 476
 Scherung 585
 Schirmgitter 288

- Schmelzpunkt 201
 Schmelztemperatur 201
 Schmelzwärme 201
 Schnelle 416
 Schottky 576
 Schottky-Defekt 576
 schräger Wurf 33
 Schrödinger, – –gleichung
 524ff., 531ff.
 schwache Wechselwirkung 558
 schwarzer Körper 216
 Schwebungsfrequenz 408
 Schwellenergie 206, 284
 schwere Masse 84, 336
 Schweredruck 126
 Schwerefeld 87
 Schwerependel 384, 388, 401, 410
 Schwerpunkt 55
 Schwerewasserreaktor 568
 Seebeck-Effekt 281
 Seebeckkoeffizient 282
 Seitendruckkraft 129
 Sekundärelektronenemission
 286f.
 Sekundärelektronen-
 Vervielfacher 286
 Sekundärelement 280
 Sekunde 19
 selbständige Entladung 291
 Selbstinduktion 315
 senkrechter Wurf 32
 Seriengesetze 503
 Serienschaltung von Kondensatoren 250
 – – Widerständen 272
 Siedetemperatur 204
 Siedewasserreaktor 568
 Sievert 572
 Signalgeschwindigkeit 466, 468
 Sinktiefe 134
 Skineffekt 344
 Smektische Phase 578
 Snelliussches Brechungsgesetz
 356
 Sommerfeld, -sche Erweiterung
 513f., 534
 Sonnenbatterie 604
 Spaltprodukte 567
 Spannung, elektrische 239
 –, magnetische 304
 Spannungs-Dehnungs-
 Diagramm 584
 Spannungsenergie 70
 Speichervaraktor 602
 Spektralanalyse 468
 Spektralapparat 465
 Sperrschicht 600
 Sperrschicht-Kapazität 602
 Sperrschicht-Varaktor 603
 Sperrschichtzähler 553, 603
 Sperrstrom 601
 Sperrstromträchtigkeit 602
 spezifischer Leitwert 265
 Spezifisches Volumen 135
 Spiegelung 352f., 373
 Spin, – –quantenzahl 516f.
 Sprungtemperatur 616
 SQUID 628
 Stäbchen 367
 Stabmagnet 296
 Standardmodell 560
 starke Wechselwirkung 558
 Starrer Körper 94f.
 Statischer Druck 140
 statisches Voltmeter 247
 Staudruck 142
 Staurohr, Prandtl'sches 143
 Stefan-Boltzmann-Gesetz 216,
 451
 Steighöhe 134
 Steinerscher Satz 97
 Steuergitter 288
 stimulierte Emission 538
 Stirlingscher Kreisprozess 222
 Stoffmenge 173
 Störleitung 595f.
 Störstelle 576
 Stoßgesetze 80
 Stoßionisation 291
 Strahlstärke 454
 Strahlung 214 ff.
 Strahlungsdosis 571
 Strahlungsdruck 434ff., 448f.,
 496f.
 Straßmann 564
 Streckgrenze 584
 Strom, elektrischer 261ff.
 Strombahnen 139
 Stromdichte, elektrische 262
 Stromlinien 139
 Stromrichtung, elektrische 262
 Stromwärme 263, 274
 Stromwirkungen 295
 Strömung, ideale 139
 –, reale 149
 –, – laminare 149
 –, reibungsfreie stationäre 139
 –, turbulente 152
 Strömungen, ähnliche 158f.
 Strömungswiderstand 152
 Südpol 295
 Superstrahler 540
 Supraleitende Dauermagnete 619
 Supraleitung 268, 616f.
 Suszeptibilität, elektrische 257
 –, magnetische 321
 Symmetrischer Strahlengang
 360
 Synchronmotor 340
 Synchrotron 563
 Szintillationszähler 552
 Tangentialbeschleunigung 47
 Tauchbahnen 515, 520
 Tauon, –neutrino 560
 Taupunkt 209
 Teilchentransport 217
 Temperatur 162ff., 181f.
 –, kritische 198
 Temperaturkoeffizient des elek-
 trischen Widerstandes 269
 Temperaturskala, thermo-
 dynamische 177, 222
 Tesla 298
 Theorem von Torricelli 144
 thermische Maschinen 231
 – Neutronen 566
 thermodynamische Temperaturskala 176, 222
 thermoelektrischer Effekt 281
 Thermokraft, – –spannung 282
 Thermometer 164
 Thomsongleichung 347
 Thyristor 610
 tilgen 640
 Tochttersubstanz 549
 Toleranzdosis 573
 Torsionswelle 417
 Totalreflexion 357f., 360, 373
 träge Masse 50
 Trägheitskraft 62
 Tragfläche 157
 Tragflügel 154, 156
 Transformator 342f.
 transversale Welle 417
 Triode 288
 Trockenbatterie 279
 Trockenelement 279
 T-S-Diagramm 230

- Tunneldiode 604
 Tunneleffekt 528

 Überschallknall 486f.
 Übersetzungsverhältnis 342
 Übersichtigkeit 368
 Ultraschall 435, 441f.
 Ultraschallerzeugung 260
 Ultraschneller Schalter 628
 Ultrastrahlung 453
 ultraviolette Strahlung 450, 453
 Umformer 341
 Umwandlungswärme 206
 ungestörte Überlagerung 30
 ungleichförmige Bewegung 24
 – Kreisbewegung 40
 ungleichmäßig beschleunigte
 Bewegung 28
 Unijunction-Transistor 611
 Unipolar-Transistor 608
 unreine Schwebung 406
 unselbständige Entladung 290
 UV-Strahlung 293

 v. Laue 476
 Valenzband 589
 Vakuumlichtgeschwindigkeit
 445
 van de Graaff-Generator 247
 Van der Polsche Differential-
 gleichung 395
 van der Waalsche Gleichung
 197
 VDR-Widerstand 271
 Vektorbosen 560
 Vektoren 29
 Venturi 143
 Venturidüse 134
 Verbrennungsmotoren 224
 Verbundene Gefäße 127
 Verdampfen 203ff.
 Verdampfungswärme 204
 Verdichtungsverhältnis 224
 Verflüssigung 199
 Veformung, elastische 56
 Verformungsarbeit 68
 Verkehrsradar 487
 Verlustwinkel 348
 Verschiebungspolarisation,
 elektrische 254
 Verzweigungsregel 272
 virtuelles Bild 355
 Viskosimeter 151

 Viskosität 147, 350
 Volt 241
 Voltasche Spannungsreihe 279
 Volumen, spezifisches 135
 Volumenänderung 167f.

 Waagerechter Wurf 30
 Wandverschiebung 329
 Wärme 183f.
 Wärmeäquivalent, mechani-
 sches 190
 Wärmedurchgangskoeffizient 214
 Wärmeenergie 183
 Wärmeinhalt 189
 Wärmekapazität 183f.
 –, molare 183
 –, spezifische 183f., 189
 Wärmekraftmaschine 231
 Wärmeleitfähigkeit 212, 270
 Wärmeleitung 213
 Wärmepumpe 232
 Wärmerohr 213
 Wärmeströmung, – –übergang
 21f.
 Wärmewiderstand 213
 wasserstoffähnliche Spektren 513
 Wasserstrahlpumpe 145
 Watt 73
 Weber 305
 Wechselspannung 338
 Wechselstrom-Generator 338f.
 Wechselstromkreise 343ff.
 weichmagnetische Stoffe 328
 weißer Körper 215
 Weißsche Bezirke 329
 Wellengruppe 459, 466, 479, 498
 Wellenwiderstand 424
 Wertigkeit 277
 Wheatstonesche Messbrücke 273
 Widerstand 344
 –, elektrischer 265
 –, innerer 271
 –, spezifischer elektrischer 265
 Widerstandsbeiwert 153
 Widerstandskräfte 64
 Widerstandsthermometer 270
 Wiedemann-Franzsches Gesetz
 212, 270
 Wiensches Verschiebungsgesetz
 451
 Wilsonsche Nebelkammer 210
 Winkelbeschleunigung 41
 Winkelgeschwindigkeit 38

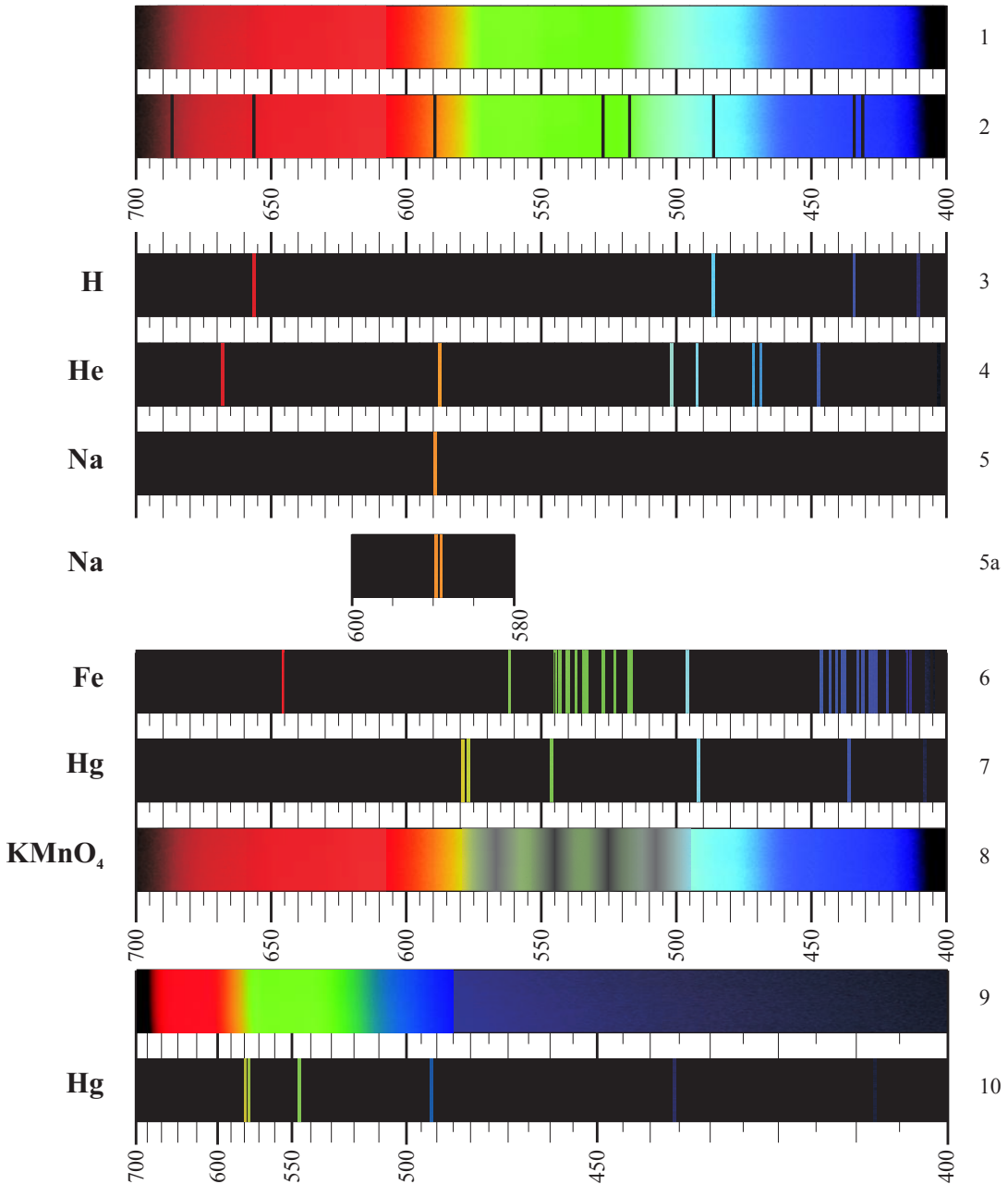
 Winkelrichtgröße 381f., 385, 390
 Wirbel 152
 Wirbelströme 315
 Wirkleistung 348
 Wirkung 500
 Wirkungen des elektrischen
 Stromes 262
 Wirkungsgrad 75, 222f.
 Wirkungsquerschnitt 563
 Wurf, schräger 33
 –, senkrechter 32
 –, waagerechter 30
 Wurfparabel 34

 Xenonlampe 294

 Zähigkeit, dynamische 146
 –, kinematische 147
 Zählpfeilsystem 314
 Zäpfchen 367f.
 Z-Diode 602
 Zeemaneffekt 515
 Zeigerdarstellung 343ff.
 Zeit 18
 Zeitdehnung 657
 Zener 589
 Zener-Effekt 589
 Zenerspannung 602
 Zentrifugalkraft 91
 Zentripetalkraft 91
 Zerfallskonstante 548f.
 Zerreißspannung 584
 Zerstäuber 145
 Zirkulation 156
 Zugfestigkeit 584
 Zusammendrückbarkeit 127, 135
 Zusammenhangskräfte 130
 Zustandsänderung, adiabatische
 194
 –, isobare 193
 –, isochore 193
 –, isotherme 192
 –, polytrope 195
 Zustandsdichte, effektive 593
 Zustandsgleichung idealer Gase
 171, 191
 – realer Gase 196
 Zustandsgröße 182
 zweiter Hauptsatz der
 Wärmelehre 229
 Zweites Bohrsches Postulat 511
 Zyklotron 309
 Zylinderkondensator 249

Spektraltafel

Abszissen: Wellenlaenge in nm



1...8 Gitterspektren

9 und 10 Prismenspektren

1 kontinuierliches Spektrum eines Kohlebogens

8 Bandenspektrum von Kaliumpermanganat

2 Spektrum mit Fraunhofer Linien

9 Prismenspektrum eines Kohlebogens

3...7 Linienspektren einiger Elemente

10 Prismenspektrum von Quecksilber

5a vergrößerter Ausschnitt